This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

L 90c 386.4 (52)

HARVARD COLLEGE
LIBRARY

FROM THE FUND OF
FREDERICK ATHEARN LANE
OF NEW YORK
Class of 1849

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWEIUNDFÜNFZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1866.

1-765
54.127
34

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LII. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1865. — HEFT VI BIS X,

(Mit 23 Tafeln.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAIS. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1866.

LSoc 386.4 (52)

UNIVERSITY
LIBRARY

INHALT.

Seite

XV. Sitzung vom 16. Juni 1865: Übersicht 3

v. Uchatius, Pulverprobe. (Mit 2 Tafeln.) 6

Winckler, Allgemeine Formeln zur Schätzung und Grenzbestimmung einfacher Integrale 57

Hlasiwetz, Über eine neue, der Cumarsäure isomere Säure . 79

— Über das Phloroglucin 84

v. Waltenhofen, Elektromagnetische Untersuchungen, mit besonderer Rücksicht auf die Anwendbarkeit der Müller'schen Formel. (Mit 1 Tafel.) 87

Ullik, Über die Darstellung des Siliciums auf elektrolytischem Wege und über eine Verbindung des Cers mit Silicium 115

Wiesner, Über die Entstehung des Harzes im Inneren der Pflanzenzellen 118

XVI. Sitzung vom 22. Juni 1865: Übersicht 131

Fritsch, Über die mit der Höhe zunehmende Temperatur der untersten Luftschichten 135

XVII. Sitzung vom 30. Juni 1865: Übersicht 148

v. Haidinger, Der Meteorit von Taranaki, Wellington, Neu-Seeland 151

— Eine Federwolke am 17. Juni 1865 154

Barth, Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium in Innsbruck. (I. Zur Geschichte des Tyrosins.) 162

Malin, Über das Carthamin 167

Grabowski, Apparat zur Darstellung des Phosphorsäureanhydrids. (Mit 1 Tafel.) 170

XVIII. Sitzung vom 13. Juli 1865: Übersicht 173

Schrauf, Die Refractionsäquivalente und optischen Atomzahlen der Grundstoffe 176

XIX. Sitzung vom 20. Juli 1865: Übersicht 212

Boltzmann, Über die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen 214

Frischauf, Über die Berührungsaufgabe für die Kugel . . . 222

Loschmidt, Beiträge zur Kenntniss der Krystallformen organischer Verbindungen (III.) (Mit 1 Tafel.) 238

Seite

XX. Sitzung vom 27. Juli 1865: Übersicht 244

Rollett, Versuche über thatsächliche und vermeintliche Beziehungen des Blutsauerstoffes. (Mit 1 Tafel.) 246

Ludwig, E., Chemische Analyse der Therme von Tobelbad bei Graz in Steiermark 264

Exner und *Kotrtsch*, Chemische Analyse der Frauenquelle in Baden 273

Ditscheiner, Eine absolute Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen *D*-Linien 289

XXI. Sitzung vom 5. October 1865: Übersicht 299

Mach, Über die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtreizes auf die Netzhaut. (Mit 3 Tafeln.) 303

Unferdinger, Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreieckes verbinden; darauf bezügliche Lehrsätze und Probleme. (Mit 2 Tafeln.) 323

Schwarzer, Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger Kreisvielecke. 363

XXII. Sitzung vom 12. October 1865: Übersicht 376

Stricker, Studien über den Bau und das Leben der capillaren Blutgefässe 379

Loschmidt, Zur Grösse der Luftmolecüle 395

XXIII. Sitzung vom 19. October 1865: Übersicht 414

Schmidt, Über die Atomwärme 417

Allé, Über die Entwicklung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten 453

XXIV. Sitzung vom 3. November 1865: Übersicht 483

Stefan, Über die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen 486

XXV. Sitzung vom 9. November 1865: Übersicht 493

Popper, Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten. (Mit 1 Tafel.) 496

XXVI. Sitzung vom 17. November 1865: Übersicht 530

Leidesdorf und *Stricker*, Studien über die Histologie der Entzündungsherde. (Mit 1 Tafel.) 534

XXVII. Sitzung vom 30. November 1865: Übersicht 543

v. Littrow, Über eine Modification des Hansen'schen Registrirapparates. (Mit 1 Tafel.) 546

Lippich, Über einen neuen Fallapparat. (Mit 2 Tafeln.) . . 549

Ditscheiner, Eine Bemerkung zu Herrn Lewis M. Rutherfurd's Construction des Spectroscopes. (Mit 1 Tafel.) 563

Seite

XXVIII. Sitzung vom 7. December 1865: Übersicht 571

Niemtschik, Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen. (Mit 5 Tafeln.) 573

Czermak, Über den *Spiritus asper* und *lenis,* und über die Flüsterstimme, nebst Bemerkungen zur phonetischen Transscription der Kehlkopflaute 623

XXIX. Sitzung vom 14. December 1865: Übersicht 642

Buchner, Über das Fluorthallium 644

Török, Beiträge zur Kenntniss der ersten Anlagen der Sinnesorgane und der primären Schädelformation bei den Batrachiern. (Mit 1 Tafel.) 646

Reissig, Über das Verhalten des Jodsilbers im Lichte . . 655

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND. I. HEFT.

Jahrgang 1865. — Juni.

(Mit 4 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER KAIS. KÖN. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

INHALT.

Seite

XV. Sitzung vom 16. Juni 1865: Übersicht 3

v. Ochatius, Pulverprobe. (Mit 2 Tafeln.) 6

Winckler, Allgemeine Formeln zur Schätzung und Grenzbestimmung einfacher Integrale 57

Hlasiwetz, Über eine neue, der Comarsäure isomere Säure . 79

— Über das Phloroglucin 84

v. Waltenhofen, Elektromagnetische Untersuchungen, mit besonderer Rücksicht auf die Anwendbarkeit der Müller'schen Formel. (Mit 1 Tafel.) 87

Ullik, Über die Darstellung des Siliciums auf elektrolytischem Wege und über eine Verbindung des Cers mit Silicium. 115

Wiesner, Über die Entstehung des Harzes im Inneren der Pflanzenzellen 118

XVI. Sitzung vom 22. Juni 1865: Übersicht 131

Fritsch, Über die mit der Höhe zunehmende Temperatur der untersten Luftschichten 135

XVII. Sitzung vom 30. Juni 1865: Übersicht 148

v. Haidinger, Der Meteorit von Taranaki, Wellington, Neu-Seeland 151

— Eine Federwolke am 17. Juni 1865 154

Barth, Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium in Innsbruck. (I. Zur Geschichte des Tyrosins.) 162

Malin, Über das Carthamin 167

Grabowski, Apparat zur Darstellung des Phosphorsäureanhydrids. (Mit 1 Tafel.) 170

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

6.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

1866, Sept. 24.
Sane Fund,

XV. SITZUNG VOM 16. JUNI 1865.

Wegen Erkrankung des Präsidenten übernimmt Herr Regierungsrath Ritter v. Ettingshausen den Vorsitz.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Allgemeine Formeln zur Schätzung und Grenzbestimmung einfacher Integrale", von Herrn Prof. Dr. A. Winckler in Graz;

„Über eine neue, der Cumarsäure isomere Säure" und „über das Phloroglucin", von Herrn Prof. Dr. H. Hlasiwetz in Innsbruck;

„Elektro-magnetische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die Anwendbarkeit der Müller'schen Formel. — I. Abhandlung: Versuche mit massiven Cylindern", von Herrn Prof. Dr. A. v. Waltenhofen;

„Über die Darstellung des Siliciums auf elektrolytischem Wege und über eine Verbindung des Cers mit dem Silicium", von Herrn Fr. Ullik, Assistenten der Chemie an der technischen Hochschule zu Graz;

„Die äussersten Polar-Continente, eine neue Welt natürlich productiver und culturfähiger Gebiete, ferner: Ebbe und Fluth", von Herrn Ed. Tesarz.

Herr Oberstlieutenant K. v. Sonklar dankt mit Schreiben vom 8. Juni für die ihm zur Herausgabe seines Werkes „die Gebirgsgruppe der Hohen-Tauern" bewilligte Subvention von 800 fl. und erklärt sich mit den ihm gestellten Bedingungen einverstanden.

Das c. M., Herr Dr. K. Freih. v. Reichenbach spricht über bisher unbekannte Erscheinungen loheartiger Ausströmungen, welche von sensitiven Individuen wahrgenommen werden.

Herr Dr. Jul. Wiesner überreicht eine Abhandlung: „Über die Entstehung des Harzes im Innern der Pflanzenzellen".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Dijon Mémoires. 2e Série. Tome XIe. Année 1863.

Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna: Memorie. Serie 2, Tomo IV, Fasc. 1. Bologna, 1864; 4°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 11. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1528—1530. Altona, 1865; 4°.

Barrande, Joachim, Défense des colonies. III. Prag & Paris, 1865; 8°.

Berlin, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1864. 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome XXIIe. N°. 88. Genève, Lausanne, Neuchatel, 1865; 8°.

Bonn, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1864—65. 4° & 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. N°. 19—22. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Serie. XIVe Année, 1er Volume, 20e—24e Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Dienger, J., Theorie der elliptischen Integrale und Functionen, für die Bedürfnisse der Anwendung dargestellt. Stuttgart, 1865; 8°.

Gentilli, Amadeo, Ein Fortschritt der Geodäsie mit Hinblick auf dessen Wichtigkeit für Eisenbahn-Studien. (Mit 4 Tafeln.) Wien, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 21 bis 24. Wien, 1865; 8°.

Göttingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus den Jahren 1864—65. 4° & 8°.

Greifswald, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1864. 4° & 8°.

Institut National Genevois: Bulletin. N°. 24. 1864; 8°.

Istituto, Reale, Lombardo di Scienze e Lettere: Memoire. Classe di Lettere e Scienze morali e politiche: Vol. X. (I della Serie III.) Fasc. 1; Classe di Scienze matematiche e naturali: Vol. X. (I della Serie III.) Fasc. 1. Milano, 1865; 4°. — Rendiconti. Cl. d. L. e Sc. m. e p.: Vol. I., Fasc. 8—10. 1864; Vol. II., Fasc. 1—2. 1865. Milano; 8°; Cl. d. Sc. m. e nat.: Vol. I. Fasc. 9—10. 1864; Vol. II. Fasc. 1—2. 1865. Milano; 8°.

Istituto I. R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo X°, Serie III^a^, Disp. 4^a^—5^a^. Venezia, 1864—65; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer, von F. Vorwerk. Band XXIII, Heft 4. Speyer, 1865; 8°.

Land- und forstwirthschaftl. Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 15—17. Wien, 1865; 4°.

Marburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1864. 4° & 8°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1865. 3. Heft. Wien; 8°.

— des k. k. Génie-Comité. Jahrg. 1865. 4. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. IV. Heft. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 202e—203e Livraisons. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Osservatorio del R. Istituto tecnico di Ancona: Bullettino Meteorologico. 1865. N°. 3—4. Ancona; 4°.

— Reale di Palermo: Bulletino Meteorologico. 1865, N°. 4. Palermo; 4°.

Reader. N°. 125—128, Vol. V. London, 1865; Fol.

Reslhuber, Augustin, Resultate aus den im Jahre 1863 auf der Sternwarte zu Kremsmünster angestellten meteorologischen Beobachtungen. Linz, 1864; 8°.

Schmidt, C. F. Eduard, Das Erdöl Galiziens, dessen Vorkommen und Gewinnung etc. Wien, 1865; 8°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. VIIIe Année, N°. 12. Constantinople, 1865; 4°.

Society, The Royal Geographical, of London: Proceedings. Vol. III, N°. 4. 1859; Vol. VIII., N°. 4. 1864; Vol. IX., N°. 1—2. 1865. London; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 40—47. Wien, 1865; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines. XVII. Jahrg. 5. Heft. Wien, 1865; 4°.

— für Chemie etc. von H. Hübner. VIII. Jahrg. N. F. Band I, Heft 8 u. 10. Göttingen, 1865; 8°.

Pulverprobe

von **Franz Ritter von Uchatius,**
k. k. Oberstlieutenant und Commandant des Zeugs-Artillerie-Commando Nr. 17.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1865.)

Seit langer Zeit besteht die Erfahrung, dass das, was man unter Stärke, Hochgradigkeit des Pulvers versteht, und wovon die Triebkraft desselben abhängt, nicht zugleich einen Maassstab für die sprengende Wirkung des Pulvers darbietet.

Das mit brauner Kohle erzeugte Pulver z. B. ist hochgradiger, als das mit schwarzer Kohle erzeugte.

Man verkleinerte die Ladung so weit bei ersterem, dass der ballistische Effect bei beiden gleich war, und dennoch zeigte es einen so verderblichen Einfluss auf die Feuerwaffen, dass dasselbe ungeachtet seiner sonstigen Vorzüge für den Kriegsgebrauch nicht zugelassen werden konnte.

Es entstand zur näheren Bezeichnung dieser Eigenschaft des Pulvers, meines Wissens nach, zuerst in Frankreich der technische Ausdruck: *„Force brisante“* zum Unterschiede der *„Force balistique“* und ich erlaube mir desshalb auch in Folgendem die durch diese beiden Kräfte hervorgebrachten Wirkungen mit den Ausdrücken brisante und ballistische Wirkung zu bezeichnen.

Beide diese Kräfte sind in jedem Schiessmittel vorhanden, ohne dass jedoch das Maass der einen auf das Maass der anderen einen Schluss zulässt, wenn es sich um verschiedenartige Schiessmittel handelt.

Unter den bestehenden Pulverproben gibt es mehrere, welche zur Beurtheilung der ballistischen Wirkung hinreichend genaue Daten liefern; zur Beurtheilung der brisanten Wirkung fehlt es aber bis heute an einem geeigneten Apparate, so dass diese Wirkung nur durch andauerndes Schiessen aufgefunden werden kann, wo sie sich durch frühzeitiges Zersprengen oder Ausbauchen und Anfressen der Feuerwaffen kund gibt.

War der Mangel eines Apparates zum Messen der brisanten Wirkung schon bei der Prüfung des gewöhnlichen Schiesspulvers fühlbar, so wurde er es umsomehr bei der Beurtheilung der in letzter Zeit zahlreich auftretenden neuartigen Schiessmittel, bei welchen meistens die brisante Wirkung in einem höheren Grade als bei gewöhnlichem Schiesspulver vorhanden ist.

Durchdrungen von der Nothwendigkeit eines geeigneten Pulver-Probeapparates und als Geschützerzeuger nicht ohne Beruf dahin zu wirken, dass sich nicht irgend ein mehr waffengefährdendes Schiessmittel an die Stelle des Schiesspulvers, für welches die bestehenden Geschützrohre construirt sind, einschleiche, entwarf ich im Juni 1862 eine neue Pulverprobe, welche für alle Schiessmittel sowohl das Maass der ballistischen als brisanten Wirkung mit möglichster Genauigkeit angeben soll, gab dieselbe unter eigener Aufsicht in Arbeit und erhielt noch im October desselben Jahres die erste Bestätigung der Richtigkeit des zu Grunde gelegten Principes.

Der Aufsatz in Dingler's polytechnischem Journale, 1. Jännerheft, 1863, Seite 21, über Capitän Rodman's Versuche, die Bestimmung der Gasspannungen in Geschützrohren betreffend, wobei er ein dem meinen ähnliches Princip anwendete, kam mir erst im Februar 1863 zu Gesicht.

Nach mehrfältigen Änderungen ist dieses Instrument nun zu jener Vollkommenheit und Einfachheit gediehen, dass es nach meiner Meinung, den angestrebten Zweck vollständig erreichend, überall, wo es sich um Prüfung der Qualität von Schiessmitteln handelt, willkommen sein dürfte.

Die neue Pulverprobe kann auf dreierlei Art zusammengestellt und verwendet werden.

a) Als eigentliche Pulverprobe zum Vergleiche verschiedenartiger Schiessmittel unter einander.

b) Als ballistischer Apparat zur Prüfung und zum Vergleiche verschiedenartiger Gewehrläufe und Lademethoden.

c) Zum Messen der brisanten Wirkung beim Schiessen aus Geschützen.

Anmerkung. 1 Wiener Pfund = 560 Grammes,
1 „ Gran = 0·073 „
1 „ Fuss = 0·316 mètre,
1 „ Zoll = 0·0263 „

a) Die Pulverprobe.

Der Einrichtung des Apparates liegt nachfolgender Calcül zu Grunde:

Wird eine Geschützladung entzündet, so tritt eine rasch anschwellende Gasspannung ein, welche, je nachdem das Schiessmittel mehr oder weniger schnell zusammenbrennt, das Projectil weniger oder mehr vorwärts geschoben hat, wenn sie ihr Maximum erreicht.

Diese rasche Gasanschwellung wirkt gleich einer Stosskraft auf die Wände des Rohres, welche sie zu sprengen oder auszudehnen sucht, und auf die dargebotene Fläche des Projectiles, dessen Trägheit sie zu überwinden hat, während gleichzeitig das hochgespannte, stark erhitzte Gas durch Zündloch und Spielraum mit Heftigkeit ausbläst.

Alle Erscheinungen der brisanten Wirkung der Schiessmittel lassen sich hiedurch vollkommen erklären, und es ist kein Zweifel, dass die beim ersten Stosse herrschende Gasspannung die eigentliche Ursache der brisanten Wirkung ist und folglich als Maassstab für letztere angewendet werden kann.

Von dem Momente an, wo das Maximum der Gasspannung eingetreten ist, nimmt die Spannung und Temperatur der Gase zwar ab, wird jedoch durch das nachträgliche Verbrennen der noch übrig gebliebenen Theile des Schiessmittels noch während der Bewegung des Projectils bis zur Mündung genährt und setzt sich mit der äusseren Luft erst ins Gleichgewicht, wenn das Projectil die Mündung verlässt.

Es ist klar, dass dieser zweite Theil der Wirkung auf die Waffe ungleich weniger zerstörend wirkt, als der erste Stoss, dass er aber auf die dem Projectile mitzutheilende Geschwindigkeit von namhaftem Einfluss ist.

Nennt man die durch das Maximum der Gasspannung hervorgebrachte Stosskraft, welche auf das Geschoss wirkt, A, die beschleunigende Nachwirkung, welche während der Dauer der Bewegung des Geschosses im Laufe stattfindet, B, so bringt $A+B$ die Geschossgeschwindigkeit hervor.

Da aber ein Theil dieser Wirkung $= C$ durch die Reibung des Projectiles an den Rohrwänden vernichtet wird, so hängt die Anfangsgeschwindigkeit des Projectiles von $A+B-C$ ab.

Ich erlaube mir diese Anschauung hier aus dem Grunde in Erinnerung zu bringen, weil eben nur durch sie die manchmal unbegreiflich scheinenden Effecte sehr brisanter Schiessmittel Erklärung finden.

Bei stark brisant wirkenden Schiessmitteln ist *A* verhältnissmässig gross und *B* klein, und da überdies mit der Vergrösserung von *A* auch *C* wächst, so kann sogar der Fall eintreten, dass bei zwei verschiedenen Schiessmitteln, wenn von selben solche Quantitäten angewendet werden, dass bei übrigens gleicher Lademethode gleiche Geschossgeschwindigkeiten erreicht werden, die Gasspannungen um das Vier- bis Fünffache von einander verschieden sind, oder bei sehr brisanten die normale Geschossgeschwindigkeit gar nicht erreicht werden kann, ohne den Lauf im untersten Theile zu sprengen.

Hieraus ergibt sich die Nothwendigkeit, dass zur richtigen Beurtheilung eines Schiessmittels nebst der Kugelanfangsgeschwindigkeit, welche dasselbe hervorbringt, auch das als Maass für die brisante Wirkung dienende Maximum der Gasspannung bekannt sein müsse, welches für obige Geschwindigkeit nothwendig war.

Als fernere Nothwendigkeit betrachtete ich auch, dass die zu treffende Einrichtung der bei den gezogenen Feuerwaffen möglichst ähnlich sei; dass der Raum, welcher zur ersten Ausbreitung der Gase dient, und welchen ich durch den Ausdruck „Laderaum" bezeichnen werde, so wie das Gewicht des Projectiles und dessen Haftung an den Rohrwänden stets gleich, und dass das Quantum des Schiessmittels so gewählt sei, dass ein vollständiges Zusammenbrennen desselben, noch ehe das Projectil die Mündung erreicht, unter allen Umständen stattfindet.

Ein gezogener Infanterie-Gewehrlauf wird ober dem Zündloche und dann wieder in einer Länge von 10·75 Zollen abgestochen, Fig. 1.

Am unteren und oberen Theile ist die Oberfläche concentrisch mit der Bohrung auf einen bestimmten Durchmesser cylindrisch abgedreht.

Unten fallen durch dieses Abdrehen blos die Ecken des Laufes weg, oben wird der Lauf aber so geschwächt, dass sich ein scharfer Absatz *a* bildet.

Die Bohrung des Laufes wird 1·15 Zoll von unten nach aufwärts durch Ausbohren und Ausschmirgeln auf den Durchmesser von 0·568 Zollen erweitert und vollkommen cylindrisch hergestellt.

Die Warze *b* und die Schraube *c* sind zu Zwecken, welche später erwähnt werden, angebracht.

Das Zündloch *d* hat 0·05 Zoll im Durchmesser und trifft mit der Bohrung des an dieser Stelle eingeschraubten normalen Infanterie-Gewehrpistons, Fig. 2, *p* zusammen.

Der Meissel, welchen Fig. 3 vorstellt, hat eine krumme, stumpfe Schneide.

Der Krümmungshalbmesser beträgt 2 Zoll.

Die beiden Flächen der Schneide laufen unter einem Winkel von 60 Graden zusammen, die Schneide ist mit dem Halbmesser von 0·04 Zoll abgestumpft.

Der Schaft des Meissels bildet einen Cylinder von 1·1 Zoll Länge und 0·564 Zoll Durchmesser, mithin beträgt das Flächenmaass der oberen kreisrunden Fläche des Meissels, welche dem Stosse der Pulvergase ausgesetzt ist, gerade ¼ Quadratzoll.

Der ganze Meissel ist aus dem besten Werkzeugstahl erzeugt, die Schneide glashart hergestellt.

Das Laden geschieht in folgender Weise:

Der Dorn, Fig. 4, dessen cylindrischer Theil um 0·6 Zoll länger ist als der Schaft des Meissels, wird in den gut gereinigten, trocken ausgewischten Lauf von unten eingeschoben, ein normales Infanterie-Bleigeschoss, Fig. 5, im Mittelgewichte von 400 Granen in den Lauf gebracht und der stählerne Setzer, Fig. 6, welcher bei *a* zwei messingene Führungsringe hat, auf die Kugel gesetzt. Indem man nun den Lauf mit der linken Hand ergreift und vertical hält, drückt man den Kopf des Dornes gegen eine feste Holzunterlage, und gibt mit einem 1·12 Pfund schweren hölzernen Klüppel 12 kräftige Streiche auf den Knopf des Setzers.

Der Setzer hat im unteren Theile eine Aushöhlung *b*, welche die ogivale Spitze des Geschosses ergreift und so verhindert, dass dasselbe durch das Schlagen schiefgedrückt werde.

Der am oberen Theile des Dornes angebrachte konische Zapfen ist etwas grösser als die im Geschosse befindliche Vertiefung, wodurch dasselbe um so besser expandirt und in die Züge des Laufes eingepresst wird.

Nach dem Schlagen sieht man nach, ob nicht der Lauf etwas in die Höhe gestiegen ist, wo dann eine Klaffung zwischen dem unteren Rande des Laufes und dem Ansatze *a* des Dornes entsteht.

Ist dies der Fall, so nimmt man den Setzer heraus und stösst Lauf und Dorn so lange gegen die Holzunterlage, bis die Klaffung verschwindet.

Die Geschosse werden auf diese Art an einer bestimmten Stelle des Laufes ganz gleichförmig und so eingepresst, dass nicht der mindeste Spielraum vorhanden ist.

Man könnte glauben, dass das Schlagen Unregelmässigkeiten in dem Einpressen des Geschosses hervorbringe, welche auf die Grösse der Gasspannung Einfluss nehmen. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn nur das Schlagen hinlänglich ausgeführt ist. Ein Zuviel schadet nicht, weil das Blei keine weitere Verdichtung erleidet und vielfältige Versuche gezeigt haben, dass die doppelte und dreifache Anzahl Streiche keine Änderung in dem Resultate hervorbringen.

Wäre aber zu schwach geschlagen worden, so würde ein kleiner Spielraum vorhanden sein, was allerdings Einfluss hätte. Man entdeckt dies aber sehr leicht, indem man durch den Lauf gegen ein lichtes Fenster sieht, wo dann die mindeste Trennung zwischen Lauf und Blei einen Lichtschimmer erzeugt.

In diesem Falle, welcher aber nach einiger Übung niemals eintritt, helfen einige nachträgliche Klüppelstreiche ab.

Das eingepresste Geschoss hat die Form Fig. 7.

Ist das Blei im Laufe gelagert, so kehrt man den Lauf um, bringt das in gehöriger Quantität abgewogene Schiessmittel und darauf den cylindrischen Schaft des Meissels ein, welcher durch leichtes Anziehen der Stellschraube *c*, Fig. 1, festgehalten wird.

Fig. 2 zeigt einen geladenen Lauf.

Das Reinigen und Trockenwischen des Laufes muss nach jedem Schusse stattfinden, weil der nicht entfernte Pulverrückstand Unregelmässigkeiten hervorbringt.

Aus eben diesem Grunde darf auch das Einölen des Laufes nicht in Anwendung kommen.

Die Bleigeschosse sind, sowie sie die Presse erzeugt, sowohl der Form als dem Gewichte nach gleichförmig genug.

Der so geladene Lauf wird nun in den Apparat, Fig. 8, eingesetzt.

Der Apparat selbst besteht aus dem auf dem Pfostentische *A* festgeschraubten Stativ *B*. Der Tisch steht auf dem Fundamentsteine

C und wird mittelst der an den vier Füssen angebrachten Stellschrauben *a* so gestellt, dass die Axe des Laufes vertical steht.

Die beiden Klemmen der Arme *b* und *c* werden geöffnet, die Bronzeplatte, Fig. 9 (in Fig. 8 mit *d* bezeichnet), in die dafür bestehende Fuge im Fussgestelle des Apparates eingeschoben, die Schneide des Meissels auf die Bronzeplatte aufgesetzt, der untere abgedrehte Theil des Laufes in das im Arme *c* befindliche Lager, so dass die Warze *b*, Fig. 1, in die dafür vorhandene Vertiefung einfällt, das obere abgedrehte Laufstück in das Lager des Armes *b*, so dass der Ansatz *a* des Laufes fleissig an die untere Fläche des Lagers anschliesst, eingelegt und die Klemmen bei *c* und *b* geschlossen.

Gleichzeitig mit dem Laden des Laufes kann der in den Ring des beweglichen Armes *g* eingesetzte Receptor adjustirt werden.

Derselbe ist in Fig. 10 im Durchschnitte zu sehen. Er wird, nachdem mittelst des Schlüssels, Fig. 11, die Schrauben *a* mit ihren Spitzen bis in die Wandstärke zurückgedreht sind, in umgekehrter Stellung auf die Holzunterlage gebracht, der Bleikonus, Fig. 12, eingesetzt und mit Hilfe des hölzernen Setzers, Fig. 13, und eines Klüppels fest gelagert, worauf die beiden Spitzenschrauben, so weit es angeht, vorgedreht werden. Letztere dienen, um das Losprellen des Bleikegels beim Schusse zu verhindern.

Zur Erzeugung der Bleikegel wird der Receptor selbst als Gussmodel benützt, indem er, wie Fig. 14 zeigt, auf die Unterlagplatte *a* aufgesetzt, mit dem Eingusse *b* versehen und dann mit flüssigem Blei bis zum oberen Rande des Eingusses gefüllt wird. Nach dem Erkalten der Klötze werden die Angusszapfen abgesägt und die Bleikegel durch Zufeilen an der oberen Fläche auf das bestimmte Gewicht gebracht.

Der adjustirte Receptor wird von unten in den Ring des beweglichen Armes *g* eingeschoben und durch blosses Verdrehen mit Hilfe eines Bajonnetschlusses festgehalten.

Ist der bewegliche Arm *g* auf den Nullpunkt, der auf dem gezähnten Gradbogen *h* gravirten Scala gestellt, so bleibt nur noch die Stellschraube *c*, Fig. 1, zu lüften und der Schuss kann abgefeuert werden, welches mittelst eines auf den Piston gesetzten Zündhütchens und eines Hammers geschieht, der auf gleiche Art, wie bei dem Gewehrschlosse, aufgezogen und am besten mit einer Schnur aus

einiger Entfernung abgezogen wird, um nicht durch die starke Schallwirkung am Gehör Schaden zu nehmen.

Die Wirkung der explodirenden Ladung äussert sich durch einen Stoss auf den eingesetzten Meissel, dessen Grösse, dem Maximum der Gasspannung proportional, sich durch die in der Bronzeplatte hervorgebrachte Kerbe, Fig. 9, *a* zeichnet und durch das vollkommen centrale Einschlagen des Geschosses in den Bleikonus des Receptors, wodurch der Arm *g*, ähnlich wie beim ballistischen Pendel, um seinen Drehpunkt bewegt und in der höchsten Stellung, durch das Einfallen des Stellers *i* in die Zähne des Gradbogens, festgehalten wird.

Das Gewicht des Receptors beträgt 1·664 Pfund, das Gewicht des Bleikegels 1·312 Pfund; das ganze von dem Geschosse zu überwindende Gewicht bei horizontaler Stellung des Armes *g* beträgt 4·281 Pfund.

Das Diafragma *f* dient, um die Gase vom Receptor abzuhalten und erfüllt diesen Zweck vollständig; wenigstens brachte die Erhöhung des Receptors um 28 Zoll über das Diafragma keine Veränderung in der Anzahl der Grade hervor.

Der auf dem Diafragma aufgesetzte Blechmantel *k* verhindert das Wegspritzen der Bleifragmente.

Nach dem Schusse werden die beiden Klemmen bei *b* und *c* geöffnet, der Lauf sammt Meissel herausgenommen und letztere der Reinigung unterzogen.

Da man hier den von einem Schusse erzeugten Rückstand ganz deutlich zu Gesichte bekommt, so ist hiedurch die Gelegenheit geboten, bei verschiedenartigen Schiessmitteln ein vergleichendes Urtheil darüber zu fällen.

Auch ist es leicht, den Rückstand behufs chemischer Untersuchung zu sammeln.

Die Länge der in der Bronzeplatte entstandenen Kerbe wird mittelst eines Spitzzirkels gemessen und aus der dafür aufgestellten Tafel, mit Hilfe dieser in Hundertel-Zollen ausgedrückten Kerbenlängen das Mass des, die brisante Wirkung repräsentirenden Maximums der Gasspannung in Atmosphären abgelesen.

Zur Erzeugung der Bronzeplatten werden 9 Gewichtstheile möglichst reinen Kupfers mit einem Gewichtstheil Zinn zusammengeschmolzen und sehr heiss in gut gebrannte Sandformen ausgegossen. Das Modell hiezu, in Fig. 15 abgebildet, liefert 5 Schienen zu

3 Platten. Durch Hobeln und mit der Schlichtfeile werden die Platten auf die in Fig. 9 ersichtlichen Dimensionen gebracht und endlich an der Oberfläche polirt.

Die Prüfung der Bronze geschieht mit der Fallmaschine, Fig. 16, indem ein, mit dem beim Schiessen verwendeten, ganz gleicher Meissel, Fig. 17, *a*, auf welchen jedoch der Kopf *b* aufgeschraubt ist, an beiden Enden jeder Platte 0·3 Zoll einwärts des schmalen Randes in verticaler Stellung aufgesetzt und durch die herabfallende Stahlkugel *c* in die Bronze eingeschlagen wird. Es versteht sich, dass die Kugel genau vertical über der Axe des Meisselschaftes hängen muss, welches mittelst eines Senkels und der 3 Fussschrauben *d* im Vorhinein leicht zu prüfen und zu bewerkstelligen ist. Das Gewicht der Kugel ist 1·092 Pfunde, die Fallhöhe 30 Zoll, die Kerbenlänge muss genau 0·46 Zoll betragen.

Platten, welche diese Prüfung nicht bestehen, deren bei grösserer Erzeugung bis zu ein Drittel der Gesammtzahl entspringen, können nur bei solchen Versuchen unter den Meissel geschoben werden, wo es sich ausschliesslich um die ballistische Wirkung handelt.

Die Kerben dürfen nur so weit einander genähert werden, dass keine gegenseitige Beeinträchtigung stattfindet.

Bei der Pulverprobe kann eine Platte nebst den 2 Probekerben noch 12 bis 15 Kerben aufnehmen.

Um die Daten für die oben erwähnte Tafel zu bekommen, wurde derselbe krumme Meissel auf Platten von geprüfter Bronze aufgesetzt und mit Hilfe einer sehr genau construirten Maschine nach und nach mit 4, 6, 8 u. s. w. bis 60, dann weiter mit 65, 70, 75 u. s. w. bis 90 Wiener Centner ruhender Last beschwert.

Das Niedersinken der Last auf den Meissel geschah mit einer Geschwindigkeit von 0·002 Zoll per Secunde.

Die durch diese verschiedenen Belastungen entstandenen Kerben bilden eine Scala, wovon in Fig. 18 der Anfang und das Ende abgebildet ist.

Die hiebei erhaltenen Kerbenlängen, in Hundertel-Zollen ausgedrückt, sind nachfolgende:

Tafel I.

Bestimmung der Kerbenlängen.

Ruhende Last in Ctrn.	Kerbenlänge	Ruhende Last in Ctrn.	Kerbenlänge	Ruhende Last in Ctrn.	Kerbenlänge	Ruhende Last in Ctrn.	Kerbenlänge
4	13	22	45	40	59	58	72½
6	21	24	47	42	60½	60	74
8	24½	26	48	44	62	65	76½
10	28	28	50	46	63½	70	79
12	31	30	51½	48	65	75	81½
14	34	32	53	50	66½	80	84
16	37	34	54½	52	68	85	86½
18	40	36	56	54	69½	90	89
20	43	38	57½	56	71	. . .	. . . .

Ist z. B. die beim Schusse gefundene Kerbenlänge = 0·50 Zoll, so bin ich berechtigt zu sagen, die Wirkung des durch die Gasspannung auf den Meissel erzeugten Stosses ist gleich der Wirkung einer auf den Meissel aufgelegten ruhenden Last von 28 Centnern, und da die obere Meisselfläche genau ¼ □ Zoll beträgt, so folgt, dass der auf die Rohrwände ausgeübte Stoss gleich ist dem ruhenden Drucke von 4 × 28 = 112 Centnern per □ Zoll oder, um die Angabe von Maass und Gewicht unabhägig zu machen, gleich 896 Atmosphären.

Bestimmt man den Werth der vorstehenden aufgefundenen Kerbenlängen auf diese Art in Atmosphären und schaltet die Mittelglieder ein, so entsteht die nachfolgende Tafel:

Tafel II.

Umwandlung der Kerbenlängen in Atmosphären.

in 0·01" Kerbe	Atmosphären	Kerbe	Atmosphären	Kerbe	Atmosphären	Kerbe	Atmosphären
13	125	33	427	53	1024	73	1877
14	136	34	448	54	1067	74	1920
15	144	35	469	55	1109	75	1984
16	152	36	491	56	1152	76	2048
17	160	37	512	57	1195	77	2112
18	168	38	533	58	1237	78	2176
19	176	39	553	59	1280	79	2240
20	184	40	576	60	1323	80	2304
21	192	41	597	61	1365	81	2368
22	200	42	619	62	1408	82	2432
23	219	43	640	63	1451	83	2496
24	247	44	672	64	1493	84	2560
25	265	45	704	65	1536	85	2624
26	284	46	736	66	1579	86	2688
27	302	47	768	67	1621	87	2752
28	320	48	811	68	1664	88	2816
29	341	49	853	69	1707	89	2880
30	363	50	896	70	1749	90	2944
31	384	51	939	71	1792	. . .	. . . .
32	405	52	981	72	1835	. . .	. . . .

Ein Zweifel könnte noch bei den durch das Schiessen erhaltenen Angaben aufgeworfen werden, nämlich der, ob denn bei der so unendlich kurzen Dauer des Stosses die Spannkraft der Gase sich in ihrer wahren Grösse durch die Kerbe zu erkennen gibt? Selbst wenn dieser Zweifel Berechtigung hätte und die Gasspannungen wirklich grösser wären als die Angaben, so dürfte man die höheren Gasspannungen nicht in Rechnung nehmen, denn, kann sich wegen Mangel an Zeit die Stosskraft auf den Meissel nicht vollkommen äussern, so kann sie es aus derselben Ursache auch auf die Rohrwände nicht und es bleibt der, der aufgefundenen Kerbe entsprechende ruhende Druck die richtigere Basis für alle auf die Widerstandsfähigkeit der Waffen Bezug habenden Berechnungen.

Dass dies wirklich so ist, geht aus nachstehendem Versuche hervor.

Zwei in der Bohrung ganz gleich construirte schmiedeeiserne gezogene Pistolenläufe wurden am unteren Ende 3 Zoll lang, mit der Bohrung concentrisch, der eine, *a*, auf den Durchmesser von 0·71, der zweite, *b*, auf 0·774 Zoll Durchmesser cylindrisch abgedreht.

Da der Bohrungsdurchmesser in den Zügen 0·54 Zoll betrug, so blieb für die doppelte Wandstärke bei $a = 0{\cdot}17$, bei $b = 0{\cdot}234$ Zoll und da die absolute Festigkeit des Schmiedeeisens an zwei, aus dem unteren Theile eines ungebrauchten schmiedeeisernen Flintenlaufes geschnittenen Stäben, mittelst der hiezu vorhandenen sehr genauen Maschine gemessen, 542 Centner betrug, so sollte der Rechnung nach a bei einem Gasdrucke von 1365, b bei 1878 Atmosphären gesprengt werden.

Die beiden Läufe wurden hierauf mit steigenden Schiesswollladungen beschossen. Die Kugel war, wie für die Pulverprobe angegeben ist, eingepresst.

Die Länge des Laderaumes betrug 1 Zoll. Nach jedem Schusse fand eine genaue Untersuchung des Laufes Statt.

Tafel III.

Prüfung der Richtigkeit der durch die Kerbenlängen angezeigten Gasspannungen.

Lauf	GranSchiesswolle	3	4	5	6	6½	7	. . .	. . .
a	Kerbenlänge in 0·01 Zoll . .	30	33	39	47	56	62	. . .	. . .
	Atmosphären .	363	427	555	468	1152	1408	. . .	. . .
	Veränderung des Laufes . . .	0	0	0	0	0·004″ dicker	der Lauf zerrissen		
b	GranSchiesswolle	6	7	8	8½	9	9½	10	10½
	Kerbenlänge in 0·01 Zoll . .	46	62	65	67	70	73	73½	74
	Atmosphären .	736	1408	1536	1621	1749	1877	1898	1920
	Veränderung des Laufes . . .	0	0	0	0	0	0	um 0·008″ dicker	der Lauf zerrissen

Die beim Zerspringen der Läufe angezeigten Gasspannungen von 1408 und 1920 Atmosphären fallen so nahe zu dem in Voraus berechneten von 1365 und 1878 Atmosphären, dass ich hieraus auf eine für die Praxis vollkommen hinreichende Verlässlichkeit der Angaben durch die Meisselkerben schliessen zu dürfen glaube.

Als Beispiel über die zu erwartende Gleichförmigkeit der Angaben bezüglich der brisanten Wirkung und zugleich über die Zunahme der Gasspannungen bei gleich bleibendem Laderaume und

steigenden Quantitäten des Schiessmittels, möge folgender Versuch dienen.

Der hier gewählte Ladenraum (worunter immer die Längenausdehnung desselben verstanden ist) war 1·02 Zoll.

Das Volumen desselben betrug bei dieser Länge genau $^1/_4$ Kubikzoll, wobei die in dem Projectile befindliche Höhlung mit eingerechnet ist. Dieser Raum fasste 60 Gran Pulver.

Tafel IV.

Schiessen bei gleichem Laderaume mit steigenden Ladungen.

Musketenpulver 104° Wagner				Gewehrpulver 110° Wagner				Schiesswolle Hirtenberg			
Gran	in 0·01″ Kerbenlänge einzeln	Mitt.	Atmosphäre	Gran	in 0·01″ Kerbenlänge einzeln	Mitt.	Atmosphäre	Gran	in 0·01″ Kerbenlänge einzeln	Mitt.	Atmosphäre
6	15—15—15	15	144	6	15—15—15	15	144	1½	25—25—24	24⅔	261
12	25—24—23	24	247	12	23—23—23	23	219	3	38—37—36	37	512
18	27—27—27	27	302	18	28—28—28	28	320	4½	46—46—46	46	736
24	30—29—29	29⅓	348	24	33—33—33	33	427	6	57—53—52	54	1067
30	31—31—31	31	384	30	36—36—35	35⅔	483	7½	62—65—61	62⅔	1436
36	35—36—34	35	469	36	37—37—38	37⅔	526	9	69—71—73	71	1792
42	39—39—39	39	555	42	43—45—45	44½	679	10½	78—76—72	75⅓	2005
48	39—39—38	38⅔	547	48	47—47—47	47	768	12	76—86—85	82½	2463
54	38—39—42	39⅔	569	54	47—47—46	46⅔	743	13½	88—85—82	85	2624
60	43—43—43	43	640	60	48—50—50	49⅓	867	15	97—95—90	94	3200

Bei beiden Pulvergattungen steigen die Gasspannungen anfangs mit den Ladungen, bleiben aber von der Ladung von 42 Granen an nahezu stehen; nur der letzte Schuss zeigt eine höhere Spannung, weil das Pulver bei dieser Ladung schon etwas gepresst war.

Dieses Zurückbleiben der brisanten Wirkung bei Pulverladungen über eine, je nach der Lademethode verschiedenen Pulverquantität hinaus, hat sich bei vielfältigen Versuchen immer wieder gezeigt und scheint mir sehr beachtenswerth.

Einige dieser Fälle werden nachträglich aufgeführt werden.

Bei der Schiesswolle wurde ein Viertel des Pulvergewichtes angewendet, weil sie unter diesen Umständen nahezu das gleiche ballistische Resultat mit dem Pulver lieferte.

Die brisanten Wirkungen steigen hier fortwährend und erlangen bei den grösseren Ladungen eine Höhe, welche die grosse Sprengwirkung dieses Schiessmittels charakterisirt.

In Fig. 19 ist die brisante Wirkung dieser 3 Schiessmittel vergleichweise graphisch dargestellt.

Vergleicht man die bei dem Gewehrpulver erhaltenen Gasspannungen im Flintenlaufe mit denen von Rumford unter ähnlichen Raumverhältnissen, aber bei absolutem Verschlusse aufgefundenen, so sieht man deutlich, dass das Geschoss schon früher vorgeschoben worden ist und das Pulver noch nicht vollständig verbrannt war, als das Maximum der Spannung eintrat.

Tafel V.

Vergleich der Gasspannungen nach Rumford und im Flintenlauf.

Pulverladung in Theilen des Raumes		0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7
Maximum der Spannung	nach Rumfort . .	200	580	1060	2000	3100	5810	10.000
	im Flintenlauf . .	144	219	320	427	483	526	697

Begreiflich ist aber auch, dass, wenn das Geschoss während seines Weges im Laufe durch irgend ein Hinderniss aufgehalten wird, ein zweiter Stoss entstehen muss, welcher möglicherweise grösser ist, als der erste und um so eher ein Sprengen des Laufes verursachen kann, da er sich bis auf die vorderen schwächeren Laufwände erstreckt.

Die ballistische Wirkung wird in Graden abgelesen, wovon 180 auf einen Viertelkreisbogen aufgetragen sind.

Obwohl für den Vergleich verschiedener Schiessmittel untereinander dies hinreichen würde, so schien es doch wünschenswerth, den Werth dieser Grade zu kennen.

Zu diesem Zwecke wurden 6 Serien à 3 Schüssen mit 15, 20, 25, 30, 35 und 40 Gran Pulver und eingepresstem Geschosse auf der Pulverprobe gemacht, wobei die Laderäume proportional den Ladungen ansteigend und so gewählt waren, dass etwas mehr Raum vorhanden war, als das Pulver im lockeren Zustande brauchte.

Ferner wurden dieselben 6 Serien in horizontaler Lage des Apparates wiederholt, wobei der bewegliche Arm *g* sammt Receptor abgenommen war und die Geschosse in einem mit Blei ausgegossenen Mörser, vor welchem eine mit Papier überzogene Leinwandrahme aufgestellt war, einschlugen.

Die Anfangsgeschwindigkeiten der Projectile wurden in Ermanglung eines elektrischen Apparates nach der Methode Mattey's gemessen, wozu ich das am Umfange mit einem, auf der Randfläche senkrecht stehenden Papierkranze versehene, circa 14 Fuss im Durchmesser haltende Schwungrad einer Dampfmaschine benützte, welches mit einer Geschwindigkeit von circa Einer Tour per Secunde rotirte.

Jede vollbrachte Tour des Rades zeigte sich durch einen kurzen Hammerstreich an.

Die Dauer von 10 Touren wurde mit einer Terzenuhr gemessen und dann durch 10 dividirt. Bei dem fünften Streiche erfolgte der Schuss. Das Arrangement ist in Fig. 20 zu ersehen. Nach jedem Schusse wurde das Rad zum Stillstande gebracht, der Mittelpunkt der Laufmündung a, des dem Laufe zunächst liegenden Loches b und des in der Papierwand Z enstandenen c in eine gerade Linie gebracht und hierauf der Abstand der Mitte des Loches d von dem Punkte f, wo sich die Linie a, b, c mit dem Papierkranze schneidet, genau gemessen.

Der Umfang des Papierkranzes $= U$,
der Weg von b bis $f = s$,
die Zeit für eine Umdrehung $= t$.
das Stück $df = m$, so ist die Geschossgeschwindigkeit $v = \frac{sU}{mt}$.

Die erhaltenen Resultate sind nachstehend verzeichnet.

Tafel VI.

Ermittlung des Werthes der Grade bei der Pulverprobe.

	Ladung in Granen	Laderaum in Zollen	Ballistische Wirkung			
			Grade		Anfangsgeschwindigkeit	
			einzeln	Mittel	einzeln	Mittel
Gewehrpulver	15	0·30	31— 32— 33	32	333—358—	345
	20	0·40	66— 65— 64	65	493—504—516	506
	25	0·50	100—102—101	101	601—606—589	599
	30	0·60	138—134—134	135	662—663—660	662
	35	0·70	167—164—165	165	732—716—765	738
	40	0·80	201—202—202	202	777—783—791	784

Durch Einschaltung der Mittelglieder und Fortsetzung bis zu 270 Graden, wobei für jeden Grad über 202 hinaus, der letzte Werth von 1·2 Fuss Geschwindigkeit angenommen wurde, entstand nachstehende Tabelle für den praktischen Gebrauch:

Tafel VII.

Umwandlung der Grade in Anfangsgeschwindigkeiten für die Pulverprobe.

Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit
30	335	65	500	100	597	135	666	170	744	205	786	240	828
31	340	66	504	101	599	136	668	171	745	206	787	241	829
32	344	67	508	102	601	137	669	172	746	207	789	242	830
33	349	68	512	103	603	138	671	173	748	208	790	243	832
34	354	69	516	104	605	139	673	174	749	209	791	244	833
35	359	70	519	105	607	140	675	175	750	210	792	245	834
36	364	71	522	106	609	141	678	176	751	211	793	246	835
37	369	72	524	107	611	142	680	177	753	212	794	247	837
38	373	73	527	108	613	143	683	178	754	213	796	248	838
39	378	74	529	109	615	144	685	179	755	214	797	249	839
40	383	75	532	110	617	145	688	180	756	215	798	250	840
41	388	76	534	111	619	146	690	181	757	216	799	251	841
42	393	77	537	112	621	147	693	182	758	217	801	252	842
43	398	78	539	113	623	148	695	183	760	218	802	253	844
44	403	79	542	114	625	149	698	184	761	219	803	254	845
45	407	80	545	115	627	150	700	185	762	220	804	255	846
46	412	81	548	116	629	151	703	186	763	221	805	256	847
47	417	82	550	117	631	152	705	187	765	222	806	257	849
48	422	83	553	118	633	153	708	188	766	223	808	258	850
49	427	84	555	119	635	154	710	189	767	224	809	259	851
50	432	85	558	120	637	155	713	190	768	225	810	260	852
51	437	86	560	121	639	156	715	191	769	226	811	261	853
52	442	87	563	122	641	157	718	192	770	227	813	262	854
53	447	88	565	123	643	158	720	193	772	228	814	263	856
54	452	89	568	124	645	159	723	194	773	229	815	264	857
55	456	90	571	125	647	160	725	195	774	230	816	265	858
56	461	91	574	126	649	161	727	196	775	231	817	266	859
57	466	92	576	127	651	162	729	197	777	232	818	267	861
58	471	93	579	128	653	163	731	198	778	233	820	268	862
59	476	94	581	129	655	164	733	199	779	234	821	269	863
60	481	95	584	130	657	165	734	200	780	235	822	270	864
61	485	96	586	131	659	166	736	201	781	236	823	. .	. .
62	489	97	589	132	661	167	738	202	782	237	825	. .	. .
63	493	98	591	133	662	168	740	203	784	238	826	. .	. .
64	497	99	594	134	664	169	742	204	785	239	827	. .	. .

Es versteht sich von selbst, dass diese Tafel nur dann Giltigkeit hat, wenn das oben angegebene Geschoss- und Gesammtgewicht der zu überwältigenden Last eingehalten werden.

Durch Veränderung des Laderaumes und Schiessmittelgewichtes können unendliche Variationen hervorgebracht werden; ich glaube

jedoch die nachstehende Methode als die zweckentsprechendste, den Grössen und Gewichtsverhältnissen des Apparates angemessenste empfehlen zu dürfen.

Für gewöhnliches, aus Salpeter, Schwefel und Kohle bestehendes Schiesspulver wird der Laderaum auf 0·6 Zoll hergestellt, wofür auch der Dorn, Fig. 4, eingerichtet ist und werden 28 Gran Pulver genau abgewogen.

Es werden 3 Schüsse gemacht und deren ballistische und brisante Wirkung in Graden und Kerbenlängen notirt.

Das Mittel aus diesen 3 Resultaten mit Hilfe der Tafeln in Anfangsgeschwindigkeit und Atmosphärendruck ausgedrückt, dient zur Charakteristik des Pulvers. Z. B. findet man für

	Anfangs-geschwindigkeit	Atmosphären
Englisches Geschützpulver	432 Schuh	302
Dänisches Infanteriepulver	659 „	469
Französisches Jagdpulver	838 „	1024

Bei Pyroxilen und anderen, kräftiger als das gewöhnliche Schiesspulver wirkenden Schiessmitteln, muss vorerst durch Versuche mit ansteigenden Quantitäten und Beibehaltung desselben Laderaumes von 0·6 Zoll, diejenige Quantität ermittelt werden, die dasselbe ballistische Resultat liefert, welches diejenige Pulversorte, mit welcher man das zu prüfende Schiessmittel vergleichen will, bei der Ladung von 28 Gran geliefert hat. So z. B. liefern:

	Anfangs-geschwindigkeit	Atmosphären
28 Gran österreichisches Gewehrpulver . .	636 Schuh	448
14¼ Gran Augendre'sches Pulver	636 „	825
7 Gran Maisfaser-Pyroxil	636 „	1365

Man kann aus diesem Resultate folgern, dass bei Conservirungen des gleichen Laderaumes und auch sonstig gleicher Lademethode die Äquivalente dieser drei Schiessmittel nahezu wie 4 : 2 : 1, die brisanten Wirkungen wie 1 : 2 : 3 sich verhalten.

Nachstehend folgen die bei mehreren inländischen und ausländischen Pulversorten, dann bei den bekanntesten neuartigen Schiessmitteln aufgefundenen Resultate:

Tafel VIII.

Österreichische Pulversorten.

Pulver				Anzahl der Körner auf 1 Gran	Wagner'sche Pulverprobe		Ballistische			Brisante		
							Wirkung					
Gattung			Nr.		Grade		Grade		Anfangsgeschwindigkeit in Schuhen	Kerbenlänge		Atmosphären
					einzeln	Mittel	einzeln	Mittel		einzeln	Mittel	
Geschütz			1	22	96— 94— 95— 94	95	120—117—116	118	633	36—35—34	35	469
			2	18	72— 81— 74— 71	74	82— 85— 87	85	558	28—30—31	29 1/3	355
			3	24	66— 73— 75— 71	71	97— 87— 92	92	575	30—29—28	29	341
Musketen			4	136	113—123—125—120	120	134—130—124	130	657	36—35—35	35 1/3	476
			5	245	114—114—113—122	115	129—125—128	127	651	35—35—34	34 2/3	462
			6	324	104—105—108—107	106	117—127—125	123	643	29—30—29	29 1/3	348
Gewehr			7	71	104—105—110—101	105	115—106—110	110	617	31—28—30	29 2/3	355
			8	65	104—111—110—108	108	122—120—129	124	645	35—34—55	34 2/3	462
			9	62	111—119—114—119	116	120—118—118	119	635	34—33—34	33 2/3	441
Jagdpulver	Rundkorn	fein	10	408	141—131—136—130	134	154—162—154	157	718	35—36—36	35 2/3	483
			11	131	112—121—118—118	117	144—145—138	142	680	35—35—35	35	469
			12	1902	133—134—124—130	130	164—160—165	163	731	38—36—37	37	512
		grob	13	20	81— 85— 92— 86	86	146—147—146	146	690	36—36—37	36 1/3	498
			14	51	87—100—108— 99	98	151—156—158	155	708	36—36—36	36	491
			15	15	75— 77— 82— 74	77	125—128—128	127	651	32—33—32	32 1/3	412
	ordn. fein	Scheiben	16	412	130—136—137—141	136	163—163—165	164	733	37—36—36	36 1/3	498
			17	204	141—138—139—138	139	158—157—161	159	722	35—36—37	36	491
			18	428	137—142—145—140	141	161—159—156	159	722	37—37—36	36 2/3	505

Das Geschützpulver Nr. 1 hat eine bedenkliche Höhe der brisanten Wirkung, jedenfalls würde es bei einem Ausdauerversuche ein anderes Resultat in Beziehung der Haltbarkeit der Rohre liefern, als das Nr. 3.

Mit Ausnahme des grobrundkörnigen Jagdpulvers, zeigt die Wagner'sche Pulverprobe die ballistischen Wirkungen so ziemlich richtig an.

Tafel IX.

Ausländische Pulversorten,

Land der Erzeugung	Ort der Erzeugung	Benennung	Nummer	Anzahl der Körner auf 1 Gran	Gattung der Kohle	Ballistische Wirkung: Grade einzeln	Grade Mittel	Anfangsgeschwindigkeit	Brisante: Kerbenlänge einzeln	Kerbenlänge Mittel	Atmosphären
Frankreich	Le Bouchet	de chasse									
		fine	19	414	braun	167—157—161	162	729	43—40—42	41⅔	611
		superf. . . .	20	1426	„	210—203—202	205	786	46—44—44	44⅔	694
		extraf. . . .	21	3600	„	248	248	838	53 . . .	53	1024
England	Waldham Abbey	Gun	22	24	schwarz	52— 45— 52	50	432	28—26—27	27	302
		Musket	23	500	„	139—135 . .	137	668	35—36 . .	35½	480
		Enfield rifle . . .	24	58	„	144—142—145	144	685	39—30—39	39	555
	Privat	The diamond grained gun powder . .	25	3760	braun	232—225 . .	229	815	49—47 . .	48	811
Belgien	Wetteren	Artillerie	26	15	schwarz	80— 83— 79	81	547	27—28—27	27	302
		Infanterie	27	48	„	90— 85— 86	87	563	27—27—27	27	302
		de traite	28	105	„	69— 60— 70	66	503	26—25—24	25	265
		de chasse {Nr. 1	29	2912	braun	185—188—170	181	757	45—43—40	42⅔	633
		de chasse {Nr. 2	30	716	„	126—130—122	126	649	32—33—35	33⅓	434
Dänemark		Artillerie	31	10	schwarz	116—123—120	120	637	35—35—37	35⅔	483
		Infanterie	32	156	„	138—130—130	133	662	36—34—35	35	489
Hannover		Artillerie	33	15	schwarz	150—149—150	150	700	43—43—43	43	640

Für den Artilleristen ist das Pulver Nr. 33 interessant.

Im Jahre 1850 wurden in der k. sächsischen Giesserei zu Dresden 6 Stück Bronze-Sechspfünder für Oldenburg erzeugt, mit 2 Pfund Pulver tormentirt, und abgesendet.

In Oldenburg wurden die Rohre schon naeh wenigen Schüssen mit 1¾ Pfund Pulver über die Toleranz ausgebaucht und zeigten an der Oberfläche Risschen.

Nach genauer Untersuchung traf die Schuld das Pulver, obwohl dasselbe vorschriftmässige Dosirung und Dichte besass und keine braune Kohle enthielt.

Ein neuerzeugtes sechspfündiges Rohr hielt ohne Anstand das Beschiessen mit 2 Pfunden sächsischem Pulver aus, während nach 3 Schüssen à 1¾ Pfund mit dem Pulver Nr. 33, welches man von Walsrode in Hannover bezogen hatte, das Rohr ausgebaucht war.

Die bei diesem Pulver aufgefundene brisante Wirkung von 640 Atmosphären ist sonach als für Geschützpulver gänzlich unzulässig nachgewiesen.

Ebenso lehrreich scheinen mir die bei den Sorten Nr. 19, 20, 21, 25 und 29, welche mit brauner Kohle erzeugt sind, aufgefundenen Resultate.

Die brisante Wirkung erreicht hier 600 Atmosphären und darüber. Da nun aber diese Pulversorten bereits wegen ihren waffengefährdenden Eigenschaften für den Kriegsgebrauch als unzulässig erkannt sind, so geht daraus hervor, dass auch bei Infanteriepulver, die jetzt übliche Lademethode vorausgesetzt, die brisante Wirkung 600 Atmosphären nicht erreichen darf.

Auffällig ist die geringe Gasspannung bei dem englischen und belgischen Geschützpulver.

Aus vorhergehender Tafel spricht sich der Einfluss der Körnergrösse so auffallend aus, dass dies zu nachstehendem directen Versuche hierüber die Veranlassung gab.

Vom Geschützpulver Nr. 1 wurde das grösste Korn abgesondert, das übrige zerkleinert und sortirt, so dass 4 auffallend verschiedene Körnergrössen und endlich der Staub zu Gebote standen.

Ebenso wurden aus einem mit brauner Kohle erzeugten, für Jagdpulver bestimmten Kuchen von le Bouchet dreierlei verschiedene Körnergrössen gebildet und der Staub abgesondert.

Die Resultate sind in nachfolgender Tafel ersichtlich:

Tafel X.

Einfluss der Körnergrösse.

Pulvergattung	Nummer	Anzahl der Körner auf 1 Gran	Ballistische Wirkung			Brisante Wirkung		
			Grade		Anfangsgeschwindigkeit	in 0·01″ Kerbenlänge		Atmosphären
			einzeln	Mittel		einzeln	Mittel	
Aus dem Geschützpulver Nr. 1	34	15	102—105—101	103	603	32—32—32	32	405
	35	79	112—121—115	116	629	34—34—34	34	448
	36	647	168—174—163	168	740	42—43—40	41⅔	611
	37	1800	193—195—192	193	772	44—45—42	43⅔	662
	38	Staub	185—177—184	181	758	40—38—38	38⅔	547
Aus dem Pulverkuchen für Jagdpulver von le Bouchet	39	77	148—239—144	144	682	42—40—40	40⅔	590
	40	655	194—191—194	193	772	45—45—45	45	704
	41	1808	252—246—248	249	839	51—51—51	51	939
	42	Staub	270—275—270	272	866	56—56—54	55⅓	1123

Man sieht hieraus, dass durch weitgetriebene Zerkleinerung dem Geschützpulver eine ballistische Wirkung gegeben werden kann, welche selbst dem französischen Jagdpulver nahe steht:

Nr. 37, Tafel X, aus Geschützpulver hat 772,

Nr. 20, Tafel IX, *poudre de chasse supperfine* hat 786 Fuss Anfangsgeschwindigkeit.

Die brisante Wirkung steigt bei weitgetriebener Zerkleinerung mit der ballistischen und kann umgekehrt, durch grobes Körnen, jedoch nur auf Kosten der ballistischen Wirkung, heruntergebracht werden.

So zeigt Nr. 39, Tafel X, mit 77 Körnern per Gran mit brauner Kohle nur 590 Atmosphären und würde bei Anwendung noch grösserer Körner sicherlich noch weniger zeigen, während das aus demselben Kuchen mit 5600 Körnern per Gran angefertigte *poudre de chasse extrafine*, Nr. 21, Tafel IX, 1024 Atmosphären Gasspannung liefert.

Es folgen nun die Resultate verschiedener Schiessmittel.

Die aus den zwei Sorten Gewehrpulver Nr. 8 und 9 erhaltene mittlere ballistische Wirkung von 121 Graden oder 636 Fuss Anfangsgeschwindigkeit ist hier zu Grunde gelegt, indem die Quantitäten der anderen Schiessmittel so gewählt sind, dass ebenfalls nahezu 121 Grade erreicht wurden.

Auch das französische Jagdpulver Nr. 20, das belgische Nr. 29 und der Staub aus französischem Jagdpulverkuchen Nr. 42 sind mit eingereiht worden, um deren relative bisante Wirkung kennen zu lernen.

Tafel XI.

Verschiedenartige Schiessmittel.

Schiessmittel	Nr.	Ladung in Grazen	Ballistische Wirkung: Grade einzeln	Grade Mitt.	Anfangsgeschwindigkeit	Brisante Wirkung: in 0·01″ Kerbenlänge einzeln	in 0·01″ Kerbenlänge Mitt.	Atmosphären
Österreichisches Gewehrpulver	8+9	28	. . . . .	121	639	. . . . .	34½	458
Französisches Jagdpulver . .	20	22	119—120—126	122	641	40—41—41	40⅔	590
Belgisches Jagdpulver	29	23	122—125—117	121	639	40—41—40	40⅓	582
Staub von französischem Jagdpulver	42	19	120—119—124	121	639	45—45—46	45⅓	715
Augendre'sches Pulver	43	14¼	125—120—117	121	639	47—50—49	48⅔	839
Schiesspapier, auch Gaspulver genannt . . .	44	19	124—113—119	119	635	36—32—34	34	448
Jagdpulver, versetzt mit 50% Knallquecksilber	45	16¼	117—123—120	120	637	62—64—63	63	1451
Schultze'sches Pulver	46	8½	122—116—124	121	639	51—51—54	53	1024
Explosives Stärkmehl	47	7¾	115—127—119	120	637	50—51—51	50⅔	924
Pyroxil aus Holzpulver .	48	7¼	119—127—118	121	639	57—58—56	57	1195
Pyroxil aus Maisfaser . .	49	7	122—124—116	121	639	62—61—60	61	1365
Pyroxil aus Flachswolle .	50	6½	113—126—116	120	637	71—67—71	69⅔	1735
Pyroxil aus Baumwolle .	51	6¾	125—123—116	121	639	70—71—74	71⅔	1820

Reines trockenes Knallquecksilber, in steigenden Ladungen versucht, gab nachstehendes Resultat:

12 Gran Knallquecksilber,

540 Schuh Geschwindigkeit,

1800 Atmosphären. Der Lauf unversehrt.

16 Gran Knallquecksilber,

565 Schuh Geschwindigkeit,

2300 Atmosphären. Nebstdem wurde der Lauf ringförmig ausgebaucht und der über den Lauf hervorragende Theil des Pistons abgerissen.

18 Gran Knallquecksilber,

625 Schuh Geschwindigkeit; die brisante Wirkung war nur theilweise angezeigt, da der cylindrische Schaft des Meissels gebogen und unbeweglich im Laufe eingeklemmt wurde.

Überdies hatte der Lauf im Innern ringförmige und die obere Fläche des Meissels solche Eindrücke, als ob mit einem stumpfen Instrumente darauf geschlagen worden wäre.

Bei 18¼ Gran erhielt der Lauf zwei Risse im untersten Theile ohne ein Aufbiegen des zerrissenen Theiles.

Die in Tafel XI verzeichneten, die Äquivalente der verschiedenartigen Schiessmittel repräsentirenden Ladungen, verbunden mit den relativen brisanten Wirkungen, geben nach wenigen Schüssen Anhaltspunkte für die Beurtheilung neuer Schiessmittel, welche weder aus der chemischen Zusammensetzung derselben erschlossen, noch selbst durch das Schiessen nach der Scheibe, wenigstens nicht in kurzer Zeit, gewonnen werden können.

Wie viele Gewehre mussten verdorben und wie viele Schüsse aus Bronzekanonen gemacht werden, um zu constatiren, dass das mit brauner Kohle erzeugte Pulver eine grössere brisante Wirkung habe!

Das Augendre'sche Pulver, ein Gemenge aus chlorsaurem Kali, Kaliumeisencyanür und Zucker war bereits als sprengend bekannt, als das Schiesspapier auftauchte. Letzteres besteht aus Löschpapier, welches durch eine heisse concentrirte Lösung von chlorsaurem Kali und Salpeter, in welche etwas Holzkohlenpulver eingerührt ist, durchgezogen und sodann in halbtrockenem Zustande zu Cylindern von dem Kaliber des Gewehres aufgerollt wird.

Der Gehalt an chlorsaurem Kali liess auf eine starke brisante Wirkung schliessen und doch zeigt die Pulverprobe, dass dieses Schiessmittel nicht mehr brisant, als gewöhnliches Schiesspulver ist.

Das dem Instrumente zu Grunde gelegte Princip schien mir ganz geeignet, um es auch zur Prüfung von Laufconstructionen, Lademethoden u. s. w. anzuwenden.

Es liess sich hoffen, dass durch einen solchen Apparat, welcher nebst den Angaben des ballistischen Pendels noch die Maxima der Gasspannung anzeigt, der überdies mit Leichtigkeit gehandhabt und in jedem Zimmer aufgestellt werden kann, ein Mittel geschaffen werde, welches zur Auffindung vieler werthvoller praktischer und zur Grundlage theoretischer Forschungen geeigneter Daten dienen kann.

Es entstand so die Modification der Pulverprobe.

b) Der ballistische Apparat.

Derselbe ist in Fig. 21 abgebildet und wird aus der Pulverprobe hergestellt, indem man die Tragsäule des Stativs *B* durch das Einsatzstück *m* verlängert und den beweglichen Arm *g*, Fig. 8, sammt Receptor der Pulverprobe gegen einen stärker construirten Arm *d* und Receptor, Fig. 22, umgewechselt, für welchen letzteren auch ein schwererer Bleikegel, dessen Erzeugung ganz so, wie bei dem zur Pulverprobe gehörigen bewirkt wird, zu wählen ist.

Das Gewicht des grossen Receptors beträgt 4·476 Pfund, das Gewicht des grossen Bleikonus 2·75 Pfund und das Totalgewicht der von dem Geschosse zu überwältigenden Last bei horizontaler Stellung von $d = 9{\cdot}716$ Pfunden.

Die Höhe des Apparates lässt das Einsetzen eines normalen Infanterie-Gewehrlaufes zu.

Der Lauf braucht nur beim Zündloche und dann oben so abgeschnitten zu werden, dass seine Länge 35 Zoll beträgt, mit der cylindrischen Bohrung zur Aufnahme des Meisselschaftes versehen und an den zwei Stellen der Oberfläche, welche in die Lager der Arme *b* und *c* zu liegen kommen, cylindrisch abgedreht zu werden.

Das Laden kann entweder so geschehen, dass man zuerst den Meissel einsetzt und mit der Stellschraube feststellt, dann das Schiessmittel von oben einträgt und das Geschoss mit dem Ladestocke darauf setzt, oder das Geschoss kann von rückwärts so eingeschoben

werden, dass ein bestimmter Laderaum entsteht, worauf dann das Schiessmittel ebenfalls von rückwärts und darauf der Meissel einzubringen kommt.

Derselbe Meissel, dieselben Bronzeplatten treten hier in Verwendung, wie bei der Pulverprobe.

Auch die Abfeuerung und das Ablesen der brisanten und ballistischen Wirkung geschieht auf dieselbe Art, nur haben die Grade hier einen anderen Werth.

Die Bestimmung dieses Werthes geschah ebenso wie bei der Pulverprobe. Es wurden 9 Serien zu drei Schüssen auf dem ballistischen Apparate und dieselben 9 Serien in horizontaler Lage des Apparates auf das Schwungrad abgefeuert. Die erhaltenen Resultate sind nachstehend verzeichnet:

Tafel XII.

Ermittlung des Werthes der Grade des ballistischen Apparates.

Ladung in Granen		Laderaum in Zollen	Ballistische Wirkung			
			Grade		Anfangsgeschwindigkeiten	
			einzeln	Mittel	einzeln	Mittel
Gewehrpulver	20	0·40	25— 27— 26	26	645— 670— 648	654
	25	0·50	35— 27— 36	36	736— 769— 773	759
	30	0·60	49— 50— 49	49	860— 863— 886	869
	35	0·70	62— 61— 62	62	970— 953— 995	973
	40	0·80	71— 69— 72	71	1061—1061—1038	1053
	45	0·90	84— 84— 84	84	1104—1108—1077	1096
	50	1·00	94— 97— 95	95	1129—1147—1160	1145
	60	1·20	127—130—128	128	1257—1297—1275	1276
	70	1·40	154—157—156	156	1409—1424—1395	1409

Schaltet man bei Graden und Geschwindigkeiten Mittelglieder ein, so entsteht folgende:

Tafel XIII.

Umwandlung der Grade in Anfangsgeschwindigkeit für den ballistischen Apparat.

Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Grade	Anfangsgeschwindigkeit
20	600	43	818	66	1009	89	1118	112	1213	135	1308	158	1414		
21	609	44	827	67	1018	90	1122	113	1217	136	1312	159	1418		
22	618	45	835	68	1026	91	1127	114	1221	137	1317	160	1423		
23	627	46	843	69	1035	92	1131	115	1225	138	1321	161	1428		
24	636	47	852	70	1044	93	1136	116	1229	139	1326	162	1432		
25	644	48	860	71	1048	94	1140	117	1233	140	1331	163	1437		
26	654	49	869	72	1053	95	1145	118	1237	141	1336	164	1441		
27	664	50	877	73	1057	96	1149	119	1241	142	1340	165	1446		
28	675	51	885	74	1062	97	1153	120	1245	143	1345	166	1451		
29	685	52	893	75	1066	98	1157	121	1249	144	1349	167	1455		
30	696	53	901	76	1069	99	1161	122	1253	145	1354	168	1460		
31	707	54	909	77	1073	100	1165	123	1257	146	1359	169	1464		
32	717	55	917	78	1076	101	1169	124	1261	147	1363	170	1469		
33	728	56	925	79	1080	102	1173	125	1265	148	1368	171	1474		
34	738	57	933	80	1083	103	1177	126	1269	149	1372	172	1478		
35	749	58	941	81	1086	104	1181	127	1273	150	1377	173	1483		
36	758	59	949	82	1090	105	1185	128	1277	151	1382	174	1487		
37	767	60	957	83	1093	106	1189	129	1281	152	1386	175	1492		
38	775	61	966	84	1097	107	1193	130	1285	153	1391	176	1497		
39	784	62	974	85	1100	108	1197	131	1290	154	1395	177	1501		
40	793	63	983	86	1104	109	1201	132	1294	155	1400	178	1506		
41	801	64	991	87	1109	110	1205	133	1299	156	1405	179	1510		
42	810	65	1000	88	1113	111	1209	134	1303	157	1409	180	1515		

Als Beispiele für die Anwendung des ballistischen Apparates folgen nachstehende Versuchsresultate:

Tafel XIV.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlauf mit Pulver.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt, kräftig angesetzt.

Gewehrpulver	Grane	Laderaum	Ballistische Wirkung: Grade einzeln	Grade Mittel	Anfangsgeschwindigkeit	Brisante Wirkung: Kerbenlänge in 0·01 Zoll einzeln	Kerbenlänge Mittel	Atmosphären
	30	0·40	43— 39— 37	40	793	27—24—24	25	265
	35	0·47	47— 48— 42	46	843	33—28—33	31⅓	391
	40	0·55	60— 54— 56	57	933	39—44—39	40⅔	590
	45	0·65	73— 72— 69	71	1048	44—44—43	43⅔	662
	50	0·70	83— 83— 82	83	1088	48—47—51	48⅔	839
	55	0·75	94— 92— 94	93	1129	50—47—50	49	853
	60	0·81	104—106— 97	102	1169	49—48—49	48⅔	839
	70	0·95	128—129—119	125	1265	46—55—56	52⅓	995
	80	1·10	155—152—149	149	1372	55—59—52	54⅓	1081
	90	1·25	. . . . .	. .	. . . .	56—55—54	55	1109
	100	1·55	. . . . .	. .	. . . .	48—47—55	50	896
	110	1·72	. . . . .	. .	. . . .	46—46—51	47⅔	782
	Spreng-Ladungen.							
	2 normale Schüsse à 55 Gran Pulver und ein Geschoss übereinander					55—57—57	56⅓	1166
	55	0·75	2 Geschosse angesetzt . . .			68—58—58	61⅓	1380
	55	0·75	3 „ „ . . .			59—71—60	63⅓	1465
	55	0·75	4 Geschosse angesetzt . . .			Der Lauf zerrissen		

Die brisanten Wirkungen gehen schon von 50 Gran Pulverladung angefangen nicht mehr im Verhältnisse mit den Anfangsgeschwindigkeiten aufwärts, sondern schwanken zwischen 850 und 1100 Atmosphären auf und ab.

Eine doppelte Pulverladung, wie auch zwei Schüsse übereinander, bringen keine besondere Sprengwirkung hervor; ausgiebiger ist die Anzahl der Geschosse.

Bei dem letzten Schusse erhielt der Lauf einen 6 Zoll langen, 0·75 Zoll klaffenden Riss. Der Meissel war so fest eingeklemmt, dass er nur schwach wirken konnte; die 4 Bleigeschosse steckten 19 Zoll hoch im Laufe so fest, dass sie nur durch gewaltige Hammerstreiche entfernt werden konnten.

Um zu erfahren, welchen Einfluss ein grosser Laderaum auf den ballitischen und brisanten Effect ausübt, wurde vergleichsweise mit Gewehrpulver und Schiesswolle bei einem gleich bleibenden 2·5 Zoll langen Laderaume geschossen und nachfolgendes Resultat erhalten:

Tafel XV.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlauf mit Pulver.

Laderaum 2·5 Zoll, das Geschoss in Fettpapier, von rückwärts eingeschoben.

	Grane	Ballistische Wirkung			Brisante Wirkung		
		Grade		Anfangsgeschwindigkeit	Kerbenlänge in 0·01 Zoll		Atmosphäre
		einzeln	Mittel		einzeln	Mittel	
Gewehrpulver	20	21 — 24 — 22	22	618	13—14—13	13 1/3	130
	25	29 — 30 — 29	29	686	18—18—18	18	168
	30	35 — 33 — 36	35	749	21—21—21	21	192
	35	42 — 40 — 41	41	801	24—23—23	23 1/3	228
	40	47 — 49 — 46	47	851	25—25—25	25	265
	45	59 — 55 — 58	57	933	29—28—28	28 1/3	327
	50	65 — 65 — 67	66	1009	28—29—29	28 2/3	334
	55	78 — 75 — 76	76	1073	33—33—30	32	405
	60	87 — 86 — 84	86	1104	34—33—33	33 1/3	434
	65	96—100 — 98	98	1157	34—37—34	35	469
	70	102—106—107	105	1185	36—41—44	40 1/3	583
	80	130—135—133	133	1299	44—44—45	44 1/3	683
	90	150—154—158	156	1405	43—42—42	42 1/3	626
	100	175—177—177	176	1497	42—43—45	43 1/3	651
	110	. . . . .	. . .	. . .	44—45—45	44 2/3	694

Auch bei dieser Lademethode zeigt sich, dass die Gasspannungen über ein gewisses Pulverquantum hinaus beinahe in Stillstand kommen, während die Geschossgeschwindigkeiten fortwährend zunehmen.

Die Gasspannungen sind im Vergleiche zu den mit gewöhnlicher Lademethode erhaltenen, in Tafel XIV. verzeichneten, bedeutend kleiner.

So z. B. gibt der normale Schuss mit 55 Gran Pulver und angesetzter Kugel = 1147 Fuss Geschwindigkeit und 853 Atmosphären Gasspannung, während bei 2·5 Zoll Laderaum selbst die doppelte Pulverladung von 110 Gran erst 700 Atmosphären Gasspannung, dafür aber eine Anfangsgeschwindigkeit von über 1500 Fuss hervorbringt.

Es lässt sich erwarten, dass der Rückstoss, dem sanfteren Anschwellen der Gasspannung entsprechend, zwar bei grösseren Anfangsgeschwindigkeiten grösser sein, das heisst, einen grösseren Rücklauf bei Geschützen verursachen wird; er wird aber dem kleineren Maximum der Gasspannung entsprechend weniger zerstörend auf die Laffete einwirken.

Ich würde die Grenzen meiner gestellten Aufgabe überschreiten, wollte ich mich hier weiter einlassen, glaube aber doch auf die versuchsweise Anwendung dieser Lademethode bei gusseisernen Geschützrohren aufmerksam machen zu müssen.

Sowie den *cartuches allongées* eine Schonung der Rohre ohne Beeinträchtigung der Portée zu verdanken ist, so dürfte es auf diesem Wege möglich sein, ohne Gefährdung der Bedienungsmannschaft, aus gusseisernen Rohren Geschossgeschwindigkeiten zu erreichen, welche zum Durchschiessen der Panzerplatten hinreichen.

Es folgen nun die Resultate, welche bei demselben Laderaume mit Schiesswolle erhalten wurden.

Ein Drittel des Pulvergewichtes an Schiesswolle bringt bei dieser Lademethode nahezu gleiche ballistische Wirkung mit dem Pulver hervor.

Die gesponnene Schiesswolle wurde, durch Aufwickeln um einige der Länge nach gelegte Stücke, zu Würsten von der Länge des Laderaumes geformt.

Tafel XVI.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlauf mit Schiesswolle.

Laderaum 2·5 Zoll, das Geschoss in Fettpapier, von rückwärts eingeschoben.

	Grane	Ballistische Wirkung			Brisante Wirkung		
		Grade		Anfangsgeschwindigkeit	Kerbenlänge in 0·01 Zoll		Atmosphären
		einzeln	Mittel		einzeln	Mittel	
Schiesswolle	6·7	19— 18— 20	19	590	22—22—22	22	200
	8·3	24— 30— 27	27	654	28—31—30	29⅔	355
	10	32— 35— 34	34	739	32—33—33	32⅔	419
	11·7	40— 41— 41	41	803	35—35—36	35⅔	483
	13·3	50— 51— 50	50	877	43—46—45	44⅔	694
	15	60— 59— 59	59	949	50—49—50	49⅔	881
	16·7	67— 67— 69	68	1026	53—53—53	53	1024
	18·3	77— 77— 79	78	1076	57—59—59	58⅓	1251
	20	89— 82— 89	87	1108	67—64—67	66	1579
	21·7	93—106—103	100	1165	72—72—74	72⅔	1863
	23·3	107—108—103	106	1189	76—78—79	77⅔	2155
	26·7	133—123—138	131	1290	83—83—87	84⅓	2582
	30	168—169—168	168	1460	92—87—87	88⅔	2860

Die brisante Wirkung bleibt hier nicht auf einer bestimmten Höhe stehen, sondern wächst im Gegentheile rascher als die Geschossgeschwindigkeiten.

Nimmt man die normale Geschossgeschwindigkeit zwischen 1100 und 1200 Schuh zur Basis, so ergibt sich folgender Vergleich für die drei Schussarten:

Schiessmittel		Anfangsgeschwindigkeit	Atmosphären
Pulver	55 Gran, Geschoss angesetzt	1129	853
	65 „ 2·5 Zoll Laderaum	1157	469
Schiesswolle	21·7 Gran, 2·5 Zoll Laderaum	1165	1863

In Fig. 23 sind die, bei diesen drei Schussarten erhaltenen ballistischen und brisanten Wirkungen graphisch dargestellt.

Da sich durch Vergrösserung des Laderaumes die brisante Wirkung vermindern und durch Vergrösserung der Ladung die Geschossgeschwindigkeit steigern lässt, so schien es mir interessant, zu versuchen, ob sich eine bestimmte Geschossgeschwindigkeit und Gasspannung auch mit stark brisant wirkenden Schiessmitteln erreichen lasse, wenn die geeignete Quantität und der entsprechende Laderaum angewendet wird.

Der Versuch wurde mit einem neu hergerichteten Infanterie-Gewehrlaufe und Schiesswolle in der Weise ausgeführt, dass die Laderäume im ansteigenden Verhältnisse durch das Einschieben des in Fettpapier gewickelten Geschosses von rückwärts genau hergestellt und die gesponnene Schiesswolle durch Aufwickeln zu einer Patrone geformt war, welche die Länge des Laderaumes hatte.

Als Basis diente die aus diesem Laufe durch den normalen Infanterieschuss mit 55 Gran Gewehrpulver und angesetztem, in Fettpapier gewickeltem Geschosse hervorgebrachte ballistische und brisante Wirkung, welche im Mittel aus drei Schüssen 1153 Fuss Anfangsgeschwindigkeit und 853 Atmosphären betrug.

Tafel XVII.

Gleichzeitige Vergrösserung von Laderaum und Ladung, bis normale Geschwindigkeit und Gasspannung eintritt.

Schiesswolle	Grane	Laderaum in Zollen	Ballistische Wirkung			Brisante Wirkung		
			Grade einzeln	Grade Mittel	Anfangsgeschwindigkeit	Kerbenlänge einzeln	Kerbenlänge Mittel	Atmosphären
	19·5	1·5	98— 98—96	97	1153	78—80—82	80	2304
	20	2	97— 96—99	97	1153	78—74—78	76⅔	2090
	22	3	100— 92—98	97	1153	69—66—67	67⅓	1635
	24·5	4	97— 94—98	96	1149	58—64—63	61⅔	1393
	26·5	5	95—100—97	97	1153	60 - 60—56	58⅓	1265
	28·5	6	97— 96—98	97	1153	53—51— 51	15⅔	967
	29·5	6·5	97— 99—94	97	1153	50—48—50	49⅓	867

Man sieht heraus, dass man auch mit Schiesswolle aus dem Infanterielaufe eben so scharf und ohne grössere Sprengwirkung schiessen kann, wie mit Pulver, wenn man beinahe den neunfachen Laderaum und etwas mehr, als das halbe Gewicht des Pulvers an Schiesswolle anwendet.

Eben auf diese Art liesse sich für jedes Schiessmittel Laderaum und Gewicht ermitteln.

Welchen Einfluss die Länge des Laufes auf die Geschossgeschwindigkeit ausübt, oder, was dasselbe ist, nach welchem Gesetze die Geschwindigkeit beim Fortschreiten des Geschosses im Laufe wächst und gleichzeitig, wie weit das Geschoss vorgeschoben wird, bis das Maximum der Gasspannung am Boden eintritt, zeigt nachstehender Versuch:

Es wurden aus einem Infanterie-Gewehrlaufe 3 Serien à 3 Schüsse gemacht; die erste Serie I mit 55 Gran Gewehrpulver und angesetzter Kugel, also mit 0·75 Zoll Laderaum; die zweite Serie II mit 65 Gran Gewehrpulver und 2·5 Zoll Laderaum; die dritte Serie III mit 21 Gran Schiesswolle und 2·5 Zoll Laderaum. Sämmtliche drei Lademethoden lieferten bei dem normalen Laufe von 63 Kaliber Länge gleiche Anfangsgeschwindigkeiten.

Hierauf wurde der Lauf um ein Stück abgeschnitten und das Schiessen der 3 Serien unter Beobachtung der erhaltenen ballistischen und brisanten Wirkungen wiederholt, und sollte in dieser Weise so lange fortgefahren werden, bis durch eine constante Abnahme der Gasspannungen sich jener Punkt anzeigte, bis zu welchem das Maximum sich erstreckt.

Da jedoch, als der Lauf auf 10 Kaliber Seelenlänge verkürzt worden war, noch immer keine bleibende Abnahme der Gasspannungen eintrat und die Geschosse anfingen durch ihr unregelmässiges Einschlagen in den Receptor das fernere Messen der Geschwindigkeiten zu vereiteln, so musste der Versuch bei dieser Lauflänge abgebrochen und entsprechende Einrichtungen getroffen werden, um mit noch kürzeren Lauflängen weiter schiessen zu können.

Die Resultate des ersten Theiles zeigt nachstehende Tafel.

Tafel XVIII.

Schiessen mit verschiedenen Lauflängen.

Serie	I.				II.				III.			
Länge des Laufes in	Gewehrpulver								Schiesswolle			
	55 Gran				65 Gran				21 Gran			
	Laderaum 0·75 Zoll				Laderaum 3·5 Zoll							
Kalibern à 4·054 Zoll	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Kerbelänge	Atmosphären	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Kerbelänge	Atmosphären	Grade	Anfangsgeschwindigkeit	Kerbelänge	Atmosphären
63	94	1140	49	853	93	1136	30	363	95	1145	71	1792
55	77	1073	46	736	70	1044	31	384	89	1118	69	1707
50	73	1057	44	672	63	983	27	302	84	1097	69	1707
45	73	1057	47	768	61	966	27	302	78	1076	68	1664
40	63	983	47	768	52	893	31	384	84	1097	74	1920
35	61	966	46	736	50	877	31	383	77	1073	74	1920
30	54	909	44	672	41	801	31	383	70	1044	72	1835
25	55	917	45	704	37	767	31	383	66	1009	72	1835
20	50	877	41	597	34	738	31	383	66	1009	74	1920
15	47	852	47	768	23	627	31	383	53	901	72	1835
10	27	664	41	597	9	500	30	363	35	749	72	1835

Fig. 24 gewährt eine Übersicht dieser Resultate.

Bei der Bohrungslänge von 10 Kalibern = 5·4 Zoll erreichte das Geschoss bei der Lademethode I, 664, bei II, 500, bei III, 749 Fuss Geschwindigkeit, welche sich von hier an bis zur Mündung bei allen drei Methoden auf 1140 Fuss, also bei I noch um 476, bei II um 640 und bei III um 391 Fuss steigert.

Man sieht hieraus, dass bei III hauptsächlich der erste Stoss, bei II hingegen hauptsächlich die Nachwirkung während der Bewegung des Geschosses im Laufe wirksam ist.

Am sanftesten und gleichmässigsten schwillt die Geschossgeschindigkeit bei II an. Bei den Lademethoden I und III scheint dieses Anschwellen und mithin auch das Fortschreiten des Geschosses im Laufe stossweise zu geschehen.

Die Gasspannungen schwanken bei I zwischen 600 und 850, bei III zwischen 1700 und 1900 Atmosphären auf und ab, bei II sind sie auffallend gleichförmiger und liegen zwischen 300 und 380 Atmospären.

Es wurde hierauf der Lauf auf 9, 8 und 7 Kaliberlängen abgeschnitten.

Die Maxima der Gasspannungen hielten sich fortwährend innerhalb der oben angegebenen Grenzen.

Um den Punkt, wo das Maximum des Bodendruckes eintritt, nicht zu übersehen, wurde von jetzt an der Lauf jedesmal nur um 0·05 Zoll verkürzt.

Noch bei der Bohrungslänge von 3·25 Zoll, wo das Geschoss bei den Lademethoden II und III 0·75 Zoll Weg zu machen hat, waren sämmtliche Maxima unverändert; erst bei der Bohrungslänge von 3·20 Zoll, wo der Weg des Geschosses 0·70 Zoll beträgt, fiel bei II die Gasspannung auf 247 und bei weiterer Verkürzung des Laufes um 0·05 Zoll auf 176 Atmosphären.

Bei der Lademethode III trat die letzte normale Gasspannung ein, als das Geschoss noch 0·25 Zoll Weg zu machen hatte: sie betrug 1792 Atmosphären, bei 0·20 Zoll Weg des Geschosses nur mehr 1451 und bei 0·15 Zoll 448 Atmosphären.

Bei der Methode I wurde die letzte normale Gasspannung bei 0·15 Zoll Weg der Kugel mit 597 Atmosphären beobachtet, bei 0·10 Zoll Weg der Kugel zeigten sich noch 555 und bei 0·05 Zoll 448 Atmosphären.

Es ergibt sich hieraus, dass das Maximum des Bodendruckes eintritt, bei der Lademethode

I,	55	Gran	Pulver,	0·75	Zoll	Laderaum,	bei	0·15	Zoll
II,	65	„	„	2·50	„	„	„	0·75	„
III,	21	„	„	2·50	„	„	„	0·25	„

} zurückgelegten Weg des Geschosses.

In Fig. 25 sind die geladenen Laufstücke in jenen Längen abgebildet, wo sie das letzte Mal das Maximum der Gasspannung lieferten.

Auch folgender Versuch dürfte noch einiges Interesse bieten: Ein Stück Flintenlauf wurde im unteren Theile mit dem genau eingepassten Meissel und einem normalen Piston von 0·05 Zoll Bohrungsdurchmesser versehen. Die Mündung desselben aber durch eine schmiedeeiserne Schraube verschlossen, so wie dies Fig. 26 zeigt.

Der leere Raum betrug 1·242 Kubikzoll und fasste 300 Gran Gewehrpulver.

In diesem Laufe wurden nun verschiedene Pulver und Schiesswollquantitäten entzündet und die Gasspannungen beobachtet.

Der Meissel liess bei den schwächeren Ladungen ohnehin fast kein Gas entweichen und wurde bei den stärkeren Ladungen durch eine 0·05 Zoll dicke aufgepresste Scheibe von Blei gedichtet, so dass für das Entweichen der Pulvergase nur das Zündloch übrig blieb.

Die Gasspannungen verhielten sich wie folgt:

Tafel XIX.

Gasspannungen im geschlossenen Laufe.

Gewehrpulver				Schiesswolle			
Gran	Kerbenlänge einzeln	Kerbenlänge Mittel	Atmosphären	Gran	Kerbenlänge einzeln	Kerbenlänge Mittel	Atmosphären
10	13 —13 —13	13	128	2·5	10—12—11	11	112
20	22 —22 —22	22	200	5	19—20—21	20	184
30	27 —27 —27	27	302	7·5	25—27—23	25	265
40	31 —31 —31	31	384	10	31—31—29	30	363
50	36 —36 —36	36	491	12·5	33—31—35	33	427
60	38 —38 —38	38	533	15	37—39—38	38	533
70	40·5—40·5—40·5	40·5	586	17·5	44—40—42	42	619
80	43 —43 —43	43	640	20	49—46—43	46	736
90	48 —48 —48	48	811	22·5	51—53—52	52	981
100	51·5—51·5—51·5	51·5	960	25	53—64—56	57⅔	1223
110	54 —54 —54	54	1067	27·5	78—64—71	71	1792
120	58 —58 —58	58	1237	30	86—78—82	82	2432

Auffallend ist die Übereinstimmung in der Sprengwirkung, welche bei gleichen Pulverladungen stattfindet.

Bei gleichen Schiesswoll-Ladungen ist dies nicht der Fall, woraus man auf ein ungleichförmiges Verbrennen schliessen muss.

Die Gasspannungen steigen beim Pulver beinahe proportional mit den Ladungen, bei der Schiesswolle ist diess auch bis zu 20 Gran Ladung der Fall, von hier an steigen sie aber bedeutend rascher.

Unter 800 Atmosphären Gasspannung war noch kein Ausbrennen des Pistons, weder bei Schiesswolle, noch bei Pulver zu bemerken, während bei Gasspannungen über 1000 Atmosphären jeder Schuss einen Zuwachs in der Erweiterung des Zündloches verursachte, und bei den Spannungen über 1200 Atmosphären, wo dann die Dichtung mit dem Bleibleche nicht mehr ganz ausreicht, auch das Anfressen der scharfen Ränder des Meisselschaftes eintrat, so dass hiedurch dem Versuche seine Grenzen gesetzt wurden.

Vergleicht man die Rumford'schen Gasspannungen mit den im geschlossenen Flintenlauf mit Zündloch gefundenen, so ergibt sich, dass der Verlust durch das Zündloch bei hohen Spannungen bedeutend ist. Es wurden gefunden:

Bei der Pulverladung von	0·3,	0·4 des Raumes,	
im ganz geschlossenen Raume			
nach Rumford	1060,	2000	Atmosphären.
im Flintenlauf mit Piston	811,	1237	

c) Bestimmung der brisanten Wirkung beim Schiessen aus Geschützrohren.

Obwohl sich nach Vorhergehendem ohnehin jeder Artillerist in der Anwendung des krummen Meissels bei Geschützrohren zurecht finden würde, so will ich doch nicht unterlassen, ein Arrangement anzugeben, welches bei Hinterladungsrohren bereits erprobt ist, und ein zweites, welches ich für Vorderladungsrohre geeignet halte.

Das erstere ist aus Fig. 27 zu ersehen.

Der Verschlusskolben eines Hinterladungs-Zwölfpfünders wurde um die Länge des Meisselschaftes 1·1 Zoll abgekürzt und dieser Theil durch eine aufgeschraubte Stahlplatte ersetzt, welche sehr fleissig in die Bohrung des Rohres passte.

In der Axe der Platte befand sich ein cylindrisches Loch zur Aufnahme des Meisselschaftes *a;* ebenso war auch der zunächst der Stahlplatte befindliche Theil des Verschlusskolbens cylindrisch durchbrochen, um die kreisförmig geschnittene Bronzeplatte *b* und die ihr als Unterlage dienende, nach der Oberfläche des Querriegels *R* ausgehöhlte Stahlplatte *c* aufzunehmen.

Der Pappspiegel war in der Mitte durchlocht, um den Pulvergasen ungehinderten Zutritt zur vorderen Meisselfläche zu lassen.

Nach dem Schusse und nachdem Querriegel und Verschlusskolben aus dem Rohre gezogen waren, konnten die Unterlage *c*, die Bronzeplatte *b* und auch der Meissel anstandslos nach rückwärts herausgenommen werden.

Es wurde aus dem zwölfpfündigen Hinterladungsrohre zuerst ein blinder Schuss mit 1·97 Pfund Pulver und einem Strohvorschlage gemacht; dieser brachte eine Kerbe von 0·28 Zoll Länge hervor, welche einer Gasspannung von 320 Atmosphären entspricht.

Hierauf folgten drei scharfe Schüsse mit 1·97 Pfund Pulver und einem 30 Pfund schweren Projectile, wovon der erste 1320, der zweite 1370 und der dritte wieder 1320 Atmosphären Gasspannung anzeigte.

Für Feldgeschütze und überhaupt für Vorderladungsrohre würde ich die in Fig. 28 abgebildete Einrichtung geeignet halten, *a* Meissel, *b* Bronzeplatte, *c* stählerne Unterlage für die Bronzeplatte; dieselbe hat 2 Längsleisten *m*, *n*, für welche im Rohre entsprechende Nuten ausgestossen sind, und welche das Verdrehen von *c* verhindern, dann am hinteren Theile eine cylindrische mit Schraubengewinden versehene Höhlung, in welche eine Handhabe einzuschrauben ist, um *c* einzusetzen und herauszunehmen.

Damit sich diese Unterlage nicht durch den Pulverrückstand festkittet, ist sie locker einzupassen.

Mittelst der Verschlussschraube *d* wird *c* schwach an den vor selbem befindlichen Absatz angedrückt, wobei jedoch die Bronzeplatte noch keinen Druck gegen den Meissel erfahren darf.

Da Niemand leugnen wird, dass jene Lademethode die vortheilhafteste ist, welche bei der grösstmöglichsten ballistischen die kleinste brisante Wirkung hervorbringt und bei allen bisherigen Versuchen wegen Mangel eines einfachen geeigneten Mittels zum Messen der Gasspannungen hauptsächlich nur die ballistische Wirkung zur Richtschnur bei Einrichtung der Lademethoden dienen konnte, so hege ich die Hoffnung, dass in Zukunft die in Vorhergehendem angegebene Methode zur Ermittlung von Ladung und Laderaum mit Nutzen in der Artillerie Anwendung finden werde.

Die nachfolgend verzeichneten, mit dem ballistischen Apparate erhaltenen Resultate halte ich für geeignet, um eine noch gründlichere Einsicht in die bei verschiedenen Lademethoden entstehen-

den Sprengwirkungen zu gewähren, als dies durch die früheren Angaben möglich war, wesshalb ich mich der Hoffnung hingebe, dass die Mittheilung derselben einiges Interesse darbieten werde.

Bei deren Aufzählung werde ich denselben Gang befolgen, welcher in der That stattgefunden hat, weil es so am ersichtlichsten wird, wie jedes Experiment durch das vorhergehende hervorgerufen worden ist.

In dem früheren Aufsatze ist die Hohlladung als vortheilhaft dargestellt, weil sie durch sanfteres Heben des Geschosses und gleichmässigeres Ansteigen der Geschossgeschwindigkeit im Laufe, gleichförmigere Schüsse hervorbringt, und bei gleicher ballistischer Wirkung eine geringere Sprengwirkung auf den Lauf ausübt, als die gewöhnliche Lademethode.

Dieser Ansicht trat die unter Jägern allgemein verbreitete Meinung, dass Hohlladungen sprengend auf den Lauf wirken, entgegen. Es schien desshalb lohnend, aufzusuchen, in wie weit diese, auf praktische Erfahrung gegründete Meinung Berechtigung habe.

Ein Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit 50 Gran Pulver und Anwendung von $2^1/_2$, 5, 10, 15, 20, 25 und 30 Zoll Länge des Laderaumes gab keinen Aufschluss. Die Anfangsgeschwindigkeiten fielen von 1070 bis unter 600 Fuss, der Gasdruck auf den Stossboden fiel von 290 bis auf 125 Atmosphären. Die Differenzen unter 3 gleichartigen Schüssen waren nicht grösser als sonst.

Ich versuchte hierauf die Pulverladung von 100 Gran, welche für die grossen Laderäume angemessener erschien, und erhielt folgende Resultate.

Tafel XX.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit grossen Hohlladungen.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt, von rückwärts eingeschoben.

Pulver- Gattung	Pulver- Gewicht in Gran	Laderaum in Zoll	Ballistische Wirkung: Grade einzeln	Grade Mittel	Anfangsgeschwindigkeit	Brisante Wirkung: Kerbenlängen	Bodendruck in Atmosphären kleinste	Bodendruck in Atmosphären grösste
Gewehr-Pulver	100	1·55	Zu gross, nicht gemessen	.	. .	48, 47, 55	768	1109
		2·5	230, 220, 206, 238, 228	224	1713	44, 44, 47, 44, 47	672	768
		5·0	179, 170, 172, 153, 170	173	1483	37, 35, 35, 31, 35	384	512
		7·5	160, 158, 150, 154, 151, 153	154	1395	33, 32, 47, 44, 43, 46	405	768
		10·0	117, 101, 138, 102, 139	119	1241	33, 43, 33, 41, 43	427	640
		12·5	105, 122, 134, 110, 114	117	1233	52, 60, 55, 59, 26	284	1323
		15·0	108, 87, 83	93	1136	33, 52, 50*	427	981
		20·0	76, 73, 80	76	1069	32, 22½, 54	210	1067
		25·0	56, 55, 53	55	917	35, 43, 44*	469	672
		30·0	38, 34	36	749	29, 23	219	341

Bei den mit * bezeichneten 2 Schüssen wurde der Lauf dicht hinter der Kugel sehr schwach, jedoch unleugbar ausgebaucht.

Hier zeigte sich die unerwartete Erscheinung, dass die Gasspannungen am Stossboden bei grossen Laderäumen aussergewöhnlich ungleichförmig zu werden anfingen, und häufig bedeutend grösser waren, als bei kleineren Laderäumen. Die bei 15 und 25 Zoll Laderaum eingetretenen Ausbauchungen hinter dem Geschosse lassen vermuthen, dass dort die Gasspannung grösser war als der Bodendruck, welcher bei diesen Schüssen mit 981 und 672 Atmosphären gemessen wurde, und bei weitem nicht hingereicht hätte, um den über 0·1 Zoll starken Stahlflintenlauf aufzutreiben.

Wenn diese Ausbauchungen einerseits anzeigen, dass bei grossen Hohlladungen wirklich die Gefahr des Zerspringens der Läufe eintreten kann, so schien nun andererseits die Frage von höchster Wichtigkeit, ob bei allen Hohlladungen hinter dem Geschosse eine solche, durch den Meissel am Boden nicht angezeigte erhöhte Gasspannung eintreten müsse.

Um in dieser Sache vorläufig einige Klarheit zu erreichen und zugleich zu erfahren, welchen Einfluss der Hohlraum ausübt, wenn sich derselbe zwischen dem Pulver und dem Stossboden befindet (welches auf der Jagd vorkommen kann, wenn die ganze Patrone, bei schräge abwärts getragenem Gewehre im Laufe vorgleitet), liess ich an dem Gewehrlaufe einen Seitenmeissel unter rechtem Winkel zur Rohraxe anbringen, mittelst dessen der Seitendruck des Pulvergases knapp hinter dem Geschosse gemessen werden konnte.

Das bezügliche Arrangement ist aus Fig. 29 zu ersehen.

Die krumme Schneide des Meissels war ebenso construirt, wie die des Bodenmeissels; der Schaft des Meissels *a* hatte aber nur 0·35 Zoll Durchmesser.

Es mussten daher die mittelst der Kerbenlängen aus Tafel II entnommenen Gasspannungen mit 2·6 multiplicirt werden.

Die dem Meissel gegenüber angebrachte Schraube *b* dient dazu, den durch Pulverrückstand festgekitteten Meissel nach dem Schusse zu lüften.

Um die sichere Überzeugung zu erhalten, dass die Anzeigen des kleinen Meissels wirklich mit denen des Bodenmeissels übereinstimmen, liess ich einen kurzen Lauf von der Pulverprobe am unteren Theile mit einer schmiedeeisernen Hülse ausfüttern, in welche der kleine Meissel central eingepasst war, worauf 5 Schüsse mit 28 Gran Gewehrpulver, 0·6 Zoll Laderaum und eingepresstem Geschosse, sowohl mit dem grossen als mit dem kleinen Meissel gegeben wurden.

Der Bodendruck zeigte sich wie folgt:

Grosser Meissel 0·31, 0·33, 0·33, 0·32, 0.31 im Mittel 0·32 Zoll Kerbenlänge;

kleiner Meissel 0·16, 0·165, 0·17, 0·16, 0·175, im Mittel 0·165 Zoll Kerbenlänge.

0·32 Zoll Kerbenlänge entspricht 405 Atmosphären.

0·165 „ „ „ $156 \times 2{\cdot}6 = 405{\cdot}6$ Atmosph.

Der Seitenmeissel und auch das Geschoss wurden zuerst auf 30 Zoll Entfernung vom Stossboden gestellt, 3 Schüsse à 100 Gran abgefeuert, wo das Pulver unten auf dem Stossboden ruhend, und 3 Schüsse, wo das Pulver oben in einem Mousselinsäckchen dicht hinter dem Geschosse angebracht war. Anfangsgeschwindigkeit, Gasdruck am Boden und Seitendruck hinter dem Geschosse wurden gemessen, und dieses Verfahren ferner noch bei 25, 20, 15, 10, 5 und $2^1/_2$ Zoll Laderaum wiederholt.

Tafel XXI.

Anfangsgeschwindigkeiten, Boden- und Seitendruck.

Beim Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit verschiedenen Hohlladungen, wenn die Pulverladung unten, d. i. auf dem Stossboden, oder oben, d. i. hinter dem Geschosse angebracht ist.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt.

Pulver-Ladung		Laderaum	Anfangsgeschwindigkeit		Bodendruck	Seitendruck hinter dem Geschosse
			einzeln	Mitt.	Atmosphären	
100 Gran Gewehrpulver	unten	2·5″	1745, 1685, 1709	1713	672, 768, 768	785, 738, 738
	oben		1165, 1165, 1157	1162	896, 896, 875	1164, 1219, 1164
	unten	5 „	1469, 1510, 1470	1483	512, 469, 384	569, 478, 458
	oben		983, 925, 983	964	512, 491, 491	499, 520, 499
	unten	10 „	1173, 1326, 1224	1241	427, 640, 597	1053, 569, 1160
	oben		749, 784, 793	775	172, 103, 92	310, 154, 182
	unten	15 „	1197, 1109, 1093	1133	1451, 981, 896	809, 738, 738
	oben		. . . . .	. .	302, 247, 265	354, 354, 325
	unten	20 „	1069, 1057, 1083	1069	200, 1024, 1109	267, 569, 665
	oben		. . . . .	. .	265, 249, 265	238, 238, 238
	unten	25 „	925, 917, 901	914	768, 533, 576	832, 416, 499
	oben		. . . . .	. .	284, 284, 284	267, 267, 267
	unten	30 „	775, 738, 734	749	341, 219, 330	325, 325, 436
	oben		. . . . .	. .	152, nicht messb.	267, nicht messbar

Aus diesen Resultaten lässt sich Folgendes entnehmen:

1. Dass der Seitendruck hinter dem Geschosse manchmal grösser ist als der Bodendruck, z. B. bei 2·5″, Seitendruck=1219, Bodendruck=896; bei 10″, Seitendruck=1160, Bodendruck nur 640 Atmosphären.

2. Dass, wenn der Hohlraum sich zwischen Pulverladung und Stossboden befindet, die ballistischen Wirkungen jedenfalls bedeutend kleiner sind, als wenn das Pulver auf dem Stossboden gelagert ist, und

3. dass in eben diesem Falle, jedoch nur bei verhältnissmässig kleinen Hohlladungen, der Seitendruck und mithin auch der Stoss auf das Geschoss grösser ist als der Bodendruck, z. B. bei 3·5" Laderaum.

Das wichtigste Ergebniss dieser Versuche ist jedoch die Überzeugung, dass die hinter dem Geschosse befindliche Gassäule nicht immer am Stossboden am dichtesten ist und sich gegen die Mündung zu verläuft; sondern dass sie Verdichtungswellen enthalte, deren Höhenpunkte bei bestimmten Lademethoden höchst wahrscheinlich an bestimmten Stellen des Rohres eintreten.

Diese Höhepunkte aufzusuchen, schien mir von der grössten Nothwendigkeit, da man erst nach Lösung dieser Aufgabe im Stande sein konnte, über den wahren Werth der verschiedenen Lademethoden ein richtiges Urtheil zu fällen.

Zu diesem Zwecke liess ich einen Infanterie-Gewehrlauf mit dem Bodenmeissel, und auf 55 Kaliber Bohrungslänge mit dem Seitenmeissel versehen.

Aus diesem Laufe wurden sonach nach den in Tafel XVIII angeführten drei Lademethoden und noch nach einer vierten, nämlich mit 100 Gran Pulver und 2½ Zoll Laderaum je 3 Schüsse gamacht, hierauf der Seitenmeissel auf 50, 45, 40 u. s. w. bis 5 Kaliber herabgerückt und bei jeder Stellung des Seitenmeissels obige 12 Schüsse wiederholt.

Die ersten drei Lademethoden liefern gleiche Anfangsgeschwindigkeiten von circa 1140 Fuss, und sind für das gewöhnliche Schiessen bemessen. Die vierte mit der Pulverladung von ¼ des Kugelgewichtes repräsentirt eine Forceladung.

Tafel XXII.

Bestimmung des Seitendruckes.

Beim Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe und Anwendung von vier verschiedenen Lademethoden.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt.

Entfernung vom Stossboden in Kalibern	Lademethode 1.		Lademethode 2.		Lademethode 3.		Lademethode 4.	
	55 Gran Gewehrpulver, 0·75 Zoll Laderaum		65 Gran Gewehrpulver, 2·5 Zoll Laderaum		21 Gran Schiesswolle, 2·5 Zoll Laderaum		100 Gran Gewehrpulver, 2·5 Zoll Laderaum	
	Mittlere Anfangsgeschwindigkeit							
	1140'		1136'		1145'		1713'	
	Gasdruck in Atmosphären							
	einzeln	Mitt.	einzeln	Mitt.	einzeln	Mitt.	einzeln	Mitt.
0	939, 896, 939	925	553, 469, 469	504	1851, 1707, 1877	1812	597, 619, 672	629
5	1276, 1276, 1190	1247	520, 499, 499	506	1219, 1219, 1386	1275	738, 738, 738	738
10	785, 738, 785	753	904, 962, 944	937	1024, 882, 882	992	1033, 1110, 1219	1127
15	560, 738, 642	647	642, 698, 785	708	642, 642, 642	642	1219, 1164, 1219	1201
20	416, 395, 416	409	437, 458, 478	458	499, 499, 499	499	882, 882, 998	921
25	405, 395, 395	398	569, 488, 478	522	478, 416, 458	451	698, 520, 520	580
30	375, 375, 375	375	410, 400, 395	402	384, 395, 354	378	478, 458, 499	478
35	296, 296, 296	296	328, 310, 325	320	296, 340, 311	315	416, 426, 499	447
40	296, 296, 296	296	325, 310, 325	320	268, 296, 296	287	416, 475 374, 395, 416	416
45	354, 354, 354	354	296, 374, 325	332	354, 296, 325	325	384, 395 499, 325, 405	402
50	239, 239, 268	249	325, 325, 325	325	196, 196, 196	196	395, 385, 395	392
55	239, 268, 239	249	325, 296, 296	306	239, 253, 296	263	340, 354, 354	349

Dieser Versuch, dessen Resultate in Fig. 30 graphisch dargestellt sind, liefert nun eine deutliche Vorstellung von der Sprengwirkung beim Schiessen aus dem Gewehrlaufe.

Nur bei sehr brisanten Schiessmitteln, wie die Schiesswolle, tritt das Maximum der Gasspannung am Stossboden selbst ein, bei Schiesspulver entsteht eine Hauptwelle, deren Höhenpunkt sich je nach der Lademethode mehr oder weniger vom Stossboden entfernt befindet, und welche sich durch eine oder mehrere kleine Wellen gegen die Mündung zu verläuft.

Es muss daher künftig der Bodendruck als Grundlage der Beurtheilung der brisanten Wirkung beim Schiessen aus dem Infanterielaufe aufgegeben, und an dessen Stelle die ganze Form der Hauptverdichtungswelle gesetzt werden.

Das Maximum der Gasspannung beträgt bei der Lademethode I, wo das Geschoss auf dem Pulver aufsitzt 1247, bei der Lademethode II mit 2 1/2 Zoll Laderaum 889 und bei III, wo Schiesswolle in Anwendung steht, 1812 Atmosphären. Es bleibt demnach die Methode II auch nach dieser Prüfung die vortheilhafteste.

Selbst bei der forcirten Ladung IV mit 100 Gran Pulver, wo eine Anfangsgeschwindigkeit von 1700 Fuss erreicht wurde, beträgt das Maximum der Gasspannung, durch die Anwendung des Laderaumes von 2 1/2 Zoll herabgemildert, nur 1127 Atmosphären, also weniger als bei dem ordinären Schusse mit 55 Gran Pulver und 1140 Fuss Geschwindigkeit.

In Fig. 30 ist bei den ersten 3 Schüssen auch die Zunahme der Geschossgeschwindigkeit im Laufe durch 2 divergirende Linien mit Punkten angezeigt, wozu die Daten aus Tafel XVIII entnommen sind. Man ersieht hieraus deutlich, wie das Anschwellen der Geschwindigkeit des Geschosses anfangs um so rascher geschieht, je grösser die Hauptwelle, der erste Stoss, ist und wie bei der Lademethode II, wo die Hauptwelle verhältnissmässig klein ist, die am Ende des Laufes erreichte Geschwindigkeit hauptsächlich durch die Nachwirkung erreicht wird.

Es blieb nun noch übrig, die Einflüsse kennen zu lernen, welche die Grösse der Pulverladung, des Laderaumes und des Geschossgewichtes auf die Sprengwirkung ausüben, und es wurden zu diesem Zwecke an einem mit dem Bodenmeissel versehenen Flintenlaufe noch 6 Seitenmeissel, und zwar bei 5, 10, 15, 20, 25 und 30 Kaliber Lauflänge angebracht. So wie aus Fig. 30 zu ersehen ist, musste die Hauptwelle in diese Region des Laufes fallen, und konnte nun nach jedem einzelnen Schusse ihrer ganzen Länge nach beobachtet werden.

Mit jeder veränderten Ladung wurden 3 Schüsse abgefeuert und nebst der Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses der Gasdruck am Stossboden und an 6 Stellen der Rohrwand gemessen.

Die Einrichtung ist in Fig. 31 abgebildet.

Die erhaltenen Resultate sind in nachfolgenden vier Tafeln verzeichnet:

Tafel XXIII.

Einfluss der Grösse der Pulverladung bei gewöhnlicher Lademethode.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit steigenden Pulverladungen. Das Geschoss in Fettpapier gewickelt, auf die Pulverladung angesetzt.

Nr.	Ladung in Gran	Laderaum in Kalibern, à 0·54″	Anfangsgeschwindigkeit	Gasspannungen in Atmosphären bei der Lauflänge von						
				0	5	10	15	20	25	30
				Kalibern						
5	60	1·50	1213	768	1385	785	545	416	406	395
			1237	1024	1610	886	670	499	448	395
			1181	597	998	738	670	416	468	395
		Mittel .	1210	796	1331	803	628	444	441	395
6	70	1·75	1418	1493	1913	1053	642	520	458	426
			1354	1237	1664	1110	642	488	437	416
			1372	1365	1830	1107	996	499	437	416
		Mittel .	1381	1365	1802	1090	760	562	444	419
7	80	2·04	1483	1408	1914	1192	698	520	437	416
			1418	1493	1609	1248	738	569	478	437
			. . .	1493	1664	1110	832	569	458	437
		Mittel .	1450	1465	1729	1183	756	553	458	430
8	90	2·31	. . .	1835	1914	1331	887	642	499	458
			. . .	1365	1747	1219	832	642	510	458
			. . .	1493	1914	1219	998	642	488	458
		Mittel .	. . .	1564	1858	1256	906	642	499	458
9	100	3 00	. . .	1109	1609	1498	944	698	569	520
			. . .	1365	1914	1386	1053	738	569	478
			. . .	1536	2217	1638	944	738	520	478
		Mittel .	. . .	1337	1913	1507	980	725	553	492

Tafel XXIV.

Einfluss der Grösse der Pulverladung bei Hohlladung.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit steigenden Pulverladungen bei gleichem Laderaume.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt.

Nr.	Ladung in Gran	Laderaum in Kalibern, à 0·54″	Anfangsgeschwindigkeit	Gasspannungen in Atmosphären bei der Lauflänge von						
				0	5	10	15	20	25	30
				Kalibern						
10	60	5	1090	384	458	698	545	478	448	410
			1090	384	458	698	670	478	448	395
			1093	384	458	698	778	499	468	416
		Mittel .	1091	384	458	698	644	485	455	409
11	70	5	1185	470	605	915	684	534	494	448
			1189	512	569	998	670	499	468	458
			1193	428	642	832	698	569	520	437
		Mittel .	1189	470	605	915	684	534	494	448
12	80	5	1261	491	642	1053	887	520	499	437
			1245	491	520	1220	915	642	510	458
			1229	491	642	1053	944	642	499	458
		Mittel .	1245	491	601	1109	915	601	503	451
13	90	5	1307	469	738	1277	887	642	642	478
			1317	512	642	1053	809	642	544	499
			1327	491	698	1219	887	569	642	499
		Mittel .	1317	491	693	1183	861	618	609	492
14	100	5	1428	619	738	1277	971	832	718	520
			1423	619	738	1277	1026	785	718	520
			1432	597	860	1277	887	761	569	569
		Mittel .	1428	612	779	1277	961	793	668	530

Tafel XXV.

Einfluss der Grösse des Laderaumes.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit abnehmenden Laderäumen und gleicher Pulverladung.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt.

Nr.	Ladung in Gran	Laderaum in Kalibern, à 0·54″	Anfangsgeschwindigkeit	Gasspannungen in Atmosphären bei der Lauflänge von						
				0	5	10	15	20	25	30
				Kalibern						
15	100	10	1257	448	478	499	762	738	762	499
			1253	448	520	499	762	698	808	499
			1255	341	499	499	785	738	698	499
	Mittel .		1255	412	499	499	770	725	756	499
16	100	8	1266	448	520	728	971	698	670	499
			1281	512	698	746	998	944	642	520
			1296	448	738	944	1083	887	642	569
	Mittel .		1281	469	652	806	1017	843	651	529
17	100	6	1326	597	598	1110	860	698	670	499
			1336	576	832	1277	858	832	698	520
			1345	533	832	1248	1053	785	569	520
	Mittel .		1336	569	754	1212	924	772	646	513
18—14	100	5	1428	612	779	1277	961	793	668	536
19	100	4	. . .	768	944	1277	1026	698	718	499
			. . .	736	832	1219	1110	832	642	499
			. . .	768	887	1438	998	808	642	499
	Mittel .		. . .	757	888	1311	1045	779	667	499
20—9	100	3	. . .	1337	1913	1507	980	725	553	492

Tafel XXVI.

Einfluss des Geschossgewichtes.

Schiessen aus dem Infanterie-Gewehrlaufe mit 1, 2 und 3 Geschossen bei gewöhnlicher Lademethode und mit Hohlraum.

Das Geschoss in Fettpapier gewickelt.

Nr.	Ladung in Gran	Laderaum in Kalibern, à 0·54″	Anzahl der Geschosse	Gasspannungen in Atmosphären bei der Lauflänge von						
				0	5	10	15	20	25	30
				Kalibern						
21=5	60	1·50	1	796	1331	803	628	444	441	395
22	60	1·50	2	1579	1277	569	478	395	374	296
				1323	1331	569	458	395	354	296
				1468	1305	569	478	374	354	296
		Mittel .		1457	1304	569	471	388	361	296
23	60	1·50	3	1877	1830	832	499	385	354	296
24=10	60	5	1	384	458	698	644	485	455	409
25	60	5	2	491	642	698	458	437	395	325
				533	642	738	478	458	395	325
				512	642	738	458	478	395	325
		Mittel .		512	642	725	465	458	395	325
26	60	5	3	619	785	785	642	437	374	325
27=14	100	5	1	612	779	1277	961	793	668	536
28	100	5	2	768	998	1386	832	698	520	437
				768	998	1220	795	633	510	416
				768	998	1053	758	569	499	395
		Mittel .		768	998	1220	795	633	510	416
29	100	5	3	981	1165	1219	944	832	698	437

Aus den graphischen Darstellungen dieser Resultate, Fig. 32, 33, 34, 35 lassen sich die gesuchten Einflüsse mit Leichtigkeit erkennen, und zwar:

Aus Fig. 32 und 33:

Das Maximum der Gasspannung steigt mit der Grösse der Pulverladung, sowohl bei gewöhnlicher Ladung als auch bei Hohlladung, nicht so der Bodendruck, welcher, wie dies schon bei den früheren Versuchen gefunden worden ist, über eine bestimmte Pulverladung hinaus stagnirt.

Die Maxima der Spannung sind bei der Hohlladung bedeutend niedriger als bei gewöhnlicher Lademethode.

Die Wellenberge fallen bei gleichen Laderäumen ungeachtet der verschiedenen Pulver-Quantitäten nahezu an dieselben Stellen des Laufes.

Der erste Stoss und die Nachwirkung, mithin auch die Anfangsgeschwindigkeit wachsen mit der Pulverladung.

Bei der Hohlladung ist der erste Stoss kleiner, dafür die Nachwirkung grösser.

Aus Fig. 34:

Das Maximum der Gasspannung steigt mit dem Abnehmen des Laderaumes, eben so der Bodendruck. Der Sprung von Nr. 19, mit 4 Kaliber Laderaum, wo das Pulver locker ist, auf Nr. 20, wo schon eine eben so grosse Pressung des Pulvers stattfindet, als wenn das Geschoss kräftig angesetzt wird, ist auffällig gross.

Die Wellenberge rücken um so mehr gegen den Stossboden, je kleiner die Laderäume werden.

Der erste Stoss und die Anfangsgeschwindigkeit wachsen mit der Verkleinerung des Laderaumes, die Nachwirkung nicht.

Aus Fig. 35:

Bei ordinärer Lademethode steigt das Maximum der Spannung mit der Vergrösserung des Geschossgewichtes, in noch grösserem Maasse aber steigt der Bodendruck. Bei Hohlladung wird das Spannungsmaximum durch Vergrösserung des Geschossgewichtes nicht sehr afficirt, wohl aber der Bodendruck. Überhaupt charakterisirt sich der Einfluss der Vergrösserung des Geschossgewichtes durch eine Verlängerung der Hauptwelle nach rückwärts, welche so weit gehen kann, dass das Maximum der Gasspannungen am Stossboden selbst eintritt, wie dies bei Nr. 23 der Fall ist.

Im Allgemeinen wurde bei Anwendung von gewöhnlichem Schiesspulver, mag die Lademethode wie immer beschaffen sein, das Maximum der Gasspannung stets vor dem Geschosse liegend, und grösser als der Bodendruck aufgefunden. Nur bei Nr. 23, wo das dreifache Geschossgewicht in Anwendung trat, ist der Bodendruck etwas grösser, als die vor dem Geschosse liegende Gasspannung.

Ob dieselben Erscheinungen auf gleiche Art beim Schiessen aus gezogenen Kanonen auftreten, lässt sich nur durch Versuche ermitteln, welche in ähnlicher Weise, wie die vorher beschriebenen angestellt werden müssten.

Die Thatsache, dass alle bis heute, selbst aus kostspieligen Materialien construirten, zum Durchschiessen der Eisenpanzer bestimmten Geschütze, die gewünschte Verlässlichkeit in der Ausdauer nicht besitzen, lässt es als vollkommen gerechtfertiget erscheinen, einige Rohre solchen Versuchen zu opfern, durch welche diejenigen Schiessmittel und Lademethoden aufgefunden werden können, die ohne Beeinträchtigung des ballistischen Effectes, die Sprengwirkung herabsetzen, und indem hierbei die auf das Rohr geübten Sprengwirkungen für jede Schussart detaillirt vor das Auge treten, Anhaltspunkte für Geschütz-Constructionen geliefert werden, welche bisher noch nicht vorhanden waren.

In Fig. 36 ist eine Einrichtung abgebildet, welche zum Messen des Seitendruckes bei Geschützrohren tauglich erscheint.

Die Druckfläche des Meissels *a* beträgt nur $^1/_8$ Quadratzoll, es müssen daher die nach der Kerbenlänge aus Tafel II entnommenen Gasspannungen doppelt genommen werden, und können mit diesem Meissel noch Gasspannungen bis über 5000 Atmosphären gemessen werden. Sämmtliche Bestandtheile der Vorrichtung lassen sich abwechslungsweise für verschiedene Rohre brauchen, nur das Einsatzstück *b* muss in verschiedenen der Metallstärke der Rohre anzupassenden Längen erzeugt werden. Der an diesem Stücke befindliche Ring dient als Angriff beim Zusammenstellen und Einschieben der Vorrichtung, die Schlussschraube *c* zum Feststellen derselben. Nach dem Schusse wird *c* losgeschraubt, dann der durch Pulverrückstand eingekittete Meissel *a* mit Hilfe des Ringes an *b* herausgezogen, und die Bronzeplatte *d* nach Abnehmen der Meisselkappe *e* herausgenommen.

Zum Schlusse war es nun noch unerlässlich zu untersuchen, ob und in wie weit die bei dem ballistischen Apparate neu aufgefundenen Thatsachen auch auf die Einrichtung der Pulverprobe Einfluss üben, und ob nicht auch dort die Nothwendigkeit eintrete, nebst dem Bodendrucke auch den Seitendruck zu messen?

Zu diesem Zwecke wurde ein kurzer Lauf der Pulverprobe bei 3, 5 und 10 Kaliber Bohrungslänge mit Seitenmeisseln versehen und aus selbem mit verschiedenartigen Schiessmitteln geschossen.

Auch hier ergab sich, dass der Seitendruck bei sämmtlichen Schiesspulversorten grösser als der Bodendruck ist, und der Berg der Hauptwelle um so näher gegen den Stossboden zu liegt, also der Bodendruck selbst auch um so grösser wird, je brisanter das Schiessmittel ist. Bei den Pyroxilen zeigte der Bodendruck zugleich das Maximum der Gasspannung an.

Es bedarf demnach die Pulverprobe keiner Änderung ihrer gegenwärtigen einfachen Form, indem sie den Werth der verschiedenen Schiessmittel in Beziehung auf ihre ballistische Wirkung richtig angibt, und die brisante Eigenschaft derselben durch die Grösse des Bodendruckes verlässlich anzeigt, und es ist daher das aus den Tafeln VIII, IX, X und XI über die brisante Eigenschaft eines Schiessmittels gefällte Urtheil ganz richtig, insofern es sich auf ein Mehr oder Weniger von Sprengwirkung beschränkt, und nicht die als Ausdruck der brisanten Wirkung gebrauchten Zahlen als mathematische Verhältnisszahlen betrachtet werden.

Für die Prüfung der Kriegspulver ist es nothwendig, dass für jede Sorte derselben ein Maximum und Minimum der Grade und ein Maximum der Kerbenlänge festgesetzt wird, welche Toleranzgrenzen sich leicht durch Prüfung einer Anzahl erprobter Pulver auffinden lassen.

Allgemeine Formeln zur Schätzung und Grenzbestimmung einfacher Integrale.

Von dem w. M. **Dr. A. Winckler,**
Professor in Gratz.

Die Gegenstände, womit sich das Folgende beschäftigt, stehen bei sonstiger Verschiedenheit in so weit mit einander in Beziehung, als bei ihnen die Ermittelung von Ausdrücken, welche theils grösser, theils kleiner als die Werthe gewisser Integrale sind, und welche die letzteren sogar in manchen Fällen ganz genau darstellen, die gemeinschaftliche Hauptaufgabe bildet.

Zuerst wird die Frage erörtert, wie aus dem bestimmten Integrale eines Productes von Functionen andere, blos die Integrale der einzelnen Factoren in sich enthaltende Ausdrücke zu bilden seien, zwischen deren Werthen der Werth jenes bestimmten Integrals nothwendig liegen muss, und welche also zur Schätzung desselben dienen können. Darauf folgt die Herleitung einer Formel, durch welche der Grenzwerth eines Integrals von gewisser Beschaffenheit für den Fall, dass eine darin enthaltene Constante unendlich gross wird, gefunden werden kann.

1.

Für manche Betrachtungen ist es nicht selten schon hinreichend, einen Werth zu kennen, welchen ein gegebenes Integral keinesfalls überschreiten und einen andern, unter welchem dasselbe nicht liegen kann, so dass der Werth dieses Integrals zwischen diesen beiden Werthen enthalten sein muss. In vielen Fällen leistet hierbei der bekannte Satz gute Dienste, wonach, wenn $\psi(x)$ eine Function bezeichnet, welche zwischen $x=a$ und $x=b$ ihr Zeichen nicht ändert, die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx = \varphi[a+\delta(b-a)]\int_a^b \psi(x)dx$$

stattfindet, wobei δ einen nicht näher bekannten positiven echten Bruch vorstellt. — Obgleich dieser Satz nicht mehr gilt, wenn $\psi(x)$ zwischen den Grenzen des Integrals das Zeichen ändert, so kann er doch auf die einzelnen Bestandtheile, in welche das Integral sich zerlegen lässt, und welche der genannten Forderung entsprechen, angewendet werden. Häufig aber, und insbesondere dann, wenn die Zerlegung des Integrals in unendlich viele Theile geschehen müsste, vermindert sich die Brauchbarkeit des Satzes, und erscheint es wünschenswerth, von der Bedingung, dass der eine Factor $\psi(x)$ sein Zeichen nicht ändere, unabhängig, zwei Werthe angeben zu können, zwischen welchen unter allen Umständen der Werth des Integrals enthalten sein muss. Mit der Lösung dieser Aufgabe, welche, wie es scheint, nicht ohne Interesse ist, werde ich mich zunächst beschäftigen.

Es seien $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei innerhalb der Werthe a und b von x endlich bleibende Functionen, welche zwischen diesen Werthen von x ihr Zeichen behalten oder ein oder mehrere Male wechseln mögen. R sei der grösste, r der kleinste Werth, welchen $\varphi(x)$, sodann S der grösste und s der kleinste Werth, welchen $\psi(x)$ innerhalb jenes Intervalls oder an seinen Grenzen annimmt.

Alsdann sind die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} R-\varphi(x) \quad &, \quad S-\psi(x) \text{ stets positiv} \\ r-\varphi(x) \quad &, \quad s-\psi(x) \text{ stets negativ} \end{aligned}$$

für alle zwischen a und b liegenden Werthe von x. Folglich ist:

$$\begin{aligned} [R-\varphi(x)][S-\psi(x)] > 0 \quad &, \quad [r-\varphi(x)][s-\psi(x)] > 0 \\ [R-\varphi(x)][s-\psi(x)] < 0 \quad &, \quad [r-\varphi(x)][S-\psi(x)] < 0 \end{aligned}$$

Das zwischen jenen Grenzen genommene Integral der beiden ersten Ausdrücke ist somit stets positiv, jenes der beiden letzten dagegen wesentlich negativ. Entwickelt man also die Producte und setzt der Kürze wegen;

$$u = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

so ergeben sich für dieses Integral die folgenden Eingrenzungen:

$$u > R\int_a^b \psi(x)dx + S\int_a^b \varphi(x)dx - (b-a)RS \quad \ldots(1)$$

$$u > r\int_a^b \psi(x)dx + s\int_a^b \varphi(x)dx - (b-a)rs \quad \ldots(2)$$

$$u < R\int_a^b \psi(x)dx + s\int_a^b \varphi(x)dx - (b-a)Rs \quad \ldots(3)$$

$$u < r\int_a^b \psi(x)dx + S\int_a^b \varphi(x)dx - (b-a)rS \quad \ldots(4)$$

Die Giltigkeit dieser Ungleichheiten, welche in manchen Fällen einer unmittelbaren Anwendung fähig sind, unterliegt, wie man sieht, keiner andern Bedingung, als dass $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ nie unendlich gross werden. Der grösste der beiden ersten Ausdrücke, verbunden mit dem kleinsten der beiden letzten Ausdrücke liefert die genaueste Eingrenzung.

2.

Es ist übrigens nicht immer nöthig, eine vorgängige Unterscheidung dieser Art anzustellen; man kann eine allgemein giltige Eingrenzung in Form einer Gleichung aufstellen. Wird nämlich die zweite zur ersten, ferner die vierte zur dritten Ungleichheit addirt, so ergibt sich zunächst:

$$u > \frac{R+r}{2}\int_a^b \psi(x)dx + \frac{S+s}{2}\int_a^b \varphi(x)dx - (b-a)\frac{RS+rs}{2}$$

$$u < \frac{R+r}{2}\int_a^b \psi(x)dx + \frac{S+s}{2}\int_a^b \varphi(x)dx - (b-a)\frac{Rs+Sr}{2}$$

Bemerkt man nun, dass

$$RS+rs = \tfrac{1}{2}[(R+r)(S+s)+(R-r)(S-s)]$$

$$Rs+Sr = \tfrac{1}{2}[(R+r)(S+s)-(R-r)(S-s)]$$

und setzt man für einen Augenblick:

$$z=u-\frac{R+r}{2}\int_a^b\psi(x)dx-\frac{S+s}{2}\int_a^b\varphi(x)dx+(b-a)\frac{(R+r)(S+s)}{4}$$

so nehmen die beiden Ungleichheiten die Form an:

$$z>-\frac{b-a}{4}(R-r)(S-s)$$

$$z<+\frac{b-a}{4}(R-r)(S-s)$$

und man kann also offenbar

$$z=\varepsilon\frac{b-a}{4}(R-r)(S-s)$$

setzen, wenn mit ε ein zwischen -1 und $+1$ liegender Bruch bezeichnet wird. Hieraus ergibt sich unmittelbar die folgende Gleichung:

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=$$

$$\frac{R+r}{2}\int_a^b\psi(x)dx+\frac{S+s}{2}\int_a^b\varphi(x)dx-(b-a)\frac{(R+r)(S+s)}{4}$$

$$+\varepsilon(b-a)\frac{(R-r)(S-s)}{4} \qquad (I)$$

Da hierbei $-1<\varepsilon<+1$, so ist es in dieser Formel offenbar gleichgiltig, ob unter R oder r, sodann unter S oder s der grösste Werth, resp. von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ verstanden werden will.

Die drei ersten Glieder rechter Hand stellen also das Integral bis auf einen Fehler genau dar, welcher abgesehen vom Zeichen höchstens

$$(b-a)\frac{(R-r)(S-s)}{4}$$

betragen kann.

3.

In der vorhin gefundenen Gleichung kommen die vier grössten und kleinsten Werthe der beiden Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ vor. Aus den Bedingungen des Art. 1 lassen sich nun aber ferner auch Gleichungen ableiten, worin nur drei jener Werthe vorkommen, wie nun gezeigt werden soll. Aus (2) und (3) findet man:

$$u - s\int_a^b \varphi(x)dx > r\,[\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)s]$$

$$u - s\int_a^b \varphi(x)dx < R[\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)s]$$

Es muss also zwischen r und R ein Werth liegen, welcher in der ersten Ungleichheit für r gesetzt, die letztere in eine Gleichheit verwandelt. Dieser Werth kann in der Form $r+\varepsilon(R-r)$ gedacht werden, wenn ε einen positiven echten Bruch bezeichnet. Setzt man daher für u seine ursprüngliche Bedeutung, so gelangt man zu der folgenden Relation:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx =$$

$$s\int_a^b \varphi(x)dx + [r+\varepsilon(R-r)][\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)s] \qquad \text{(II)}$$

wobei: $$0 < \varepsilon < 1$$

Dieselbe lässt aber noch eine andere Darstellung zu. Da nämlich wenn δ einen zweiten positiven echten Bruch bezeichnet, auch

$$r+\varepsilon(R-r) = \varphi[a+\delta(b-a)]$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)dx =$$

$$s\int_a^b \varphi(x)dx + \varphi[a+\delta(b-a)][\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)s]$$

Daraus lässt sich unmittelbar die bekannte, in Art. 1 angeführte Gleichung finden, welche dem Falle entspricht, dass $\psi(x)$ für die zwischen a und b liegenden Werthe von x das Zeichen nicht ändert. Angenommen es bleibe $\psi(x)$ positiv, so kann immerhin $s=0$ als der kleinste Werth jener Function angesehen werden. Dann folgt:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = \varphi[a+\delta(b-a)]\int_a^b \psi(x)dx$$

Aber es darf nicht unbemerkt bleiben, dass die Fehlergrenze dieser Formel gerade in dem hier vorausgesetzten Falle offenbar grösser als jene der zuerst angegebenen Formel ist; denn der Factor von $\varphi[a+\delta(b-a)]$ ist in dieser um $(b-a)s$ kleiner als in der andern Formel, und dies kann, sofern der kleinste Werth s von $\psi(x)$ von 0 beträchtlich verschieden ist, einen beträchtlichen Einfluss üben.

4.

Eine dritte Gleichung verdient bemerkt zu werden, welche ebenfalls aus den für u aufgestellten Bedingungen des Art. 1 sich ergibt und worin an die Stelle von r, s, R der Gleichung (II), resp. die Grössen R, S, r treten. Aus den Bedingungen (1) und (4) des Art. 1 ergeben sich die Ungleichheiten:

$$u - S\int_a^b \varphi(x)dx > R\left[\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)S\right]$$

$$u - S\int_a^b \varphi(x)dx < r\left[\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)S\right]$$

durch welche man sofort auf die Gleichung:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx =$$

$$S\int_a^b \varphi(x)dx + [R+\varepsilon(r-R)]\left[\int_a^b \psi(x)dx - (b-a)S\right] \qquad \text{(III)}$$

geführt wird, wobei:

$$0 < \varepsilon < 1$$

Aus den Bedingungen des Art. 1 liessen sich ferner noch zwei Gleichungen ableiten, welche zu (II) und (III) in sofern analog sind, als sie aus den letzteren sich ergeben, wenn man r, R, s, S, resp. mit s, S, r, R vertauscht. Diese Gleichungen sind also wesentlich von (II) und (III) nicht verschieden und verdienen keine weitere Berücksichtigung.

In wiefern diese Resultate zur Schätzung des Werthes eines Integrals dienen können, bedarf wohl keiner weiteren Auseinandersetzung.

Eben so wenig braucht näher gezeigt zu werden, dass die Art der Betrachtung, welche die vorstehenden Resultate lieferte, einer umfassenden Verallgemeinerung fähig ist. Um das Integral eines Products von n verschiedenen Functionen durch die Integrale der Producte von $n-1$, $n-2$, ... 1 dieser Functionen in obiger Weise auszudrücken, erhält man statt der vier Bedingungen des Art. 1 allgemein deren 2^n, und kann daraus, analog wie oben drei, allgemein $2^{n-1}+1$ Gleichungen ableiten.

5.

Einige besondere Fälle mögen angeführt werden.

Es sei $f(x)$ eine zwischen den Grenzen a und b nicht Null werdende und innerhalb dieser Grenzen positiv bleibende, entweder stets wachsende oder stets abnehmende Function. Setzt man $\varphi(x) = f(x)$ und $\psi(x) = \frac{1}{f(x)}$, so werden die grössten und kleinsten Werthe dieser beiden Functionen nothwendig an den Grenzen des Integrals selbst liegen und es wird entweder:

$$R = f(a) \quad , \quad r = f(b) \quad , \quad S = \frac{1}{f(b)} \quad , \quad s = \frac{1}{f(a)}$$

oder

$$R = f(b) \quad , \quad r = f(a) \quad , \quad S = \frac{1}{f(a)} \quad , \quad s = \frac{1}{f(b)}$$

sein, je nachdem $f(x)$ von $x = a$ an ab- oder zunimmt. Wendet man hierauf die Gleichung (I) an, so kommt die letztere Unter-

scheidung nicht in Betracht und man erhält nach einigen Umgestaltungen das folgende Resultat:

$$\int_a^b f(x)dx + f(a)f(b)\int_a^b \frac{dx}{f(x)} =$$

$$(b-a).\frac{[f(a)+f(b)]^2+4f(a)f(b)+\varepsilon[f(a)-f(b)]^2}{2[f(a)+f(b)]}$$

wobei wieder:

$$-1 < \varepsilon < +1$$

Für einen zweiten Fall werde angenommen, es sei zwischen $x=a$ und $x=b$ sowohl $f(x)$ als auch der Differentialquotient $f'(x)$ eine entweder stets wachsende oder stets abnehmende Function, es erleide also $f''(x)$ keinen Zeichenwechsel.

Man setze

$$\varphi(x)=[f(x)]^n \quad , \quad \psi(x)=f'(x)$$

dann ist:

$$R=[f(b)]^n \ , \ r=[f(a)]^n \ , \ S=f'(b) \ , \ s=f'(a)$$

und man erhält nach einer kleinen Rechnung, und wenn der Bequemlichkeit wegen $f(x)^n$ statt $[f(x)]^n$ geschrieben wird, aus (I) die folgende Relation:

$$[f'(a)+f'(b)]\int_a^b f(x)^n dx =$$

$$\frac{n-1}{n+1}[f(a)^{n+1}-f(b)^{n+1}]-f(a)f(b)[f(a)^{n-1}-f(b)^{n-1}]$$

$$+\frac{b-a}{2}[f(a)^n+f(b)^n][f'(a)+f'(b)]$$

$$+\varepsilon\frac{b-a}{2}[f(a)^n-f(b)^n][f'(a)-f'(b)]$$

wobei ebenfalls:

$$-1 < \varepsilon < +1$$

Eine Verification dieser Gleichung ergibt sich sehr leicht, wenn man $f(x)=x$ setzt, weil dann ε aus der Rechnung verschwindet.

Der besondere Fall für $n=1$ verdient bemerkt zu werden.

Man erhält:

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \varepsilon\frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]\frac{f'(a)-f'(b)}{f'(a)+f'(b)}$$

Dass auch diese Gleichung an die bezüglich $f(x)$, $f'(x)$, resp. $f''(x)$ gemachten Voraussetzungen gebunden ist, versteht sich von selbst.

6.

Die Art, wie in dem so eben betrachteten Beispiel die unter dem Integralzeichen stehende Function durch die Bedingung ihres und ihrer ersten Differentialquotienten stetigen Wachsens oder Abnehmens bezüglich der hier in Frage stehenden Bestimmungen hinreichend charakterisirt werden konnte, lässt sich auf allgemeinere Fälle übertragen.

Um in Kürze einen solchen Fall etwas näher zu erörtern, will ich annehmen, es sei von $x = a$ bis $x = b$:

$\varphi(x)$ positiv und wachsend, $\varphi'(x)$ abnehmend, also $\varphi''(x)$ negativ,
$\psi(x)$ „ „ „ $\psi'(x)$ wachsend, also $\psi''(x)$ positiv.

Diesen Voraussetzungen gemäss ist nun offenbar:

$$\varphi(x) < \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) \qquad (1)$$

denn der Ausdruck rechts fällt für $x = a$ mit jenem linker Hand zusammen, wächst aber mit x stärker als dieser, weil $\varphi'(x)$ abnehmend ist, also $\varphi'(a)$ den grössten Werth hat.

In ähnlicher Weise ist nun ferner auch:

$$\varphi(x) < \varphi(b) + (x-b)\varphi'(b) \qquad (2)$$

denn der Ausdruck rechts fällt für $x = b$ mit $\varphi(x)$ zusammen, nimmt aber mit kleiner werdendem x langsamer ab als $\varphi(x)$, weil $\varphi'(b)$ der kleinste Werth von $\varphi'(x)$ innerhalb des Intervalls $x = a$ bis $x = b$ ist.

Die beiden Ausdrücke

$$\varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) \text{ und } \varphi(b) + (x-b)\varphi'(b)$$

wovon jeder beständig grösser als $\varphi(x)$ bleibt, gehen nun aber für ein zwischen a und b liegendes x in einander über. Bezeichnet man

diesen Werth von x mit l, so ergibt sich derselbe aus der Gleichung:

$$\varphi(a)+(l-a)\varphi'(a)=\varphi(b)+(l-b)\varphi'(b)$$

und man findet:

$$l=\frac{\varphi(b)-\varphi(a)-[b\varphi'(b)-a\varphi'(a)]}{\varphi'(a)-\varphi'(b)}$$

Nun lässt sich sehr leicht auch ein Ausdruck angeben, welcher beständig grösser als $\psi(x)$ ist und an den Grenzen des mehr erwähnten Intervalls mit $\psi(x)$ zusammenfällt. Offenbar ist nämlich:

$$\psi(x)<\frac{b\psi(a)-a\psi(b)+x[\psi(b)-\psi(a)]}{b-a} \qquad (3)$$

Der Ausdruck rechter Hand gibt $\psi(a)$ für $x=a$, und $\psi(b)$ für $x=b$; der erste Differentialquotient desselben ist constant $=\frac{\psi(b)-\psi(a)}{b-a}$, der zweite Differentialquotient aber ist $=0$. Wäre nun $\psi(x)$ für irgend einen zwischen a und b liegenden Werth von x grösser als jener Ausdruck, so müsste von diesem Werthe an $\psi(x)$ langsamer zunehmen als dieser Ausdruck, um mit diesem bei $x=b$ zusammen zu treffen, es müsste also $\psi'(x)$ langsamer als der Bruch $\frac{\psi(b)-\psi(a)}{b-a}$ wachsen: da aber letzterer nicht wächst, sondern constant bleibt, so müsste $\psi'(x)$ abnehmen, was gegen die Voraussetzung ist.

Aus (1) und (3), sodann (2) und (3) ergibt sich nun, dass zwischen $x=a$ und $x=b$:

$$\varphi(x)\psi(x)<[\varphi(a)+(x-a)\varphi'(a)].\frac{b\psi(a)-a\psi(b)+x[\psi(b)-\psi(a)]}{b-a}$$

$$\varphi(x)\psi(x)<[\varphi(b)+(x-b)\varphi'(b)].\frac{b\psi(a)-a\psi(b)+x[\psi(b)-\psi(a)]}{b-a}$$

Integrirt man die erste Ungleichheit von a bis l, die letzte aber von l bis b und addirt dann beide, so findet man:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

$$< \frac{1}{b-a}\int_a^b dx[\varphi(a)+(x-a)\varphi'(a)][b\psi(a)-a\psi(b)+x(\psi(b)-\psi(a))]$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_b^b dx[\varphi(b)+(x-b)\varphi'(b)][a\psi(b)-b\psi(a)+x(\psi(a)-\psi(b))] \qquad (1)$$

Eine durchaus analoge Betrachtung führt zu den Ungleichheiten

$$\psi(x) > \psi(a)+(x-a)\psi'(a)$$
$$\psi(x) > \psi(b)+(x-b)\psi'(b)$$

und zu der Bemerkung, dass die beiden Ausdrücke rechter Hand für einen zwischen a und b liegenden Werth h einander gleich werden, welcher durch die Gleichung:

$$h = \frac{\psi(b)-\psi(a)-[b\psi'(b)-a\psi'(a)]}{\psi'(a)-\psi'(b)}$$

bestimmt ist. Ferner findet man, dass

$$\varphi(x) > \frac{b\varphi(a)-a\varphi(b)+x[\varphi(b)-\varphi(a)]}{b-a}$$

und dass also:

$$\varphi(x)\psi(x) > [\psi(a)+(x-a)\psi'(a)].\frac{b\varphi(a)-a\varphi(b)+x[\varphi(b)-\varphi(a)]}{b-a}$$

$$\varphi(x)\psi(x) > [\psi(b)+(x-b)\psi'(b)].\frac{b\varphi(a)-a\varphi(b)+x[\varphi(b)-\varphi(a)]}{b-a}$$

Wenn man nun die erste Ungleichheit von a bis h und die letzte von h bis b integrirt, hierauf beide addirt, so erfolgt:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

$$> \frac{1}{b-a}\int_a^h dx[\psi(a)+(x-a)\psi'(a)][b\varphi(a)-a\varphi(b)+x(\varphi(b)-\varphi(a))]$$

$$+\frac{1}{b-a}\int_b^h dx[\psi(b)+(x-b)\psi'(b)][a\varphi(b)-b\varphi(a)+x[\varphi(a)-\varphi(b))] \qquad (2)$$

Da sich in (1) und (2) die Integrationen rechter Hand vollständig ausführen lassen, so liefern jene beiden Ungleichheiten, unter den früher bezeichneten Voraussetzungen, zwei Grenzwerthe, zwischen welchen das in Frage stehende Integral liegen muss, blos ausgedrückt durch die Anfangs- und Endwerthe der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ und deren erste Differentialquotienten. Dieses Resultat scheint darum nicht ohne Interesse zu sein, weil es, im Gegensatz zu den früher angeführten Formeln, jene Grenzwerthe unabhängig von den Integralen der Factoren $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in direct berechenbaren Ausdrücken darstellt, welche dem Integrale des Productes um so näher kommen, je weniger sich jene Factoren innerhalb der Grenzen a und b von x ändern.

Ich bemerke noch, dass sich die Relationen (1) und (2) auch sehr leicht unter geometrischem Gesichtspunkte ableiten lassen, und dass auf ähnliche Weise, jedoch unter anderen Voraussetzungen bezüglich des Wachsens der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, noch weitere Grenzformeln erhalten werden können.

Um Formeln dieser Art zu erhalten, ist es aber keineswegs nothwendig, die Function unter dem Integralzeichen als aus dem Product zweier Factoren bestehend anzunehmen; es genügt, gewisse Eigenschaften jener Function, wie solche vorhin bezüglich $\varphi(x)$, $\psi(x)$ und deren Differentialquotienten vorausgesetzt wurden, zu kennen, um sofort Werthe zu finden, zwischen welchen das Integral liegen muss. Ich glaube eine weitere Ausführung hier umgehen und durch die Anwendung auf einen besonderen Fall in der nächst folgenden Abhandlung ersetzen zu können.

7.

Die auf einfache Integrale angewendete Betrachtungsweise (Art. 1) ist einer Erweiterung auf doppelte und mehrfache Integrale fähig. Bezeichnet wieder R den grössten und r den kleinsten Werth, welchen $\varphi(x,y)$, und dessgleichen S den grössten und s den kleinsten Werth, welchen $\psi(x,y)$ zwischen den Grenzen des doppelten Integrals

$$u = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\,\psi(x,y)\,dx$$

annimmt, bleiben ferner $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ zwischen denselben Grenzen endlich, so sind die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} R-\varphi(x,y) \quad &, \quad S-\psi(x,y) \text{ stets positiv,} \\ r-\varphi(x,y) \quad &, \quad s-\psi(x,y) \text{ stets negativ,} \end{aligned}$$

und kann man aus ihnen, indem man je zwei mit einander multiplicirt, vier Producte bilden, wovon zwei positiv und zwei negativ sind.

Auf ganz gleichem Wege wie im Art. 1 gelangt man sofort zu den folgenden vier Ungleichheiten:

$$u > R\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \psi(x,y)dy + S\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)dy - (b-a)(\beta-\alpha)RS$$

$$u > r\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \psi(x,y)dy + s\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)dy - (b-a)(\beta-\alpha)rs$$

$$u < R\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \psi(x,y)dy + s\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)dy - (b-a)(\beta-\alpha)Rs$$

$$u < r\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \psi(x,y)dy + S\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)dy - (b-a)(\beta-\alpha)rS$$

Hieraus lassen sich ferner wieder Resultate ziehen, welche jenen der Art. 2, 3 und 4 durchaus analog sind, aber es ist nicht nöthig, hierauf näher einzugehen. Ich will nur anführen, dass wenn $\psi(x,y)$ zwischen den Grenzen a, b, α, β von x und y das Zeichen nicht ändert, die Formel:

$$\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \varphi(x,y)\psi(x,y)dy = \varphi[a+\varepsilon(b-a), \alpha+\delta(\beta-\alpha)]\int_a^b dx\int_\alpha^\beta \psi(x,y)dy$$

erhalten wird, worin ε und δ zwei positive echte Brüche bezeichnen.

8.

Die folgende Betrachtung beschäftigt sich ebenfalls, jedoch in einem ganz anderen Sinne als die vorhergehende, mit der Ermitte-

lung des Grenzwerthes eines bestimmten Integrals. Der Zweck ist hier die Auffindung des Werthes, welchem das Integral

$$\int_0^b \varphi(x)\,\psi(hx)\,.\,\frac{dx}{x}$$

als Grenze sich nähert, wenn h ins Unendliche wächst. — Das nächstliegende Verfahren jenen Werth zu ermitteln, scheint das folgende zu sein, welches sich auf gewisse Voraussetzungen bezüglich der Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(hx)$ stützt.

Es wird nämlich angenommen, die Function $\varphi(x)$ sowohl als deren Differentialquotienten $\varphi'(x)$ und $\varphi'(x)$ behalten für alle zwischen 0 und b liegenden Werthe von x stetige und endliche Werthe, und die Function $\psi(hx)$ sei von der Beschaffenheit, dass für jedes zwischen 0 und b liegende x das Integral

$$\int \psi(hx)dx = 0$$

werde, wenn man darin h unendlich gross werden lässt,

Unter diesen Voraussetzungen ist nun:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\tau)$$

wo τ eine Function von x bezeichnet, von welcher nur bekannt ist, dass ihr Werth zwischen 0 und x liegt, und dass sie gleichzeitig mit x verschwindet.

Ich füge noch hinzu, dass auch der erste Differentialquotient dieser Function einen endlichen Werth erhält und $=\frac{1}{2}$ ist für $x=0$. Differentiirt man nämlich die obige Gleichung, so erfolgt:

$$\varphi'(x) = x\varphi''(\tau)\frac{d\tau}{dx} + \varphi'(\tau)$$

und wenn $\varphi'(\tau)$ eliminirt wird:

$$\varphi''(\tau)\frac{d\tau}{dx} = \frac{\varphi(0) + x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

woraus für $x = 0$ in der That $\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{2}$ erhalten wird, und zugleich ersichtlich ist, dass unter den gemachten Annahmen $\frac{d\tau}{dx}$ nicht unendlich werden kann. Sofort ergibt sich nun:

$$\int_0^b \varphi(x)\psi(hx)\frac{dx}{x} = \varphi(0)\int_0^b \psi(hx)\frac{dx}{x} + \int_0^b \varphi'(\tau)\psi(hx)dx$$

Das letztere Integral ist näher in Betracht zu ziehen.

Durch theilweise Integration findet man, wie leicht zu sehen:

$$\int_0^b \varphi'(\tau)\psi(hx)dx = \left[\varphi'(\tau)\int\psi(hx)dx\right]_0^b - \int_0^b dx\left[\varphi''(\tau)\frac{d\tau}{dx}\int\psi(hx)dx\right]$$

Da τ höchstens die Werthe von 0 bis b durchlaufen kann, so bleibt $\varphi''(\tau)$ eine endliche Grösse und das Gleiche gilt von $\frac{d\tau}{dx}$; der andere Factor unter dem Integralzeichen des letzten Gliedes, nämlich $\int\psi(hx)dx$ verschwindet aber für $h=\infty$, folglich verschwindet jenes letzte, und aus gleichem Grunde auch das erste Glied der rechten Seite und hat man:

$$\int_0^b \varphi'(\tau)\psi(hx)dx = 0 \text{ für } h=\infty$$

Es bleibt somit blos der Ausdruck übrig

$$\varphi(0)\int_0^b \psi(hx)\frac{dx}{x}$$

oder, wenn man x für hx setzt:

$$\varphi(0)\int_0^{bh} \psi(x)\frac{dx}{x}$$

und das Resultat dieser Betrachtung besteht darin, dass, wenn $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ für alle zwischen 0 und b liegenden Werthe von x stetig und endlich bleiben und $\int\psi(hx)dx$ für $h=\infty$ verschwindet, die Gleichung

$$\int_0^b \varphi(x)\psi(hx)\frac{dx}{x} = \varphi(0)\int_0^\infty \psi(x)\frac{dx}{x} \text{ für } h=\infty$$

stattfindet.

9.

So wenig sich gegen die Richtigkeit des vorigen Beweises eine Einwendung machen lässt, so zweifelhaft erscheint bei genauerer Erwägung die Nothwendigkeit der Bedingung, dass ausser der Function $\varphi(x)$ auch noch deren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung innerhalb des Intervalls von $x = 0$ bis $x = b$ stetig und endlich bleiben sollen. Diese Bedingung ist nun aber eine Folge des Gebrauches der Taylor'schen Reihe; ob die erstere bei Umgehung der letzteren nicht ebenfalls wegfalle, ist daher eine sehr nahe liegende Frage, welche, da die Sache selbst nicht ohne Interesse ist, eine nähere Erörterung wohl verdient. In der That lässt sich der Beweis mittelst des Satzes über die Entwickelbarkeit der Functionen in Reihen, welche nach den Cosinus der Vielfachen eines Bogens fortschreiten, in ziemlich einfacher Weise führen; ich werde mich dabei zuerst mit dem besonderen Falle

$$\int_0^b \varphi(x) \sin hx . \frac{dx}{x} \quad \text{für } h = \infty \text{ werdend}$$

beschäftigen, obgleich dieser, wie bekannt, bereits erörtert ist.

Nimmt man auch hier wieder an, es sei $\varphi(x)$ eine stetige und endliche Function so lange x zwischen 0 und b liegt, so findet die Entwickelung

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\left(\frac{\pi}{b}x\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right) + \ldots + A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \ldots$$

statt und es kann daher das in Frage stehende Integral in der Form:

$$\int_0^b \left[\frac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\left(\frac{\pi}{b}x\right) + A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right) + \ldots + A_n \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \ldots\right] \frac{\sin hx}{x} dx$$

gedacht werden. Man betrachte hiervon den Bestandtheil

$$\int_0^b \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \frac{\sin(hx)}{x} dx$$

bringe denselben in die Form:

$$\int_0^{bh} \cos\left(\frac{n\pi}{bh}x\right) \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx$$

und bemerke, dass, wenn ε ein positiver echter Bruch ist:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{bh}x\right) = 1 - \frac{n\pi}{bh}x \sin\left(\varepsilon \frac{n\pi}{bh}x\right)$$

gesetzt werden kann, dass also jener Bestandtheil die Darstellung

$$\int_0^{bh} \frac{\sin x}{x}\, dx - \frac{n\pi}{bh}\int_0^{bh} \sin\left(\varepsilon \frac{n\pi}{bh}x\right) . \sin x . dx$$

zulässt, welche die Betrachtung wesentlich erleichtert.

Offenbar verschwindet der zweite Theil dieses Ausdruckes für jedes endliche n, sobald h in's Unendliche wächst; man kann aber, weil h von n durchaus unabhängig ist, und darum in einem beliebigen Masse stärker als n wachsen kann, diese beiden Grössen in der Art in's Unendliche wachsen lassen, dass $\frac{n}{h}$ sich der Null als Grenze nähert, und sofort der zweite Theil des Integrals auch für alle späteren grösser und grösser werdenden n wegfällt. Dann aber reducirt sich das zu betrachtende Integral auf den ersten Theil, nämlich auf:

$$\int_0^{bh} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

und die in Frage stehende Summe aller Integrale erhält die Form:

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\right]$$

welche mit Rücksicht auf die bekannte Eigenschaft der Cosinusentwickelung auch an den Enden des Intervalls, nämlich für $x = 0$ und $x = b$ zu gelten, sich noch näher bestimmen lässt. Da nämlich für $x = 0$

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

erhalten wird, so ist:

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\right] = \frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

woraus sich nun das bekannte Resultat ergibt:

$$\int_0^b \varphi(x).\sin hx.\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\varphi(0) \text{ für } h=\infty$$

Wie man sieht, unterliegt dasselbe nur der einzigen Bedingung, dass $\varphi(x)$ für alle zwischen 0 und b liegenden Werthe von x stetig und endlich bleibe.

10.

Dieses Verfahren lässt sich ganz analog auch zur Lösung der ursprünglich gestellten allgemeineren Frage benützen. Denkt man sich wieder den einen Factor $\varphi(x)$ durch die zwischen und an den Grenzen des Intervalls $x=0$ bis $x=b$ giltige Entwickelung:

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\left(\frac{\pi}{b}x\right) + A_2\cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right) + \ldots + A_n\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \ldots$$

ersetzt, so erscheint das nunmehr zu betrachtende Integral in der Form:

$$\int_0^b \left[\tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\left(\frac{\pi}{b}x\right) + A_2\cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right) + \ldots + A_n\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \ldots\right]\psi(hx)\frac{dx}{x}$$

wovon zunächst wieder der Bestandtheil

$$\int_0^b \cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\psi(hx).\frac{dx}{x}$$

betrachtet werden soll. Es gibt nun, wie bekannt, eine Function r von x, welche mit x gleichzeitig verschwindet, deren Werth zwischen 0 und $\frac{n\pi}{b}x$ liegt und wofür:

$$\cos\left(\frac{n\pi}{b}x\right) = 1 - \frac{n\pi}{b}x\sin\tau$$

so dass man das vorige Integral auch in der Form:

$$\int_0^b \psi(hx)\frac{dx}{x} - \frac{n\pi}{b}\int_0^b \sin\tau\,.\,\psi(hx)\,dx$$

schreiben kann. Durch theilweise Integration ergibt sich:

$$\frac{n\pi}{b}\int_0^b \sin\tau\,.\,\psi(hx)dx = \frac{n\pi}{b}\left[\sin\tau\int\psi(hx)dx\right]_0^b$$
$$-\frac{n\pi}{b}\int_0^b dx\left[\cos\tau\frac{d\tau}{dx}\int\psi(hx)dx\right]$$

Wird nun, wie früher, vorausgesetzt, es verschwinde das Integral

$$\int\psi(hx)dx = 0 \text{ für } h = \infty$$

so verschwindet, wenigstens für jeden endlichen Werth von n jedes der beiden Glieder rechter Hand, wenn h in's Unendliche wächst.

Übrigens wird dies auch für ein ohne Ende wachsendes n der Fall sein, wenn man dieses, was unter allen Umständen möglich ist, mit h nur in dem Masse zunehmen lässt, dass das Product

$$n\int\psi(hx)\,dx$$

sich der Grenze Null nähert.

Der Grenzwerth, um dessen Bestimmung es sich ursprünglich handelte, kann also durch den Ausdruck:

$$\left[\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\right]\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{x}dx$$

dargestellt werden, welcher, da die Cosinusentwickelung auch an der Grenze für $x = 0$ gilt, und also:

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + \ldots$$

ist, nichts Anderes als der früher erhaltene Werth

$$\varphi(0)\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx$$

ist.

11.

Hieraus ergibt sich nun, dass die Bedingung, $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ sollen innerhalb der Grenzen $x=0$ bis $x=b$ stetig und endlich bleiben, ohne Einfluss, also unnöthig ist, und der nunmehr bewiesene Satz sich folgendermassen ausdrücken lässt:

Wenn $\varphi(x)$ für alle zwischen 0 und b liegenden Werthe von x stetig und endlich bleibt und $\psi(x)$ von der Beschaffenheit ist, das für jeden Werth von x

$$\int \psi(hx)dx$$

für $h=\infty$ verschwindet, so findet die Gleichung:

$$\int_0^b \varphi(x)\,\psi(hx)\,\frac{dx}{x} = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{x}\,dx$$

für ein unendlich gross werdendes h statt.

Offenbar lässt sich dieser Satz dahin erweitern, dass in $\varphi(x)$ und $\psi(hx)$ die Grösse h auch sonst noch vorkommen darf, wenn nur die bezüglich dieser Functionen nothwendigen Bedingungen erfüllt werden.

Der Satz lässt sich in einzelnen Fällen leicht anwenden, resp. verificiren.

1. Angenommen es sei:

$$\psi(hx) = \alpha^{-hx} - \beta^{-hx}, \text{ also } \int \psi(hx)dx = -\frac{\alpha^{-hx}}{h\log\alpha} + \frac{\beta^{-hx}}{h\log\beta}$$

Dieses Integral verschwindet, wenn h unendlich gross wird, wie es sein soll. Man hat also für $h=\infty$ die Gleichung:

$$\int_0^b \varphi(x)\,\frac{\alpha^{-hx}-\beta^{-hx}}{x}\,dx = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{\alpha^{-x}-\beta^{-x}}{x}\,dx = \varphi(0)\log\left(\frac{\log\beta}{\log\alpha}\right)$$

2. Es sei:

$$\psi(hx) = \sin hx \ , \quad \text{also} \int \psi(hx)dx = -\frac{\cos hx}{h}$$

Da dieses Integral verschwindet, wenn h in's Unendliche wächst, so folgt:

$$\int_0^b \varphi(x).\frac{\sin hx}{x}dx = \varphi(0)\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

für $h = \infty$. Dies stimmt mit dem bekannten Resultat überein.

3. Um einen Fall zu betrachten, in welchem sich alle Integrationen unbestimmt ausführen lassen, welcher also in gewisser Hinsicht noch besser zur Probe sich eignet als die vorigen Fälle, nehme man an, es sei:

$$\varphi(x) = \frac{1}{a^2+x^2} \ , \quad \psi(hx) = \frac{hx}{1+h^4x^4}$$

Da alsdann:

$$\int \psi(hx)dx = \frac{1}{2h}\operatorname{arctg}(h^2x^2)$$

für $h = \infty$ werdend verschwindet, so erfüllen die obigen Annahmen die Vorbedingungen des Satzes und erhält man die Gleichung:

$$\int_0^b \frac{hdx}{(a^2+x^2)(1+h^4x^4)} = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4a^2}$$

Man kann nun aber auch die Integration linker Hand ausführen und erhält, vorerst für einen beliebigen Werth von h den Ausdruck:

$$\frac{h}{1+a^4h^4}\left[\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{(1+a^2b^2)h}{4\sqrt{2}}\log\frac{1+hb\sqrt{2}+h^2b^2}{1-hb\sqrt{2}+h^2b^2}\right]$$

$$-\frac{(1-a^2h^2)h^2}{(1+a^4h^4)2\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(hb\sqrt{2}-1) + \operatorname{arctg}(hb\sqrt{2}+1)\right]$$

Lässt man nun h unendlich gross werden, so verschwindet der erste Theil, der zweite Theil aber reducirt sich auf

$$\frac{a^2}{a^4.2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4a^2}$$

und gibt also dasselbe Resultat, wie der allgemeine Satz.

Weitere Anwendungen, deren dieser Satz fähig ist, überlasse ich dem geehrten Leser.

Über eine neue, der Cumarsäure isomere Säure.

Von dem w. M. H. Hlasiwetz.

Wie ich in einer, kürzlich veröffentlichten Untersuchung gezeigt habe, liefert die Aloë bei der Zersetzung mit Kalihydrat Paraoxybenzoësäure und Orcin.

Ich habe mich seitdem in Gemeinschaft mit Herrn J. Malin mit Versuchen beschäftigt, die Verbindungen aufzufinden, aus denen diese Zersetzungsproducte müssen hervorgegangen sein.

Das erste derselben nun, die Paraoxybenzoësäure, verdankt seine Entstehung einer, der Cumarsäure isomeren Säure, die Paracumarsäure genannt sein mag, und deren Beschreibung diese Zeilen gelten.

Man gewinnt sie in sehr einfacher Weise schon dadurch, dass man die Aloë in etwa dem zweifachen ihres Gewichtes heissen Wassers löst, dann auf das Pfund Aloë 5 Loth Schwefelsäurehydrat zusetzt (das man zuvor mit Wasser verdünnt hat) und das Gemisch in einer Porzellanschale eine Stunde lang im Sieden erhält.

Beim Auskühlen scheidet sich dann eine beträchtliche Menge eines pechartigen Harzes aus; die, davon abgegossene, durch Stehen geklärte, oder durch nasse Filter filtrirte Flüssigkeit schüttelt man zweimal mit Äther aus, destillirt den Äther ab, und überlässt den Rückstand von der Destillation der Krystallisation.

Das, mit einem gelben Harz noch stark verunreinigte Rohproduct reinigt man durch oft wiederholtes Umkrystallisiren aus schwachem Alkohol.

Zuletzt löst man in siedendem Wasser, und entfärbt mit Thierkohle.

Etwas reichlicher wird die Ausbeute, wenn man die siedende Lösung der Aloë vor der Behandlung mit Schwefelsäure mit Bleizucker von dem grössten Theil des Harzes befreit, das in ihr enthalten ist.

Auf diesen Zusatz fällt sofort eine bedeutende Menge desselben als weiche, schwarze, pechartige Masse heraus, eine andere scheidet sich beim Auskühlen ab.

Die ganze, klare, ziemlich helle, davon abgegossene Flüssigkeit wird mit Schwefelsäure entbleit, filtrirt, dann mit einem weiteren Zusatz dieser Säure in dem Verhältniss wie früher gekocht, die erkaltete saure Flüssigkeit mit Äther ausgeschüttelt u. s. w. 5 Pfund Aloë gaben 24 Grm. Rohproduct.

Die erhaltene Substanz ist, wie erwähnt, eine Säure, die in der Aloë, wie es scheint, nicht als solche präformirt enthalten ist. Nicht mit Schwefelsäure behandelte Aloëlösungen geben an Äther nichts ab als kleine Mengen eines gelben Harzes. Vielleicht ist es ein Glukosid, welches unter dem Einfluss der Schwefelsäure gespalten wird.

Die Paracumarsäure ist farblos, und krystallisirt in hübschen, glänzenden, spröden Nadeln; am schnellsten aus einer wässrigen, etwas langsamer, aber schöner aus einer verdünnten alkoholischen Lösung.

Meistens sind die zuerst anschiessenden Krystalle sichelförmig gekrümmt, und garbenartig verwachsen.

Kaltes Wasser löst sehr wenig, siedendes völlig, am leichtesten warmer Alkohol und Äther.

Sie reagirt stark sauer und ist fast geschmacklos.

Sie schmilzt bei 179—180°. Ihre alkoholische Lösung gibt mit Eisenchlorid eine dunkelgoldbraune Färbung. Sie reducirt auch beim Erwärmen nicht eine Lösung von Silbersalpeter, noch alkalische Kupferoxydlösung, und gibt mit Metallsalzen keine Fällungen.

Die lufttrockene Substanz verlor bis auf 130° erhitzt, blos 1 bis 1·5 Pct. Wasser.

Die Analysen der getrockneten Säure ergaben:

I. 0·348 Grm. Substanz gab 0·8375 Grm. Kohlensäure und 0·160 Grm. Wasser.
II. 0·312 „ „ „ 0·748 „ „ „ 0·138 „ „

$\underbrace{C_9H_8O_3}$	I.	II.
C — 65·8	— 65·4	— 65·8
H — 4·9	— 4·9	— 5·0

Ammoniumsalz. Die Säure löst sich sehr leicht in Ammoniakflüssigkeit, und diese Lösung der freiwilligen Verdunstung über-

lassen, krystallisirt in sehr schönen, breiten, farblosen Tafeln des monoklinoëdrischen Systems.

0·502 Grm. bei 70° getrockneter Substanz verloren 0·0499 Grm. Wasser.
0·450 Grm. getrockneter Substanz gaben 0·9781 Grm. Kohlensäure und 0·243 Grm. Wasser.

$C_9H_7(NH_4)O_2$		Gefunden.
C	59·6	59·3
H	6·1	6·0

	Berechnet.	Gefunden.
$C_9H_7(NH_4)O_2$	„	„
H_2O	9·5	9·9

Cadmiumsalz. Eine Lösung des Ammoniaksalzes mit einer Lösung von Chlorcadmium versetzt, gibt bald sternförmig gruppirte Nadeln des Cadmiumsalzes.

0·468 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120° 0·0513 Grm. Wasser.
0·4167 Grm. trockene Substanz gaben 0·1221 Grm. Cadmiumoxyd.

$C_9H_7CdO_2$	Berechnet.	Gefunden.
Cd	25·4	25·5

	Berechnet.	Gefunden.
$C_9H_7CdO_2$	„	„
$1\frac{1}{2}H_2O$	10·9	10·9

Kupfersalz. Die Lösung des Ammoniaksalzes gibt beim Vermischen mit einer Lösung von Kupfervitriol sofort eine reichliche Ausscheidung grünlich-blauer Nadeln des Kupfersalzes.

0·373 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120° 0·080 Grm. Wasser.
0·3025 Grm. trockene Substanz gaben 0·616 Grm. Kohlensäure und 0·110 Grm. Wasser.
0·293 Grm. trockene Substanz gaben 0·059 Grm. Kupferoxyd.

$C_9H_7CuO_2$		Gefunden.
C	55·5	55·5
H	3·6	4·0
Cu	16·2	16·1

	Berechnet.	Gefunden.
$C_9H_7CuO_2$	„	„
$3H_2O$	21·7	21·5

Silbersalz. Es fällt als weisser voluminöser Niederschlag beim Zusatz von salpetersauren Silberoxyd zu einer Lösung des Ammoniak-

salzes. Es wurde bei Luftabschluss gewaschen, zwischen Papier gepresst und über Schwefelsäure getrocknet, wobei es sich ein wenig färbte.

0·368 Grm. Substanz verloren bei 120° 0·0246 Grm. Wasser.
0·3434 Grm. getrocknete Substanz gaben 0·1375 Grm. Silber.

$C_9H_7AgO_3$		Gefunden.
$Ag = 39·9$	—	40·0

	Berechnet.	Gefunden.
$C_9H_7AgO_3$	— „	— „
H_2O	— 6·2	— 6·6

Diese analytischen Daten werden genügen, um die Formel der Säure $C_9H_8O_3$ festzustellen.

Von den Zersetzungsproducten wurden bis jetzt nur das, durch Salpetersäure, und das beim Schmelzen mit Kali entstehende untersucht.

Das erste ist Pikrinsäure, das zweite Paraoxybenzoësäure. Kocht man die Paracumarsäure mit rauchender Salpetersäure in einer Schale bis zum Aufhören der Entwickelung rother Dämpfe, so krystallisiren nach kurzer Zeit aus der gelben Flüssigkeit gelbliche Blättchen und Prismen, die sich in siedendem Wasser mit intensiv gelber Farbe lösen, und aus der auskühlenden Flüssigkeit schnell wieder in strohgelben Krystallen anschiessen.

Sie zeigten vollkommen das Verhalten der Pikrinsäure und gaben bei der Analyse auch die, für diese berechneten Zahlen. (Gefunden: C 31·0 H 1·5; Berechnet: C 31·4 H 1·3.)

Mit der dreifachen Menge Kalihydrat geschmolzen, wird die Paracumarsäure oxydirt. Löst man die Schmelze in Wasser, sättigt mit Schwefelsäure ab, und schüttelt die Flüssigkeit mit Äther aus, so hinterbleibt beim Abdestilliren desselben ein krystallisirender Rückstand.

Die durch Umkrystallisiren aus Wasser gereinigte Substanz besass alle Eigenschaften, die zuletzt an der Paraoxybenzoësäure aus Aloë beobachtet worden waren, und vollständig deren Zusammensetzung.

Man fand in der lufttrockenen Substanz 11·6 Grm. Krystallwasser und in der trockenen C 60·7 H. 4·6.

Berechnet ist nach der Formel $C_7H_6O_3 . H_2O$, C 60·9, H 4·3, Wasser 11·5.

Die Paracumarsäure steht demnach zur Paraoxybenzoësäure in demselben Verhältniss wie die Cumarsäure zur Salicylsäure.

Früher schon, als die vorliegende Untersuchung begonnen wurde, hatte Herr Prof. Rochleder aus der Aloë eine krystallisirte Säure erhalten, die nach einer Probe, die er zu überlassen so gütig war, alle die Eigenschaften der Paracumarsäure, und auch ihre Zusammensetzung besitzt.

Allein die Säure Rochleder's enthält einen Gehalt von Krystallwasser, der der Formel $C_9H_8O_3 . H_2O$ entspricht, der der hier beschriebenen abgeht, selbst wenn sie aus Wasser krystallisirt war.

0·380 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120° 0·035 Grm. Wasser.
0·4027 „ „ „ „ „ „ 0·0377 „ „
0·348 trock. Subst. gaben 0·8375 Grm. Kohlensäure und 0·160 Grm. Wasser.

$C_9H_8O_3$		Gefunden.
C — 65·8	—	65·6
H — 4·9	—	5·1

	Berechnet.	Gefunden.
$C_9H_8O_3$ —	„ —	„ — „
H_2O —	9·9 —	9·2 — 9·3

Übrigens gab sie mit Salpetersäure oxydirt Pikrinsäure, und mit Kali geschmolzen, Paraoxybenzoësäure.

Die letztere wurde analysirt, und C 60·6, H 4·6 erhalten.

Die Salze dieser Säure entstehen auf demselben Wege mit derselben Leichtigkeit und gleichen den paracumarsauren vollkommen, so dass, dürfte man von der hervorgehobenen Differenz im Wassergehalte absehen, man die Säure unbedingt für identisch mit der Paracumarsäure erklären würde.

Über die Methode ihrer Gewinnung theilte Herr Prof. Rochleder folgendes mit:

„Wird Aloë mit ($^1/_{25}$ vom Gewicht) Natronhydrat und Wasser gekocht, bis nach kurzer Zeit das Schäumen aufhört, die Flüssigkeit nach dem Erkalten mit Schwefelsäure neutralisirt und mit Äther geschüttelt, so färbt sich dieser goldgelb, und nach dem Abdestilliren

des Äthers bleibt eine gelbe Masse zurück, die krystallinisch ist. Sie wird mit Wasser ausgekocht, und durch ein nasses Filter filtrirt. Die aus dem Filtrat erhaltenen Krystalle werden mit Thierkohle bis zur Entfärbung behandelt."

Seiner Angabe nach ist jedoch die Ausbeute geringer als nach dem ersteren Verfahren.

Über das Phloroglucin.

Phloroglucin und Jodwasserstoff. Der Jodwasserstoff wirkt nicht reducirend auf Phloroglucin, sondern beschränkt sich darauf, ihm Wasser zu entziehen. Das dadurch entstehende Product, erhält man auch mit Chlorwasserstoff.

Die Reaction wurde mit Jodwasserstoff von 1·5 sp. Gew. in zugeschmolzenem Rohr bei einer Temperatur von 140° C. vorgenommen. Es hatte sich eine flockig krystallinische Substanz gebildet, welche auf einem Filter mit warmen Wasser ausgewaschen werden konnte.

Sie war selbst in siedendem schwer löslich, und fiel beim Filtriren der Lösung aus der auskühlenden Flüssigkeit schnell wieder heraus. Von etwas färbender Beimengung und einer Spur allenfalls vorhandenem Phloroglucins wurde sie durch Behandlung mit Äther befreit.

Sie bestand aus mikroskopischen, in viel kochendem Alkohol löslichen, in Äther unlöslichen, fast geschmacklosen Schüppchen von neutraler Reaction.

Mit Salzsäure war dieselbe noch leichter rein zu erhalten.

Eine Lösung von Phloroglucin in concentrirter Salzsäure wurde etwa zwei Stunden lang auf der angegebenen Temperatur erhalten, und die ausgeschiedenen Krystallschuppen durch Auswaschen und Umkrystallisiren aus siedendem Wasser gereinigt.

Als der Versuch mit Jodwasserstoff unter Zugabe von etwas Phosphor bei 200° wiederholt wurde, war ein Theil des Productes in eine kohlige Masse verwandelt, ein anderer erwies sich, obwohl sehr unrein, doch als identisch mit dem früheren.

Die Substanz enthält Krystallwasser, welches bei 120° entweicht. Man fand in zwei Versuchen im Mittel 13·2 Pct.

I. 0·2847 Grm. getrocknete, mit HJ bereitete Substanz gab 0·6444 Grm. CO_2 und 0·1186 HO.

II. 0·2597 Grm. getrocknete, mit HCl bereitete Substanz gab 0·5858 Grm. CO_2 und 0·1001 Grm HO.

$C_{12}H_{10}O_5$		I.		II.
C	61·5	61·7		61·5
H	4·3	4·5		4·3

	Berechnet.	Gefunden.
$C_{12}H_{10}O_5$	„	„
$2H_2O$	13·3	13·2

Der Vorgang ist demnach: $\underbrace{2(C_6H_6O_2)}_{\text{Phloroglucin}} = \underbrace{C_{12}H_{10}O_5} + H_2O.$

und die neue Verbindung verhält sich zum Phloroglucin wie ein Äther zu seinem Alkohol.

$\underbrace{\left.\begin{matrix}C_6H_5O_2\\H\end{matrix}\right\}O}_{\text{Phloroglucin.}}$ $\underbrace{\left.\begin{matrix}C_6H_5O_2\\C_6H_5O_2\end{matrix}\right\}O}_{\text{neuer Körper.}}$

Phloroglucin-Chinin. Vermischt man eine nicht zu verdünnte Lösung von Phloroglucin mit einer von schwefelsaurem Chinin, die man mit etwas Schwefelsäure sauer gemacht hat, so bilden sich in der Flüssigkeit schnell schöne, 2—3 Millim. lange, concentrisch gruppirte Nadeln, die mit kaltem Wasser gewaschen und aus siedendem leicht umkrystallisirt werden können. (Die angewandten Mengen waren 5 Grm. schwefelsaures Chinin mit wenig verdünnter Schwefelsäure in 20 CC. Wasser gelöst, und 2 Grm. Phloroglucin in 10 CC. Wasser gelöst.)

Diese leichte Verbindbarkeit des Phloroglucin's mit Chinin ist charakteristisch; es theilt diese Eigenschaft mit dem Orcin und dem Resorcin [1]).

---

[1]) Für die Krystalle des, unter den gleichen Verhältnissen entstehenden schwefelsauren Orcin-Chinins wurden von Herrn Malin folgende Zahlen erhalten:
0·353 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120° 0·025 Grm. Wasser.
0·328 Grm. trockene Subst. gaben 0·734 Grm. Kohlens. und 0·1808 Grm. Wasser.
0·322 Grm. trockene Substanz gaben 0·1443 Grm. schwefelsauren Baryt.

0·462 Grm. lufttrockener Substanz verloren bei 120° 0·044 Grm. Wasser.
0·412 „ „ „ „ „ „ 0·038 „ „
0·374 „ trockener „ gaben 0·7902 CO_2 und 0·1923 Grm. HO.
0·418 „ „ „ „ 0·1777 Grm. schwefels. Baryt.

Aus diesen Zahlen folgt die Formel:

$C_{26}H_{24}N_2O_2 . SO_3 + C_6H_3O_3$ für die getrocknete, und
$C_{26}H_{24}N_2O_2 . SO_3 + C_6H_3O_3 . 3H_2O$ für die krystallisirte Substanz.

$C_{26}H_{30}N_2O_5\,SO_3$			Gefunden.
C	— 58·8	—	58·3
H	— 5·6	—	5·7
SO_3	— 15·0	—	14·6

	Berechnet.	Gefunden.	
$C_{26}H_{30}N_2O_5 . SO_3$	— „	— „	— „
$3H_2O$	— 9·2	— 9·5	— 9·2

$C_{20}H_{24}N_2O_2$ } SO_3 $C_7H_6O_3$ }			Gefunden.
C_{27}	— 61·3	—	61·0
H_{22}	— 6·1	—	6·1
N_2	— „	—	„
O_4	— „	—	„
SO_3	— 15·1	—	15·2

	Berechnet.	Gefunden.
$C_{27}H_{22}N_2O_4 . SO_3$	— „	— „
$2H_2O$	— 6·8	— 7·1

Elektromagnetische Untersuchungen, mit besonderer Rücksicht auf die Anwendbarkeit der Müller'schen Formel.

(Erste Abhandlung, enthaltend die Versuche mit massiven Cylindern.)

(Mit 1 Tafel.)

Von Prof. Dr. A. v. Waltenhofen,

in Innsbruck.

Bei meinen Untersuchungen über das elektromagnetische Verhalten des Stahles [1]) war ich veranlasst Müller's Erfahrungen über die magnetische Sättigung des Eisens zu berücksichtigen, in soferne es darauf angekommen ist, die bei jedem Stahlstabe beobachteten magnetischen Intensitäten mit dem magnetischen Maximum zu vergleichen, welches einem gleichschweren Eisenstabe entsprechen würde. — Ich habe desshalb, um die Constanten der Müller'schen Formel für meine Magnetisirungsspirale möglichst sicher zu ermitteln, sehr zahlreiche Versuche mit Eisenstäben gemacht. — Die graphische Darstellung der Versuchsresultate liess bald erkennen, dass diese Beobachtungen zugleich über manche Einzelheiten, welche die Anwendbarkeit der Müller'schen Formel betreffen, wichtige Andeutungen geben, und ein schätzbares Materiale für die Frage enthalten: in welcher Ausdehnung und Allgemeinheit diese Formel bei sehr verschiedenen Dimensionsverhältnissen sich bewährt.

Gleichwohl hat Müller selbst die befriedigende Übereinstimmung des von ihm aufgestellten Gesetzes mit der Erfahrung in zahlreichen Fällen [2]) nachgewiesen, und aus Anlass der Versuche von Buff und Zamminer [3]), welche keine Annäherung an ein magnetisches Maximum zeigten, neuerdings [4]) Versuche geliefert, welche das Eintreten einer magnetischen Sättigung unzweifelhaft herausgestellt haben; — es sind jedoch aus den Daten dieser letzteren

[1]) Sitzungsberichte, Bd. 48.

[2]) Müller's „Bericht über die Fortschritte der Physik". S. 494.

[3]) Liebig's Ann. d. Chemie und Pharmacie, Bd. 75.

[4]) Pogg. Ann. Bd. 82.

Beobachtungen von Müller die Constanten der von ihm aufgestellten Formel nicht berechnet worden [1]), was erforderlich gewesen wäre, um nicht nur über die fragliche Sättigung zu entscheiden, sondern auch den ganzen Verlauf der nach der Müller'schen Gleichung berechneten Intensitätscurve mit den bei den angewendeten Stromstärken beobachteten magnetischen Intensitäten zu vergleichen. — Auch die Versuche von Weber [2]), von Koosen [3]) und von Dub [4]) haben wohl die Annäherung an ein magnetisches Maximum, nicht aber speciell und im Einzelnen eine Erprobung des von Müller aufgestellten Gesetzes zum Gegenstande gehabt; eine Aufgabe, die seither überhaupt nicht unternommen worden ist [5]).

Eine Wiederaufnahme solcher Untersuchungen schien mir auch im Hinblicke auf andere Fragen von Interesse und Wichtigkeit, indem sie zugleich geeignet wären, über die bei kleinen Stromstärken auftretenden Abweichungen vom Proportionalitätsgesetze, — ferner über die bei gleichen Stromintensitäten innerhalb gewisser Grenzen obwaltende annähernde Proportionalität mit den Quadratwurzeln der Stabdurchmesser, und endlich auch über die von Müller angedeutete Abhängigkeit der Constanten seiner Formel von der Stablänge nähere Aufschlüsse zu geben.

Diese Erwägungen haben mich bestimmt, die Untersuchung weiter auszudehnen, und ich bin dabei zu Ergebnissen gelangt,

---

[1]) Siehe die Schlussnote.

[2]) „Elektrodynamische Massbestimmungen" (Diamagnetismus) S. 570. In dieser Arbeit wird zwar auch die Müller'sche Formel stellenweise eingehender besprochen (z. B. S. 527 und 566), doch handelt es sich hier hauptsächlich um das von Weber aus der Theorie der Molecularmagnete abgeleitete Gesetz.

[3]) Pogg. Ann. Bd. 85.

[4]) Pogg. Ann. Bd. 90.

[5]) In der Sitzung der mathem.-naturw. Classe der kais. Akademie am 27. April ist eine Abhandlung von H. Platter vorgelegt worden, in welcher — so weit der mitgetheilte Auszug entnehmen lässt — die „Unbrauchbarkeit" der Müller'schen Formel nachgewiesen werden soll. — Ohne hierauf, bevor die Arbeit selbst vorliegt, weiter eingehen zu können, will ich gelegentlich nur darauf hinweisen, dass man in meiner vorliegenden Abhandlung bezüglich der Bestimmung der Constanten die Bedingungen angegeben findet, unter welchen die Müller'sche Gleichung den Anforderungen, die man an eine empirische Näherungsformel überhaupt zu stellen pflegt, innerhalb weiterer Grenzen entspricht, — bei deren Ausserachtlassung aber allerdings dieser Zweck nicht erreicht wird.

welche zur Kenntniss der bei Eisenstäben auftretenden Gesetzmässigkeiten zwischen Elektromagnetismus und Stromstärke bemerkenswerthe Beiträge liefern, und den Gegenstand dieser Abhandlung bilden. — Schliesslich habe ich auch einige Versuche mit discontinuirlichen Eisenkernen angereiht, deren weitere Ausführung ich mir noch vorbehalte.

Die Beobachtungen sind in derselben Weise ausgeführt worden, wie ich es in meiner oben citirten Abhandlung bezüglich der Stahlstäbe beschrieben habe; ich berufe mich daher auf die dort gegebene Beschreibung der Einrichtung und Handhabung meines Apparates. — Als Einheit der Stromstärken gilt auch hier diejenige, welche der beschriebenen Magnetisirungsspirale ein magnetisches Moment von einer Million absoluten Einheiten ertheilt; auch die magnetischen Momente der untersuchten Eisenstäbe sind in Millionen von absoluten Einheiten angegeben.

Dies vorausgeschickt, sei bemerkt, dass die magnetischen Intensitäten beobachtet wurden, welche die untersuchten Eisenstäbe bei den magnetisirenden Stromstärken 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 und 15 geäussert haben. — Die Gewichte (γ) der Stäbe, die — sämmtlich 103 Millim. lang — in der 91 Millim. langen Spirale magnetisirt wurden, sind genau bestimmt worden und durchaus in Grammen angegeben. — Die Durchmesser (d) der Stäbe sind in Millimetern beigefügt. Die nach den angegebenen Einheiten gemessenen Stabmagnetismen sind durchaus mit y, die Stromstärken durchaus mit x bezeichnet worden.

Zwischen diesen Grössen besteht nach Müller die Relation $x = Ad^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{y}{Bd^3}$, die ich künftighin in der Form $\frac{y}{Bd^3} = \operatorname{arctg} \frac{x}{Ad^{\frac{1}{2}}}$ schreiben werde, wobei d, y und x die bereits angegebenen Bedeutungen haben, während A und B für eine bestimmte Spirale bei gleicher Stablänge innerhalb gewisser Grenzen [1]) constant bleiben. — Ich habe es vorgezogen, anstatt der Stabdurchmesser, die in der Regel leichter genau angebbaren Gewichte der Stäbe einzuführen, wodurch obige Formel in

$$\frac{y}{\beta\gamma} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{1}{2}}} \qquad (1)$$

[1]) Über welche ich nähere Nachweisungen liefern werde.

übergeht, wobei α und β die Constanten der Gleichung sind. — Diese Constanten sollen in der Folge durchaus in der Voraussetzung bestimmt werden, dass die Bogenwerthe $\frac{y}{\beta\gamma}$ stets in Graden ausgedrückt erscheinen, so dass für $x = \infty$, $\frac{y}{\beta\gamma} = 90$ ausfällt; der diesem Falle entsprechende Maximalwerth von y, das magnetische Maximum des betreffenden Stabes nämlich, soll künftig immer mit μ bezeichnet werden; man erhält dann zur Bestimmung von β die Formel:

$$\beta = \frac{\mu}{90\gamma} \tag{2}$$

oder auch $\beta = \frac{\eta}{90}$, wenn η das magnetische Maximum vorstellt, welches einem Stabe vom Gewichte $= 1$ entsprechen würde. — Dabei wird natürlich durchaus dieselbe Magnetisirungsspirale und die gleiche Stablänge vorausgesetzt.

Hätte man die Constanten der Gleichung in der Voraussetzung bestimmt, dass $\frac{y}{\beta\gamma}$ die der Tangente $\frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{1}{2}}}$ entsprechende Bogenlänge für den Radius $= 1$ darstellt, so würde man für sehr kleine x annähernd setzen können $\frac{y}{\beta\gamma} = \frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{1}{2}}}$; wenn man sich aber, wie oben vorausgesetzt wurde, die Constanten so bestimmt denkt, dass $\frac{y}{\beta\gamma}$ die Zahl der Grade des Bogens vorstellt, so muss für sehr kleine x gesetzt werden:

$$\frac{y}{\beta\gamma} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{1}{2}}},$$

somit:

$$\gamma = 57 \cdot 3 \frac{\beta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\alpha} x. \tag{3}$$

Diese letztere Gleichung führt zur Bestimmung des Verhältnisses

$$\frac{\alpha}{\beta} = 57 \cdot 3\, \gamma^{\frac{1}{2}} \frac{x}{y} \tag{4}$$

eine Relation, welche Müller in Verbindung mit jener (2) zur Bestimmung der beiden Constanten benützt hat. Das bezügliche Ver-

fahren besteht nach Müller's Anleitung [1]) in Folgendem. — So weit es gestattet ist, bei dickeren Stäben, namentlich für kleine Stromintensitäten die Proportionalität zwischen x und y gelten zu lassen, führen die Quotienten $\frac{x}{y}$ mittelst der Gleichung (4) zur Kenntniss des Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$; hat man ferner für dünnere Stäbe, deren Magnetisirung dem erreichbaren Maximum ziemlich nahe gekommen war, die Versuchsresultate graphisch dargestellt, so lassen sich aus dem Verlaufe der bezüglichen Intensitätscurven die entsprechenden Maximalwerthe μ mehr oder weniger annähernd schätzen. Man gelangt sofort mit Hilfe der Gleichung (2) zu einer annähernden Kenntniss der Grösse β, und mit Benützung des in der angegebenen Weise bereits gefundenen Werthes von $\frac{\alpha}{\beta}$, auch der Grösse α.

Gegen dieses Verfahren lässt sich, so weit es die Bestimmung der Relation zwischen α und β betrifft, die Einwendung geltend machen, dass — wie ich sogleich nachweisen werde — die beobachteten Intensitätscurven gerade für kleinere Abscissenwerthe am meisten von jenen berechneten Curven abweichen, welche mit den beobachteten für die grösseren Abscissen gut übereinstimmen, und daher mit ihnen nahezu gemeinschaftliche Asymptoten haben. — Während nämlich die berechnete Curve stets concav gegen die Abscissenaxe verläuft, gestalten sich die beobachteten Curven für kleinere Abscisse convex, bis zu einem Inflexionspunkte, von dessen Lage später die Rede sein wird.

Diese in den Beobachtungen von Lenz [2]), Dub [3]), Wiedemann [4]), Quintus Icilius [5]) und auch in den meinigen unzweifelhaft constatirte Anomalie [6]) empfiehlt die mit kleineren Stromstärken gemachten Versuche nicht zur Bestimmung der Relation zwischen

---

[1]) Im citirten Berichte, S. 507.

[2]) Die bezügliche Stelle aus den Petersburger Bulletins vom Jahre 1854 ist in Dub's „Elektromagnetismus", S. 144 erwähnt.

[3]) Ebendaselbst, S. 145.

[4]) Pogg. Ann. Bd. 117, S. 194.

[5]) Popp. Ann. Bd. 121.

[6]) In Müller's Untersuchungen wird dieselbe zwar nicht erwähnt, ist aber darin nichtsdestoweniger nachweisbar. In meinen Versuchen wird sie in dieser Abhandlung nachgewiesen werden.

β und α; sie hat namentlich zur Folge, dass man bei Benützung der geradlinigen Theile der empirischen Curven zu grosse Werthe für $\frac{x}{y}$ und somit auch für $\frac{\alpha}{\beta}$ erhält. — Ich habe zwar allerdings gefunden, dass bei dickeren Stäben die berechnete Curve im Vergleiche mit der beobachteten immer mehr zurückbleibt, so dass über eine gewisse Stabdicke hinaus der geradlinige Theil der beobachteten Curve sogar ausserhalb der berechneten Curve verläuft, wesshalb man denn bei einer gewissen Stabdicke allerdings brauchbare Werthe für $\frac{x}{y}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ erhalten könnte; aber es gibt eben keinen Anhaltspunkt in einem gegebenen Falle von vorneherein ermitteln zu können, welche Stabdicken zu wählen wären, um in der bezeichneten Weise zu brauchbaren Werthen für $\frac{\alpha}{\beta}$ zu gelangen. — Die Benützung der geradlinigen Stücke der empirischen Curven bleibt daher, in der besagten Weise ausgeführt, immer sehr unsicher.

Ich habe daher allgemeinere Methoden zur Bestimmung von α vorgezogen, d. h. solche, welche ohne Einschränkung auf die Anwendbarkeit der Gleichung (4) vielmehr auf die allgemeine Gleichung (1) zurückgehen, und dieselbe nur so weit specialisiren, als es zweckdienlich ist, um das praktische Verfahren in seiner Anwendung auf mehrere Versuchsreihen möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten. — Bevor ich dieselben näher erörtere, will ich bemerken, dass ich den gegen die Abscissenaxe convexen Theil einer empirisch bestimmten magnetischen Intensitätscurve, wovon eben die Rede war, künftighin kurzweg: die „Anomalie" nennen werde, und zwar in der ganzen Ausdehnung vom Ursprunge der Coordinaten bis zum Wendepunkte, also auch mit Inbegriff der in diesem Bereiche vorkommenden scheinbar geradlinigen Stücke.

Die Methoden zur Bestimmung von α, welche ich nun besprechen will, setzen voraus, dass man vorerst β bestimmt habe. — Man suche also zunächst aus einer hinreichenden Anzahl von empirischen Curven, bei welchen eine ziemlich rasche Annäherung an das Maximum ersichtlich ist, diese Maxima zu entnehmen, und berechne daraus den wahrscheinlichsten Werth von β. — Mit Hilfe desselben berechne man sodann für alle untersuchten Stäbe die ihnen entsprechenden Maxima. Um nun α zu bestimmen, hat man in der graphischen Darstellung der Versuche zunächst die Abscissen aufzu-

suchen, welche gewissen aliquoten Theilen der Maxima entsprechen. — Hätte man z. B. in einer Curve die Abscisse x_n aufgesucht, welche der Ordinate $y_n = \frac{\mu}{n}$ entspricht, wobei μ das mittelst des bereits ermittelten β berechnete Maximum vorstellt, so ergibt sich wegen $\mu = 90\beta\gamma$ die Relation

$$\frac{90}{n} = \text{arctg}\,\frac{x_n}{\alpha\gamma^{\frac{1}{4}}} \tag{5}$$

und somit auch

$$\alpha = \frac{x_n}{\gamma^{\frac{1}{4}}}\,\text{cot}\,\frac{90}{n} \tag{6}$$

für $n = 2$ [1]) gelangt man demnach zur einfachen Regel: die gesuchte Constante α ist der Quotient der Abscisse des halben Maximums durch die Potenz $\frac{1}{4}$ des Stabgewichtes. Durch Anwendung dieses Verfahrens auf mehrere Versuchsreihen wird man α sofort mit befriedigender Annäherung bestimmen können.

Ein anderes Verfahren dieser Art, welches theilweise auch eine einfache graphische Ausführung zulässt, beruht auf folgender Betrachtung. — Für $x = \gamma^{\frac{1}{4}}$ erhält man, wenn man den entsprechenden Ordinatenwerth mit ψ bezeichnet und zugleich $\beta\,\text{arctg}\,\frac{1}{\alpha} = C$ setzt

$$\psi = C\gamma. \tag{7}$$

Betrachtet man nun γ als veränderlich, d. h. denkt man sich von mehreren Stäben jeden mit der Stromintensität vom Betrage der Potenz $\frac{1}{4}$ des Gewichtes magnetisirt und die betreffenden ψ bestimmt, so sollen dieselben vermöge (7) mit den betreffenden Stabgewichten proportional sein. — Dabei ist es jedoch nicht nöthig, die Stäbe thatsächlich mit den Stromintensitäten $x = \gamma^{\frac{1}{4}}$ zu magnetisiren, um die Werthe von ψ zu erhalten. Man kann aus den beobachteten Curven für die einzelnen Stäbe unmittelbar die den Abscissen $x = \gamma^{\frac{1}{4}}$ entsprechenden Ordinaten ψ entnehmen, wenn hinreichend nahelie-

---

[1]) Man wird n nicht füglich grösser als 2 annehmen können, damit die betreffenden Coordinaten ausser dem Bereiche der Anomalie bleiben, von deren Ausdehnung später die Rede sein wird.

gende Ordinatenwerthe eine solche Interpolation ermöglichen. — Verzeichnet man sodann die Gewichte der angewendeten Stäbe als Abscissen und die magnetischen Momente, welche denselben für die vorbesagten Magnetisirungen entsprechen als Ordinaten, so erhält man eine von einer Geraden wenig abweichende gebrochene Linie. — Nach dem Verlaufe derselben lässt sich leicht die Gerade zeichnen, von welcher die gebrochene Linie am wenigsten abweicht. Die Tangente ihrer Neigung gegen die Abscissenaxe stellt offenbar die oben erwähnte Grösse $C = \beta \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}$ vor. Ist nun β schon bekannt, so gelangt man auf diese Art zur Kenntniss von α, mittelst der Relation:

$$\alpha = \cot \frac{C}{\beta} \qquad (8)$$

Dieses Verfahren [1]) ist jedoch nicht so allgemein anwendbar wie das vorige. Es lässt sich zwar jederzeit von vorneherein beurtheilen, welche Stabdicken geeignet sind, um im Bereiche der verfügbaren Stromstärken für jeden Stab Beobachtungen in der Nähe von $x = \gamma^{\frac{1}{4}}$ zu gestatten; aber nicht immer sind die Werthe $x = \gamma^{\frac{1}{4}}$ brauchbar, nämlich nur dann, wenn sie nicht im Bereiche der Anomalie vorkommen. — Dabei kommt aber wieder in Frage, welchem Sättigungsgrade die Werthe $x = \gamma^{\frac{1}{4}}$ entsprechen [2]). — Dies hängt nun von dem Betrage von α ab, weil sie nach (5) $\frac{90}{n} = \operatorname{arctg} \frac{x_n}{\alpha \gamma^{\frac{1}{4}}}$,

---

1) Mag man es auch vorziehen, diese Methode, ohne Construction, lediglich auf dem Wege des Calculs auszuführen, so glaubte ich doch das graphische Verfahren erwähnen zu sollen, weil es beim Registriren zahlreicher Versuche eine bequeme Übersicht und eine nicht selten nützliche Controle gegen Rechnungsfehler und andere Irrthümer gewährt.

2) Es lässt sich im Allgemeinen sagen, dass Stromstärken, welche den Potenzen $\frac{1}{4}$ der Stabgewichte proportional sind, in allen Stäben gleiche aliquote Theile des magnetischen Maximums erzeugen, was unmittelbar mit dem bereits von Müller nachgewiesenen Satze identisch ist, dass Stromstärken, welche den Potenzen $\frac{1}{4}$ der Stabdurchmesser proportional sind, die besagte Eigenschaft besitzen.

Ich will noch beifügen, dass der geometrische Ort der Curvenpunkte, welche gleichen Sättigungsgraden der untersuchten Stäbe entsprechen, durch eine Gleichung von der Form $y = kx^{\frac{1}{4}}$ dargestellt wird. — Bezeichnet man nämlich für einen beliebigen Stab vom Gewichte γ, dem das magnetische Maximum μ entspricht, die Curven-

und somit die (hier als unbekannt vorausgesetzte) Zahl n, welche den aliquoten Theil der Sättigung anzeigt, als Function von α erscheint. Man erhält für die vorliegende Frage, wobei $x_n = \gamma^{\frac{1}{2}}$ angenommen ist, $n = \frac{90}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}}$; es wird demnach, sobald $\alpha > 1$ ist, $n > 2$ ausfallen, während nach dem oben Gesagten n nicht grösser als 2 angenommen werden soll, wenn man sicher vermeiden will, dass die Coordinaten y_n und x_n einem Punkte der Curvenanomalie angehören. Übrigens ist klar, dass man, ungeachtet der Abhängigkeit des n von α, doch auch ohne Kenntniss von α, welches ja eben gesucht werden soll, über die Zulässigkeit dieser Methode entscheiden kann, indem aus den graphischen Darstellungen der Versuchsreihen sogleich ersichtlich ist, ob die Werthe $x = \gamma^{\frac{1}{2}}$ diesseits oder jenseits des Inflexionspunktes gelegen sind.

Beispiele der Anwendung dieser Methoden werden im Verlaufe dieser Abhandlung vorkommen.

Für meine Magnetisirungsspirale, deren Länge 91, der innere Durchmesser 30, der äussere 73 Millimeter beträgt, und welche aus sechs Lagen 3 Millimeter dicken, doppelt übersponnenen Kupferdrahtes von je 24 Windungen besteht, fand ich bei meinen Versuchen mit durchaus 103 Millimeter langen Eisenstäben:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 1 \cdot 853 \\ \beta &= 0 \cdot 01865 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

unter der Voraussetzung, dass jede Einheit von x und y eine Million von absoluten Einheiten, beziehungsweise in den magnetischen Momenten der Spirale und des Stabes repräsentirt, und die Stabgewichte in Grammen ausgedrückt werden.

---

ordinate vom Betrage $\frac{\mu}{n}$ mit y_n und die correspondirende Abscisse mit x_n, so folgt aus (2) $y_n = \frac{90\beta\gamma}{n}$, und aus (6) $x_n = \alpha\gamma^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \frac{90}{n}$; setzt man nun $\frac{90\beta}{n} = Q$ und $\alpha \operatorname{tg} \frac{90}{n} = P$, so erhält man die Gleichung $y_n = Q\gamma$ und $x_n = P\gamma^{\frac{1}{2}}$, woraus nach Elimination von γ, und indem man $\frac{Q}{P^{\frac{1}{2}}} = k$ setzt, die Gleichung $y_n = kx_n^{\frac{1}{2}}$ entsteht, worin nunmehr y_n und x_n die laufenden Coordinaten einer Curve vorstellen, welche in der beigegebenen Zeichnung für $n = 2$ construirt und mit k bezeichnet ist. — Es ist bemerkenswerth, dass die Form der Gleichung für Curven dieser Art mit jener übereinstimmt, die ich bei Stahlstäben für den Zusammenhang zwischen dem temporären Magnetismus und der Stromintensität aufgefunden habe.

Aus der Form und den Dimensionen der Spirale lässt sich ihre magnetische Fernwirkung für die absolute Stromeinheit berechnen, d. i. für die Stromintensität, welche, die Flächeneinheit umkreisend, eine Fernwirkung vom Momente der absoluten magnetischen Einheit ausübt. Bei Ausführung dieser Rechnung ergibt sich, dass die von der absoluten Stromeinheit durchflossene Spirale ein magnetisches Moment von 325961 absoluten Einheiten ausübt; hieraus folgt, dass 3·0678 absolute Stromeinheiten erforderlich sind, um der Spirale ein magnetisches Moment von 1000000 absoluten Einheiten zu ertheilen. — Diese Stromintensität entspricht 3·2142 chemischen Einheiten [1]), und ist die in dieser Abhandlung geltende Stromeinheit. Multiplicirt man damit die Zahl der Windungen = 144, so erhält man 462·846 für die magnetisirende Kraft nach chemischem Masse, welche die Spirale bei dieser Stromstärke ausübt. Die bei meinen Versuchen in Anwendung gebrachten Stromstärken und magnetisirenden Kräfte waren also folgende:

x.	Stromstärken		Magnetisirende Kräfte nach chemischem Masse
	nach absolutem Masse	nach chemischem Masse	
1	3·068	3·214	463
2	6·136	6·428	926
3	9·203	9·643	1389
4	12·271	12·857	1851
5	15·339	16·071	2314
6	18·407	19·285	2777
7	21·475	22·499	3240
8	24·543	25·713	3703
9	27·610	28·927	4166
10	30·678	32·142	4628
15	46·017	48·213	6943

Der dünnste bei meinen Versuchen in Anwendung gebrachte Stab hat 1·13 Millimeter Durchmesser und wiegt 0·773 Grammen.

[1]) Dieses Ergebniss ist auch durch elektrolytische Versuche mit genügender Übereinstimmung bestätiget worden.

Derselbe erlangte, wie aus den nachstehenden Resultaten ersichtlich ist, bei Anwendung der Stromstärke $x = 15$, das Moment $y = 1 \cdot 214$. — Bei dieser Magnetisirung entfällt auf die Gewichtseinheit das Moment $\frac{1 \cdot 214}{0 \cdot 773} = 1 \cdot 5701$. — Diesem Stabe würde für meinen Apparat, nach (2) und (9) berechnet, ein magnetisches Maximum vom Betrage $1 \cdot 2981$, somit für die Gewichtseinheit $1 \cdot 6786$ entsprechen. Die Magnetisirung hatte also nahezu 94 Pct. vom theoretischen Maximum erreicht.

Der dünnste von Müller angewendete Stab hatte 6 Millimeter Durchmesser und war 330 Millimeter lang. Das Gewicht desselben kann, wenn nämlich das specifische Gewicht $7 \cdot 78$ vorausgesetzt wird, zu $72 \cdot 591$ Gram. angenommen werden. — Die grösste bei diesem Stabe angewendete Stromintensität betrug, mit Rücksicht auf die angewendeten Werthe [1]) der Ablenkungen an der Tangentenboussole und des Reductionsfactors (70) der letzteren, nach chemischem Mass $60 \cdot 958$, somit die magnetisirende Kraft der benützten Spirale von 380 Windungen: $23164 \cdot 6$; unter der Einwirkung derselben bewirkte der Stab (für sich allein) die Magnetometerablenkung $2 \cdot 52$, welche nach Müller's Angaben über den Werth der Scalentheile dem Momente von 136660000 absoluten Einheiten entspricht. — Reducirt man diesen Betrag auf die Gewichtseinheit, so erhält man, auf die in dieser Abhandlung angenommene Einheit der Momente bezogen, die magnetische Intensität: $1 \cdot 8826$. — Demselben Stabe würde, nach Massgabe der von Müller für die betreffende Spirale bestimmten Constanten seiner Formel, das magnetische Maximum von 189865000 absoluten Einheiten, der Gewichtseinheit also, nach meiner Intensitätseinheit ausgedrückt, das Maximum $2 \cdot 6155$ entsprechen. — Die Magnetisirung hat also kaum 72 Pct. erreicht [2]), während dieselbe bei meinen Versuchen

[1]) Müller's Bericht S. 504. Übrigens sind in den hier stehenden Zahlen mehrere Unrichtigkeiten. In der Rubrik s soll es statt $0 \cdot 667$ heissen $0 \cdot 668$; ferner in der Rubrik m statt $2 \cdot 61$, $2 \cdot 52$ und statt $1 \cdot 415$, $1 \cdot 615$.

[2]) Bei den in Pogg. Ann. Bd. 82 mitgetheilten Müller'schen Versuchen ist auch ein noch dünnerer Stab benützt worden ($2 \cdot 9$ Millim.); derselbe ist jedoch nur mit vier verschiedenen Stromstärken magnetisirt worden, wobei die kleinste und grösste magnetische Intensität des Stabes sich nur wie 1 zu $1 \cdot 2$ zu einander verhielten, so dass die bezüglichen Resultate, wo es sich um die Magnetisirungsgesetze bei

bis nahezu 94 Pct. bewerkstelligt worden ist. — Gleichwohl sind die der Gewichtseinheit ertheilten höchsten Magnetisirungen bei Müller's und meinen Versuchen beziehungsweise 1·883 und 1·570 gewesen; da es jedoch bei der Frage: wie weit die Übereinstimmung der Versuche mit der Formel geprüft worden ist, offenbar auf die erreichten aliquoten Theile der theoretisch möglichen Maxima ankommt, so haben meine Versuche in dieser Richtung eine weit grössere Ausdehnung. — Dasselbe gilt bezüglich der Querschnitte der angewendeten Stäbe. Der dickste von mir untersuchte Stab (Nr. 10) mit 28 Millimeter Durchmesser und 503·77 Grm. Gewicht, hat im Vergleiche mit dem dünnsten (Nr. 1), von welchem oben die Rede war, einen 651·42mal grösseren Querschnitt, während die Querschnitte des dünnsten (6 Millim.) und des dicksten (44·5 Millim.) der von Müller untersuchten Stäbe nur dem Verhältnisse 1 : 55 entsprechen [1]); meine Versuche haben daher bezüglich der Verschiedenheit der angewendeten Querschnitte eine beinahe 12mal grössere Ausdehnung. — In wie weit dabei die Müller'sche Formel mit der Erfahrung übereinstimmt, wird später erörtert werden. — Übrigens habe ich die Anwendbarkeit derselben auch bei Eisendrahtbündeln und verschiedenen anderen discontinuirlichen Eisenkernen aus runden und vierkantigen Stäben untersucht [2]), und auch noch Versuche mit einer engeren Magnetisirungsspirale beigefügt, die zu wichtigen Folgerungen über die Constanten der Müller'schen Formel geführt haben.

Ich lasse nun zunächst die Versuche mit den massiven cylindrischen Stäben Nr. 1 bis 10 folgen. Diese Stäbe haben nachstehende Durchmesser und Gewichte [3]).

---

sehr ungleichen Sättigungsgraden handelt, nicht in Betracht kommen können. — Man vergleiche die Schlussnote.

[1]) Siehe die vorige Anmerkung.

[2]) Die bezüglichen Resultate bilden den Gegenstand einer demnächst erscheinenden zweiten Abhandlung.

[3]) Da nicht alle Stäbe genau cylindrisch sind, so bleiben die Angaben der Gewichte viel sicherer als jene der Durchmesser. Es kommen auch nur die Gewichte in Rechnung, während die Durchmesser nur beigefügt sind, damit man einen Überblick über alle Grössenverhältnisse habe, ohne die Stabdicken erst nach den Gewichten beurtheilen zu müssen.

Nr.	d	γ
1	1·13	0·773
2	2·11	2·700
3	2·20	2·910
4	3·08	5·720
5	4·10	10·100
6	6·07	22·490
7	12·10	87·970
8	14·00	127·940
9	20·00	247·328
10	28·00	503·770

Die in der folgenden Zusammenstellung der Resultate der Stabnummern beigefügten eingeklammerten Zahlen bedeuten die Stabdurchmesser in ganzen Millimetern.

$x =$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	Stab
y	berechnet	0·479	0·759	0·909	0·997	1·053	1·092	1·120	1·142	1·159	1·173	1·214	Nr. 1
	beobachtet	0·393	0·732	0·869	0·915	0·938	0·960	1·015	1·038	1·084	1·121	1·166	(1)
y	berechnet	0·724	1·366	1·891	2·301	2·620	2·868	3·065	3·222	3·352	2·459	3·798	Nr. 2
	beobachtet	0·549	1·098	1·647	2·242	2·536	2·838	3·003	3·114	3·251	3·297	3·655	(2)
y	berechnet	0·739	1·403	1·954	2·394	2·738	3·011	3·228	3·403	3·547	3·667	4·050	Nr. 3
	beobachtet	0·640	1·372	2·105	2·792	3·113	3·315	3·425	3·664	3·692	3·756	4·106	(2)

$x =$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	Stab
y	berechnet	0·886	1·736	2·521	3·229	3·854	4·396	4·865	5·272	5·625	5·929	6·982	Nr. 4
	beobachtet	0·595	1·372	2·132	2·884	3·664	4·263	4·954	5·342	5·813	6·203	7·197	(3)
y	berechnet	1·025	2·031	3·005	3·928	4·798	5·604	6·348	7·028	7·650	8·217	10·365	Nr. 5
	beobachtet	0·823	1·821	2·737	3·618	4·585	5·647	6·453	7·645	8·582	9·335	12·089	(4)
y	berechnet	1·254	2·504	3·737	4·950	6·145	7·299	8·427	9·513	10·566	11·573	15·969	Nr. 8
	beobachtet	1·061	2·269	3·366	4·570	5·818	6·955	8·098	9·240	10·438	11·637	17·233	(6)

$x =$		2	4	6	8	10	15	Stab
y	berechnet	3·528	7·055	10·550	14·029	17·457	24·185	Nr. 7
	beobachtet	3·270	6·639	10·025	13·309	16·675	24·600	(12)
y	berechnet	3·866	7·755	11·621	15·439	19·226	28·636	Nr. 8
	beobachtet	3·821	7·645	11·378	15·126	18·970	27·863	(14)
y	berechnet	4·567	9·134	13·701	18·268	22·788	34·136	Nr. 9
	beobachtet	4·926	9·760	14·603	19·334	24·270	35·948	(20)

Bei den angeführten Versuchen zeigt sich, mit wenigen Ausnahmen, eine ganz befriedigende Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Werthen, und zwar in der sehr grossen Ausdehnung von einem Momente im Betrage 0·393 bis zu dem nahe neunzigfachen im Betrage 35·948. — Auffallend ist nur das bei dem Stabe Nr. 5 bei der Stromstärke 15 beobachtete Moment 12·089 im Vergleiche mit dem viel kleineren berechneten 10·365. Derselbe Stab hat auch bei den Stromstärken 9 und 10 im Vergleiche mit den anderen Versuchsreihen weniger zutreffende Resultate ergeben. Übrigens hat seine Intensitätscurve [1]) so auffallende Unregelmässigkeiten im Vergleiche mit allen übrigen, dass den Versuchen mit diesem Stabe weniger Gewicht beizulegen ist; sie hätten desshalb auch füglich ausgelassen werden können, wenn es nicht meine Absicht gewesen wäre: die Beobachtungen ohne Auswahl, sondern vielmehr mit Inbegriff der von der Rechnung am meisten abweichenden, mitzutheilen. — Andererseits kommt auch noch in Betracht, dass überhaupt bei Untersuchungen dieser Art, wo die Regelmässigkeit der auftretenden Magnetisirungen so sehr durch die moleculare Gleichförmigkeit der ange-

[1]) Dieselbe ist in die beiliegende Zeichnung nicht aufgenommen worden.

wendeten Eisenmassen bedingt ist, auch die beste Formel nicht jenen Grad von Übereinstimmung gewähren kann, der eben nur dort möglich ist, wo die Natur der Sache eine stetige Gesetzmässigkeit im Verlaufe der Erscheinungen bedingt.

Da die Querschnitte der Stäbe Nr. 1 und 9 sich nahe wie 1 zu 320 verhalten, so ist damit das Zutreffen der Formel in beinahe sechsmal grösserer Ausdehnung nachgewiesen, als durch die Versuche von Müller. — Man bemerkt übrigens, dass die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch bei den Stäben, deren Dicke die halbe Weite der Spirale nicht überschreitet, eine viel genauere ist, als bei dem Stabe Nr. 9, dessen Dicke bereits $\frac{1}{3}$ von der Weite der Spirale beträgt. Bei noch grösseren Stabdicken zeigt sich dir Formel nicht mehr verwendbar, vorausgesetzt, dass die Constanten derselben aus Versuchen mit verhältnissmässig dünnen, d. h. mit solchen Stäben, die noch eine rasche Annäherung an das Maximmum gezeigt haben, entnommen sind; eine Bedingung, welche übrigens wohl immer zutreffen muss, wenn die Werthe von β verlässlich sein sollen. — Das besagte Auftreten von auffallenden Abweichungen zwischen Versuch und Rechnung bei Stäben, welche noch dicker sind als $\frac{1}{3}$ von der Weite der Spirale, ist aus nachstehender Beobachtungsreihe ersichtlich.

$x =$		2	4	6	8	10	15	Stab
y	berechnet	5·450	10·899	16·349	22·826	27·248	40·872	Nr. 10
	beobachtet	6·453	12·872	19·407	25·823	32·702	48·781	(28)

Von den angeführten Versuchsreihen sind jene, welche sich auf die Stäbe Nr. 1, 2, 4, 6, 7 und 9 beziehen, in der beigegebenen Zeichnung [1]) graphisch dargestellt worden. Die übrigen mussten, um die Zeichnung nicht durch zu viele Curven undeutlich zu machen, fortgelassen werden.

---

[1]) Die berechneten Curven sind punktirt, die beobachteten ausgezogen.

Bei Nr. 1, 2 und 4 ist noch eine rasche Annäherung an ein Maximum der Magnetisirung ersichtlich. Dasselbe ist für Nr. 1 zu 1·3, für Nr. 2 zu 4·5, für Nr. 4 zu 9·6 angenommen worden; ferner für die in die Zeichnung nicht aufgenommenen Curven der Stäbe Nr. 3 und 5, beziehungsweise zu 4·9 und 17 [1]); hieraus ergibt sich für die Gewichtseinheit das magnetische Maximum 1·6786, somit $\beta = \frac{1 \cdot 6786}{90} 0 \cdot 01865$ (nach 2.).

Zur sorgfältigen Bestimmung von α wurden zahlreiche Ordinatenwerthe benützt, welche dafür die Zahl $\alpha = 1 \cdot 853$ ergeben. — Beispielsweise mag hier eine Vergleichung der Bestimmung dieses Werthes nach den Formeln (4), (6) und (8) angeführt werden.

Wenn man, um nach Müller die Formel (4) anzuwenden, die Curve des Stabes Nr. 7 benützt, welche wenigstens innerhalb der Abscissen 0 und 6 merklich geradlinig verläuft, so erhält man durch Substitution der betreffenden Werthe $\alpha = 1 \cdot 9588$, eine beträchtlich zu grosse Zahl, aus Gründen, die bereits erörtert und gegen dieses Verfahren geltend gemacht worden sind.

Eine viel bessere Annäherung gibt das vorgeschlagene Verfahren: die Constante α aus den Abscissen der halben Maxima nach dem oben nachgewiesenen Satze zu berechnen. — Dem Stabe Nr. 4 entspricht das Maximum 9·6; die Abscisse, welche dem halben Werthe dieses Maximums, nämlich der Ordinate 4·8 entspricht, ist = 6·78; dividirt man diese Zahl durch die Potenz $\frac{2}{3}$ des Stabgewichtes ($\gamma^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 699$), so erhält man $\alpha = 1 \cdot 834$, was dem aus vielen Bestimmungen hervorgegangenen Werthe $\alpha = 1 \cdot 853$ schon viel näher kommt.

Die Anwendung der Formel (8) ist hier, da die $x = \gamma^{\frac{2}{3}}$ zu geringen Sättigungsgraden entsprechen, aus den bereits erörterten Gründen nicht füglich anwendbar. Wollte man dieses Verfahren etwa beim Stabe Nr. 6 in Anwendung bringen, wo $x = \gamma^{\frac{2}{3}}$ ausserhalb des Wendepunktes zu liegen scheint, so ergäbe sich für $x = \gamma^{\frac{2}{3}} = 10 \cdot 33$, die Ordinate $\psi = 12$, somit $C = \frac{\psi}{\gamma} = \frac{12}{22 \cdot 49} = 0 \cdot 53357$, also $\frac{C}{\beta} = 28 \cdot 608$, folglich $\alpha = \cot 28 \cdot 608 = \cot 28°36' \cdot 5 = 1 \cdot 833$;

[1]) Zur ersten Schätzung der Maxima sind die Curven Nr. 1 bis 4 benützt worden; die hier angesetzten Werthe sind die nach Massgabe der Gewichtsverhältnisse repartirten Mittelwerthe.

eine Zahl, die dem angegebenen Werthe von α ebenfalls viel näher kommt als jene, die sich nach dem von Müller empfohlenen Verfahren herausgestellt hat.

Betrachtet man die Curven für die Stäbe Nr. 2, 4 und 6 und vergleicht die Ordinaten der Wendepunkte mit den Werthen der halben Maxima, so stellt sich folgendes heraus:

Stab	Ordinate des Wendepunktes	Halbes Maximum
Nr. 2	2·24	2·25
Nr. 4	3·67	4·80
Nr. 6	11·65	18·87

Es ergibt sich also, was ich schon in meiner Abhandlung über das elektromagnetische Verhalten des Stahles gelegentlich ausgesprochen habe, dass die Wendepunkte innerhalb der Punkte der halben Sättigung liegen, und zwar, wie man bemerkt, bei zunehmender Stabdicke immer weiter gegen den Ursprung der Coordinaten hin. Man findet dies auch in anderen Versuchsreihen bestätigt, wenn man dieselben graphisch darstellt, und gelangt sofort zum Resultate: die Wendepunkte liegen zwischen den Punkten, welche dem Drittel und der Hälfte der Sättigung entsprechen, und mit abnehmender Stabdicke immer näher den letzteren.

Man bemerkt ferner, dass die berechneten Curven für die Stäbe Nr. 4 und 6 von den empirischen Curven in der Nähe der Wendepunkte geschnitten werden, während diese bei den Stäben Nr. 1 und 2 von jenen eingeschlossen erscheinen, indem den berechneten Curven durchwegs die grösseren Ordinaten zukommen; dagegen sind beim Stabe Nr. 9, dessen Dicke die halbe Weite der Spirale schon bedeutend übertrifft, die beobachteten Ordinatenwerthe grösser als die berechneten, was bei dem noch dickeren Stabe Nr. 10 noch auffallender wird. — Die Anwendung der Müller'schen Formel kann demnach, wie bereits bemerkt worden ist, höchstens bis zu Stabdicken von $\frac{1}{3}$ des inneren Durchmessers der Spi-

rale ausgedehnt werden. — Bei den geringeren Stabdicken müssen die auffallendsten Abweichungen natürlich zwischen dem Coordinatenursprung und dem Wendepunkt der empirischen Curven vorkommen, weil innerhalb dieses Intervalles die beobachteten Curven convex gegen die Abscissenaxe sind, während die nach Müller's Formel berechneten selbstverständlich immer concav sein müssen. — Obgleich demnach eine Übereinstimmung zwischen dieser Formel und den Versuchen, so weit es sich um die besagte Anomalie handelt, niemals möglich ist, so behauptet die Müller'sche Gleichung doch immerhin den Werth einer brauchbaren Näherungsformel, vorausgesetzt, dass die Constanten nach den gegebenen Regeln bestimmt wurden, und die Stabdicken kleiner sind als $\frac{1}{3}$ der Weite der Magnetisirungsspirale. — Bezüglich der Bestimmung der Constanten muss insbesondere hervorgehoben werden, dass der Coëfficient β jedenfalls aus Versuchen mit solchen Stäben in der angegebenen Weise entnommen werden muss, welche thatsächlich nahe bis zur Sättigung magnetisirt worden sind, und aus deren Intensitätscurven man daher die Maxima mit ziemlicher Genauigkeit beurtheilen kann. — Ordinatenwerthe, welche geringeren Sättigungsgraden entsprechen, sind zur Bestimmung von β geradezu unbrauchbar, und würden (günstige Zufälle ausgenommen) in der Regel nur zu einer unbrauchbaren Formel führen, welche bei den höheren Sättigungsgraden immer mehr von den Versuchen abweicht, und daher dem Haupterforderniss eines mathematischen Ausdruckes für das Gesetz der magnetischen Sättigung am allerwenigsten entsprechen würde. — Man überzeugt sich nämlich sehr leicht, dass sehr kleine Fehler in den Ordinaten geringer Sättigungsgrade, wenn diese Ordinaten zur Bestimmung von β benützt würden, schon sehr grosse Fehler im Werthe des daraus berechneten Maximums verursachen. — Das Gesagte ergibt sich aus der Discussion der Formel, lässt sich aber am auffallendsten an einem speciellen Falle anschaulich machen. — Hätte man z. B. (unter der Annahme $\alpha = 1 \cdot 853$) beim Stabe Nr. 6 den Werth von β aus der Ordinate für $x = 5$ bestimmen wollen, so erhielte man, wenn die Beobachtung $y = 6 \cdot 145$ ergeben hätte, $\beta = 0 \cdot 01865$ und somit $\mu = 90\beta\gamma = 37 \cdot 75$; wäre dagegen $y = 6 \cdot 445$ beobachtet worden, so ergäbe sich $\beta = 0 \cdot 019588$, und somit $\mu = 44 \cdot 054$; hieraus geht hervor, dass ein Fehler von etwa 5 Pct. im Ordinatenwerthe, im

Werthe von μ schon einen Fehler von beinahe 17 Pct. verursacht hat, während man bei der directen Schätzung des μ in der Nähe der Sättigungspunkte dünner Stäbe, wohl bei weitem nicht einen so groben Irrthum wird begehen können.

Sofort ist auch einleuchtend, dass man eine für höhere Sättigungsgrade ganz unbrauchbare und somit ihrem Hauptzwecke nicht entsprechende Formel erhalten müsste, wenn man die Constanten nach Ordinaten bestimmen würde, welche der Anomalie der betreffenden Curve angehören, um auf diese Art innerhalb dieser Grenzen eine möglichst befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erzielen.

Sollte es sich um eine Formel handeln, welche innerhalb der Anomalie der Beobachtungen näher kommt als die Müller'sche Gleichung bei richtiger Bestimmung von β, so kann mit befriedigender Annäherung die Gleichung der Geraden benützt werden, welche vom Ursprunge der Coordinaten durch den Punkt der halben Sättigung geführt wird, welcher Punkt bei dünnen Stäben in der Nähe des Wendepunktes liegt, bis zu welchem die empirischen Curven in der That nur wenig von einer Geraden abweichen, da die Convexität gegen die Abscissenaxe immer sehr gering ist. — Die Gleichung der besagten Geraden ist offenbar

$$y = 45\,\frac{\beta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\,x, \qquad (10)$$

während Müller's Gleichung für kleinere Abscissen [1]) die Näherungsformel $y = 57 \cdot 3\,\frac{\beta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\alpha}\,x$ gibt.

Es mögen hier einige nach dieser Gleichung bestimmte Werthe mit den beobachteten sowohl, als auch mit den nach Müller's Gleichung berechneten verglichen werden. Dabei versteht sich von selbst, dass diese Gleichung nicht über die Abscisse des halben Maximums hinaus angewendet werden kann. Von diesem Punkte an entspricht aber auch die Müller'sche Gleichung allen Anforderungen, die man an eine empirische Näherungsformel für das Gesetz der magnetischen Sättigung füglich stellen kann.

---

[1]) Da die Abscisse des halben Maximums $= \alpha\gamma^{\frac{1}{2}}$, und das halbe Maximum $= 45\beta\gamma$ ist.

$x =$	1	2	3	Stab
nach Müller . .	0·724	1·366	1·891	Nr. 2
nach Gleichung (10)	0·581	1·161	1·742	(2)
beobachtet . . .	0 549	1·098	1·647	

$x =$	1	2	3	4	5	6	Stab
nach Müller . .	0·886	1·736	2·521	3·229	3·854	4·396	Nr. 4
nach Gleichung (10)	0·700	1·401	2·101	2·802	3·502	4·202	(3)
beobachtet . . .	0·595	1·372	2·132	2·884	3·664	4·263	

Die nach Gleichung (10) berechneten Werthe stimmen durchwegs viel genauer mit den Versuchen. — Übrigens ist aus dem oben Gesagten klar, dass diese Gleichung nur bei Stäben anwendbar ist, welche dünn genug sind, um eine rasche Convergenz der Intensitätscurve gegen ihre Asymptote zu bedingen; weil bei dickeren Stäben der Wendepunkt zu weit vom Punkte der halben Sättigung abliegt. — Dagegen ist bei dicken Stäben die Anomalie so wenig hervortretend, dass man mit der Müller'schen Formel ausreicht, vorausgesetzt, dass die Stabdicken die mehrfach erwähnte Grenze nicht überschreiten.

Die Müller'sche Gleichung schliesst bekanntlich, wie Müller selbst bereits nachgewiesen hat, die Folgerung in sich, dass — so weit man den Stabmagnetismus nach Formel (3) der Stromstärke proportional setzen kann — die durch gleiche Ströme in verschiedenen Eisenstäben erzeugten Magnetismen den Quadratwurzeln der Stabdurchmesser proportional sind. — Dieses Gesetz hat in den Versuchen von Hankel und von Dub experimentelle Bestätigungen gefunden, während Lenz und Jacobi [1]), so wie auch Feilitzsch aus ihren Versuchen die Proportionalität mit den Durchmessern selbst gefolgert haben, Wiedemann [2]) hat die Gründe angedeutet, welche, im Wider-

[1]) Dagegen hat Dub nachgewiesen, dass, bei Berücksichtigung des Einflusses, welchen der Abstand der Spiralwindungen vom Eisenkern ausübt, auch die Versuche von Lenz und Jacobi besser mit der ersteren Annahme stimmen. Siehe Dub, „Elektromagnetismus", S. 208.

[2]) Wiedemann, „Galvanismus und Elektromagnetismus", S. 328.

spruche mit der Annahme einer allgemeinen Giltigkeit des einen oder des anderen der vorgenannten Gesetze, überhaupt kein so einfaches Gesetz erwarten lassen.

Meine Versuche sind zwar ebenfalls weder mit dem einen noch mit dem anderen dieser Gesetze in genauer Übereinstimmung, liegen aber ganz unverkennbar viel näher einer Proportionalität mit den Quadratwurzeln der Durchmesser, als mit den Durchmessern selbst, wie aus folgender Zusammenstellung ersichtlich ist, welcher die (aus den Gewichten berechneten) Durchmesser und die für $x = 2$ genommenen Ordinaten zu Grunde liegen.

Stab	d	$\frac{y}{\sqrt{d}}$	$\frac{y}{d}$
Nr. 1	1·108	0·695	0·660
Nr. 2	2·071	0·763	0·530
Nr. 3	2·150	0·936	0·638
Nr. 4	3·015	0·790	0·455
Nr. 5	4·006	0·910	0·455
Nr. 6	5·978	0·928	0·380
Nr. 7	11·823	0·951	0·277
Nr. 8	14·258	1·012	0·268
Nr. 9	19·824	1·106	0·248
Nr. 10	28·292	1·213	0·228

Dass die temporären Momente eines elektromagnetisirten Eisenstabes bei kleinen Stromintensitäten rascher anwachsen als diese, und dadurch die mehrfach erwähnte Anomalie bilden, ist auch an meinen Versuchen leicht nachzuweisen, wenn man für jeden Stab die successiven Quotienten $\frac{y}{x}$ aus den angeführten Beobachtungen entnimmt. Dieser Quotient wächst bis zu einem gewissen Maximum (welches dem Wendepunkte entspricht) und nimmt von hier an fortwährend ab, weil ja dem $x = \infty$ ein endliches y zukommt. Die folgende Zusammenstellung gibt die Werthe $\frac{y}{x}$ für die Stäbe Nr. 2, 3, 4 und 5. Dabei sind Nr. 1 und die übrigen weggelassen, weil beim ersten dieser Stäbe das Maximum von $\frac{y}{x}$ schon für $x = 1$ eintritt, bei den übrigen aber erst bei $x \geq 10$.

$x =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nr. 2	0·549	0·549	0·549	0·560	0·507	0·473	0·429	0·389	0·361	0·330
Nr. 3	0·640	0·686	0·702	0·698	0·623	0·552	0·489	0·458	0·410	0·376
Nr. 4	0·594	0·686	0·711	0·721	0·723	0·710	0·708	0·668	0·645	0·620
Nr. 5	0·823	0·910	0·912	0·904	0·917	0·941	0·922	0·956	0·954	0·933

Übrigens habe ich beobachtet, dass bei dickeren Stäben das Anwachsen der Werthe $\frac{y}{x}$ unregelmässig wird [1]); als Beleg dafür mag zunächst auf die schon bei Nr. 5 für $x = 4$ und $x = 7$ stattfindenden Abweichungen hingewiesen werden, mit dem Bemerken, dass solche Schwankungen in den Werthen $\frac{y}{x}$ bei den dickeren Stäben noch häufiger eintreten.

Um auf die Müller'sche Formel zurückzukommen, mögen auch noch die Beziehungen besprochen werden, welche nach Müller's Andeutungen zwischen der Länge der Spirale und den Constanten seiner Formel bestehen sollen. — Müller hatte für zwei Spiralen (deren eine 300 Millim. lang war, die andere aber eine Combination aus zwei in einandergeschobenen Spiralen, deren innere 540 Millim., die äussere 480 Millim. Länge hatte) bei Anwendung entsprechender Stablängen (beziehungsweise 330 und 570 Millim.) die beiden Formeln erhalten:

$$\frac{y}{58600 d^2} = \text{arctg}\, \frac{x}{425 d^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{y}{81390 d^2} = \text{arctg}\, \frac{y}{229 d^{\frac{1}{2}}};$$

und bemerkt, dass die Coëfficienten von $d^{\frac{1}{2}}$ den Längen der Spiralen nahe verkehrt proportional sind [2]), vorausgesetzt, dass man bei der combinirten Spirale die Länge der inneren als massgebend annimmt; woraus sich, wenn weitere Versuche diese Relation bestätigen, die Möglichkeit ergeben würde, obige Coëfficienten von $d^{\frac{1}{2}}$ allgemeiner durch $\frac{12558}{l}$ darzustellen, wobei l die Länge der Spirale bedeutet. — Bezüglich der Coëfficienten von d^2 bemerkt Müller, dass dieselben nicht, wie man beim ersten Anblick vermuthen könnte, den Stablängen proportional sind, sondern von dieser Proportionalität so weit abweichen, dass man dieselbe nur

---

[1]) Was wohl mit der Beobachtung übereinstimmt, dass diese Anomalie bei dickeren Stäben weniger hervortritt.

[2]) Müller's Bericht S. 517. — Dabei werden Stablängen vorausgesetzt, welche die Spirallänge wenig (höchstens um $\frac{1}{10}$) überragen.

„wenn es sich um eine allererste ganz grobe Annäherung handelt", annehmen könnte, wodurch man für die obigen Coëfficienten von d^3 allgemeiner $172\,l$ erhielte. — Schreibt man die Müller'sche Gleichung in der Form $\frac{y}{Bd^3} = \text{arctg}\,\frac{x}{Ad^{\frac{1}{2}}}$, so ergäbe sich für Spiralen von verschiedenen Längen, wenn $B = bl$ und $A = \frac{a}{l}$ gesetzt wird, die allgemeinere Formel

$$\frac{y}{bld^3} = \text{arctg}\,\frac{x}{\frac{a}{l}d^{\frac{1}{2}}} \qquad (11)$$

Ich will nun die Werthe von A und B, welche Müller für seine 300 Millim. lange Spirale fand, mit denjenigen vergleichen, welche sich für meine oben beschriebene Magnetisirungsspirale herausgestellt haben, und für eine zweite, die ich sogleich besprechen werde. — Diese ist, so wie die vorige, 91 Millim. lang, dagegen aber nur 9 Millim. weit; die Drahtdicke, Zahl der Drahtlagen und der Windungen sind ganz dieselben wie bei der gleichlangen weiteren Spirale. Ich will diese weitere Spirale mit I, die engere mit II, und die von Müller benützte 300 Millim. lange mit III bezeichnen.

Um die Constanten für die Spirale II zu bestimmen, wurden ein paar Versuchsreihen mit den Stäben Nr. 2 und 5 gemacht, die nachstehend verzeichnet sind, — dabei ist wohl zu beachten, dass die Spirale II, bei Anwendung eines Stromes, der in der Spirale I das Moment 1 erzeugt, nur das Moment 0·413 erlangt, welches bei den folgenden Versuchen mit der Spirale II als Einheit der x anzusehen ist. Die Einheit der y ist dieselbe wie bisher.

x	2	4	6	8	10	15	Stab
y	1·555	2·655	3·068	3·251	3·343	3·618	Nr. 2
y	2·151	4·171	6·295	8·300	9·997	11·618	Nr. 5

Diesen Versuchen entsprechen für die Gleichung

$$\frac{y}{\beta\gamma} = \text{arctg}\,\frac{x}{\alpha\gamma^{\frac{1}{2}}}$$

unmittelbar die Werthe

$$\alpha = 1 \cdot 90504$$
$$\beta = 0 \cdot 02140.$$

Die für die Spirale III angegebenen Constanten setzen aber voraus, dass anstatt der Gewichte die Stabdurchmesser in Rechnung kommen, ferner dass die x die magnetisirenden Kräfte nach chemischem Masse [1]), und die y die magnetischen Momente nach absoluten Einheiten vorstellen. — Reducirt man die Constanten für die Spiralen I und II nach Massgabe dieser Voraussetzungen, und vergleicht sie mit jenen für die Spirale III, so ergeben sich folgende Werthe für A und B, welchen auch noch die Längen und Weiten der betreffenden Spiralen beigefügt sind.

Spirale	Weite	Länge	A.	B.
I	30	91	606·033	11740
II	9	91	623·03	13468
III	49	300	425	58600

Die Längen der Spiralen I und II einerseits, und der Spirale III andererseits verhalten sich nahe wie 1 zu 3·3; demnach müssten unter der Annahme der verkehrten Proportionalität zwischen A und l die Werthe von A bei I und II 3·3mal grösser sein als bei III; sie sind es jedoch beziehungsweise nur 1·426 und 1·466mal. Ein Ergebniss, welches die fragliche Annahme wohl als unhaltbar erscheinen lässt. — Bezüglich der Coëfficienten B zeigt sich, dass ihre Werthe für I, II und III sich beziehungsweise wie

$$1;\ 1 \cdot 47 \text{ und } 4 \cdot 99$$

verhalten, die correspondirenden Spirallängen aber wie

$$1;\ 1 \text{ und } 3 \cdot 3,$$

---

[1]) Product der Stromstärke nach chemischem Masse mit der Zahl der Spiralwindungen.

wodurch die fragliche Proportionalität zwischen B und l ebenfalls nicht bestätigt wird.

Übrigens dürften A und B Functionen, nicht nur der Länge, sondern auch vom inneren und äusseren Durchmesser der Spirale sein, und es ist zu bedauern, dass Müller nicht für alle Spiralen, die er bei seinen Untersuchungen benützte, vollständig die Dimensionen angegeben hat, aus deren Vergleichung mit den bezüglichen Werthen von A und B [1]) sich Anhaltspunkte zur Beurtheilung dieser Frage entnehmen liessen, welche wohl noch zu ausgedehnten Untersuchungen auffordern.

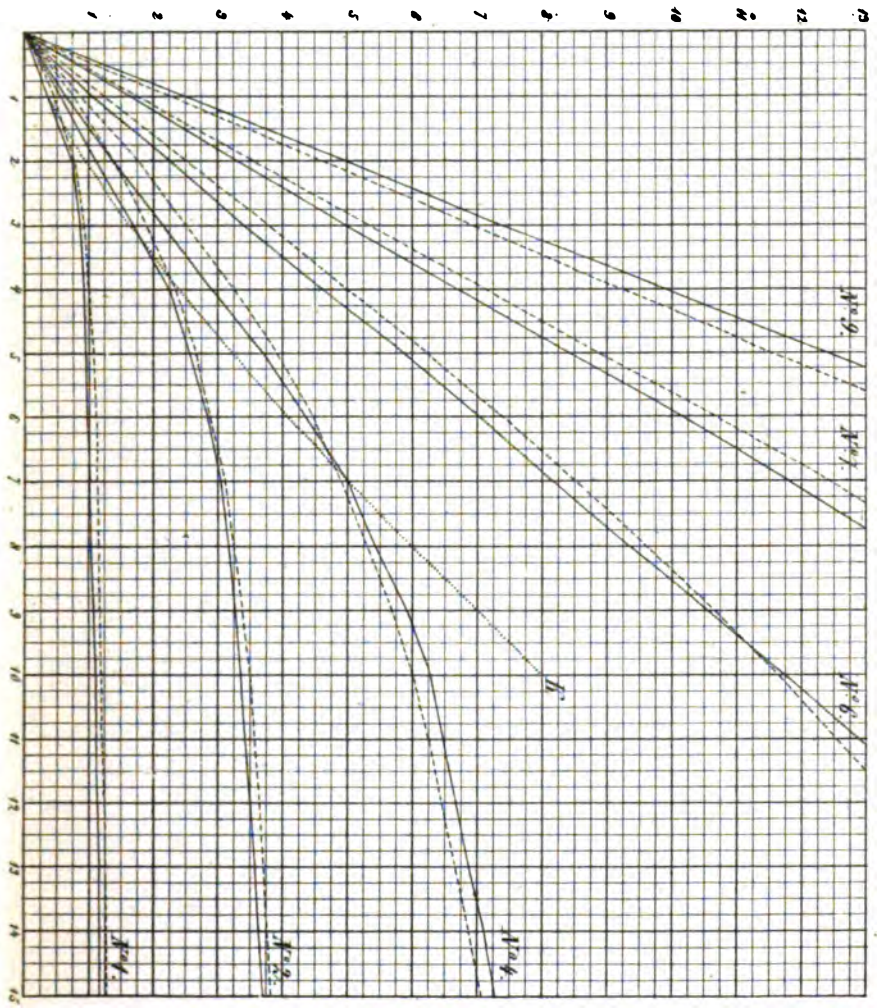
Soweit meine Versuche mit massiven cylindrischen Eisenstäben. — Ich behalte mir vor, in einer demnächst erscheinenden Abhandlung auch die Resultate mitzutheilen, zu welchen ich bei meinen in der Einleitung bereits erwähnten Versuchen mit Drahtbündeln und anderen discontinuirlichen Eisenmassen gelangt bin. — Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass alle Versuche, von welchen hier die Rede ist, bereits im Jahre 1863 abgeschlossen waren; dass jedoch andere Arbeiten ihre Zusammenstellung und Publication bis jetzt verzögert haben.

Innsbruck, am 21. Mai 1865.

---

[1]) Diese müssten bezüglich der im 82. Bde. der Pogg. Ann. mitgetheilten Versuche Müller's erst ermittelt werden. — Weil ich diese Bestimmung noch nicht gemacht habe, konnte ich diese Versuche in dieser Abhandlung bei Erörterungen, welche die Kenntniss dieser Constanten voraussetzen, nicht berücksichtigen.

Waltenhofen. Elektromagnetische Untersuchungen.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LII. Bd. II. Abth. 1865.

Über die Darstellung des Siliciums auf elektrolytischem Wege und über eine Verbindung des Cers mit Silicium.

Von **Franz Ullik**,
Assistenten der Chemie an der technischen Hochschule zu Gratz.

Im Laboratorium des Herrn Geheimrathes Bunsen in Heidelberg war ich unter dessen Leitung mit vielfachen Versuchen beschäftigt, die Metalle Cer, Didym und Lanthan im reinen Zustande und in grösseren Massen darzustellen.

Unter Anderem wurde auch versucht, ob sich nicht das Cer, analog der Darstellung des Aluminiums aus Kryolith, durch Zersetzung einer ähnlichen Doppelverbindung des Fluorceriums mit Fluorkalium oder Fluornatrium, gewinnen liesse.

Um eine solche Verbindung zu erhalten, wurde concentrirte wässerige Fluorwasserstoffsäure mit Kalilauge neutralisirt, dann noch etwa die doppelte Menge der dazu angewandten Fluorwasserstoffsäure hinzugefügt, in die Flüssigkeit Ceroxyduloxyd bis zur Sättigung der Säure eingetragen, und das Ganze zur Trockene abgedampft.

Die erhaltene Masse schmolz bei ziemlich niederer Temperatur zu einer klaren gelben Flüssigkeit, die beim Erkalten zu einer gelblich-weissen Masse erstarrte, welche sich wiederholt ohne merkliche Zersetzung zu einer klaren Flüssigkeit schmelzen liess.

Es lag die Vermuthung nahe, dass auf diese Weise eine Verbindung des Fluorceriums mit Fluorkalium erhalten werden könne; das Verhalten der Substanz gegen Wasser aber macht es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass hier keine chemische Verbindung vorliegt. Sie zieht nämlich an der Luft Wasser an und zerfliesst theilweise, indem sich ein unlösliches Pulver abscheidet. Dieses letztere ist Fluorcerium, während im Wasser Fluorkalium gelöst enthalten ist. Behandelt man die Masse mit kaltem Wasser, so lässt sich alles Fluorkalium ausziehen, während reines Fluorcerium zurück-

bleibt. Es scheint also beim Schmelzen blos eine Verbindung nach veränderlichen Verhältnissen stattzufinden, indem das schmelzende Fluorkalium sich gegen das im Wasser unlösliche Fluorcerium als einfaches Lösungsmittel verhält.

Die so erhaltene, leicht schmelzbare Substanz wurde nun nach der bekannten Methode von Bunsen der Elektrolyse unterworfen, wozu eine Bunsen'sche Batterie von acht Elementen zur Verwendung kam. Das Schmelzen geschah in einem Porzellantiegel. Bei der Einwirkung des elektrischen Stromes zeigte sich am positiven Pole lebhafte Gasentwicklung, während am negativen Pole nach wenigen Minuten ein brauner Klumpen sich abgesetzt hatte. Dieser, mit Wasser zerrieben, hinterliess ein schwarzes Pulver, wobei kleine glänzende Metallkügelchen, die nichts anderes als Kalium waren, bei der Berührung mit Wasser lebhaft verbrannten. Der Tiegel war nach dem Versuche stark angegriffen.

Das erhaltene schwarze Pulver, welches durch Auskochen mit Salzsäure und Wasser von der anhängenden noch unzersetzten Masse befreit wurde, war unlöslich in den gewöhnlichen Säuren und verbrannte beim Erhitzen unter Luftzutritt mit röthlichem Lichte, jedoch nicht vollständig, da in der geglühten Masse mittelst der Loupe neben einem gelblich gefärbten Pulver deutlich schwarze Partikelchen zu erkennen waren. Es stellte sich heraus, dass dieser Körper aus Cer und Silicium bestand.

Das Silicium konnte nur, da mit vollkommen reinen Substanzen gearbeitet wurde, aus dem vom Fluorkalium angegriffenen Tiegel in die schmelzende Masse gelangen, und wurde also durch den elektrischen Strom zugleich mit dem Cer abgeschieden, wobei es sich, wie es scheint, mit dem letzteren zu einer Verbindung vereinigt; denn eine Analyse des schwarzen Pulvers gab folgendes Resultat:

0·1828 Grm. Substanz gaben 0·0424 Silicium und 0·1393 Cer, woraus folgende procentische Zusammensetzung folgt:

Cer	76·209
Silicium . .	23·194
	99·403

Dieser entspricht eine Zusammensetzung aus einem Äquivalent Cer und einem Äquivalent Silicium, wenn Si = 14 und Ce = 46 angenommen wird. Näher untersucht wurde der Körper nicht.

Der Umstand, dass bei der elektrolytischen Zersetzung durch die Einwirkung des Fluorkaliums auf den Tiegel, Silicium in die Masse kam, und durch den Strom ausgeschieden wurde, gab Veranlassung, den Versuch dahin abzuändern, dass anstatt des Gemenges von Fluorkalium mit Fluorcerium, Kieselfluorkalium der Elektrolyse unterworfen wurde, um zu sehen, ob das Silicium für sich ebenfalls abgeschieden wird.

Da aber das Fluorkalium nicht ohne Zersetzung schmilzt, wurde dasselbe im frisch bereiteten Zustande in eine Lösung von Fluorkalium eingetragen und damit zur Trockene gebracht. Die erhaltene Masse schmolz dann auch ziemlich leicht zu einer klaren, farblosen Flüssigkeit.

Sie verhielt sich gegen Wasser eben so wie jene durch Zusammenschmelzen des Fluorceriums mit Fluorkalium gewonnene, so dass auch hier das schmelzende Fluorkalium gegenüber dem Kieselfluorkalium die Rolle eines Lösungsmittels spielt.

Durch elektrolytische Zersetzung der geschmolzenen Masse mittelst der auch früher angewandten Batterie von acht Elementen, resultirte neben Kalium eine braune Substanz, welche durch wiederholtes Erhitzen mit Schwefelsäure bis zum Abrauchen der letzteren und Auskochen mit Wasser von der noch anhängenden unzersetzten Masse befreit, nach dem Trocknen ein dunkelbraunes, stark abfärbendes Pulver gab, welches sich als die amorphe Modification des Siliciums erwies. Beim Glühen an der Luft oxydirte es sich nur schwierig und theilweise; von Säuren, mit Ausnahme der Fluorwasserstoffsäure, wurde es nicht angegriffen. In einem Strom trockenen Chlorgases erhitzt, gab es ein gelbes Destillat von Chlorsilicium, mit reinem, kieselsäurefreiem kohlensauren Natron geschmolzen, oxydirte es sich vollständig und aus der Lösung der geschmolzenen Masse in Wasser schied Salzsäure und gelatinöse Kieselsäure ab.

Über die Entstehung des Harzes im Inneren der Pflanzenzellen.

Von **Dr. Julius Wiesner,**
Docent am k. k. polytechnischen Institute.

Bei meinen Untersuchungen über die Zerstörung des Holzes an der Atmosphäre habe ich die Beobachtung gemacht, dass die Harzkörper im Inneren der Markstrahlenzellen unserer Laubbäume eine bedeutende Resistenz gegenüber den Einwirkungen der Atmosphäre zeigen. Ich habe nämlich in staubig verwesten Laubhölzern [1]), an denen bereits sämmtliche Zellmembranen in Huminsubstanzen umgewandelt waren, noch eine Menge von Harzkörpern gefunden, die nicht nur im äussern Ansehen ziemlich wohlerhalten waren, sondern noch dieselben Reactionen zeigten, wie die Harzkörper der unveränderten Laubhölzer.

Bei der Prüfung der tropfenartig aussehenden Harzkörper der unveränderten und der staubig verwesten Laubhölzer erstaunte ich nicht wenig, als ich nach mehrstündiger Einwirkung von Chromsäure einen Theil der Harzkörper, die ich bis dahin für homogene Massen hielt, im geschichteten Zustande erblickte. Meine Vermuthung, dass das im Innern der Pflanzenzelle vorkommende Harz ein geschichteter Körper sei, vielleicht aus einem solchen entstehe, wurde noch dadurch bestärkt, dass ich in dem Holze einer *Protea* hohle Harzkörner erblickte, von denen ebenfalls einige nach Einwirkung von Chromsäure in mehrere verschieden helle Zonen zerfielen.

Diese Beobachtungen gaben die nächste Veranlassung zu den nachfolgenden Untersuchungen.

---

[1]) In dem ersten Theile meiner Untersuchungen über die Zerstörung des Holzes an der Atmosphäre (Sitzungsberichte XLIX. p. 61 ffd.) habe ich blos Beobachtungen über die staubige Verwesung der Nadelhölzer beigebracht. Ich habe diese Zerstörungserscheinung nun auch an einer Reihe von Laubhölzern beobachtet und werde in dem nun bald vollendeten zweiten Theile der genannten Untersuchungen diesen Gegenstand eingehender behandeln.

1. Das Harzmehl.

Die Harzkörner kommen in den Markstrahlenzellen und im Holzparenchym der Laubbäume (*Acer*, *Ulmus*, *Fagus*, *Quercus*, *Protea* u. s. w.), ferner im Rindenparenchym vieler Bäume vor [1]).

Ich habe dieselben bis jetzt nur im Holzkörper näher verfolgt. Vornehmlich waren mir vier Holzarten: Rothbuche, Ahorn, Ulme und das Holz einer *Protea* lehrreich. Besonders das letztgenannte, welches sich durch kolossale, oft liniendicke Markstrahlen auszeichnet, deren relativ grosse Zellen dicht mit Harzkörnern erfüllt sind, hat mir wichtige Aufschlüsse gegeben. Ich verdanke das *Protea*holz — es stammt aus Neuholland und kam über Neuseeland nach Wien — der Güte des Herrn Prof. Dr. v. Hochstetter.

Die Harzkörner treten in den Zellen selten einzeln, häufiger in ganzen Gruppen auf. In den Markstrahlenzellen von *Acer* und *Ulmus* kommen nicht selten 20 bis 30, in denen des Proteaholzes bis 70 Körner vor. In den Markstrahlenzellen von *Fagus* treten sie sparsamer auf.

Die Körner haben eine kugelförmige, manchmal bedeutend abgeplattete Gestalt, mit oft sehr regelmässiger Umgrenzung, und erscheinen im Innern nicht selten ausgehöhlt; sie sind dann entweder mit Luft oder mit einem anders brechenden, festen Medium erfüllt. Ein Beweis für ihre Durchsichtigkeit und ihre oft höchst regelmässige Umgrenzung ist der, dass solide Körner, aus dem Brennpunkt des Instrumentes gehoben, häufig die Bilder unterliegender Gegenstände (Gestell und Spiegel des Mikroskopes u. s. w.) zeigen, wie ich dies an regelmässig gebauten, soliden Stärkekörnern (jugendliche Kartoffelstärkekörner, Weizenstärkekörner u. s. w.) beobachtet habe, mithin eben so wie die letztgenannten als Sammellinsen functioniren. — Manche von den Körnern kommen in regelmässig vereinigten Gruppen, dem componirten Amylum vergleichbar, vor, manche

---

[1]) Mein geehrter Freund, Herr Dr. Aug. Vogl, den ich mit meinen Beobachtungen über Harzmehl bekannt machte, theilt mir während des Druckes dieser Abhandlung mit, dass er dasselbe in der, angeblich von *Portlandia grandiflora* stammenden neuen Chinarinde *(cortex chinae novae)* auffand.

hingegen sind ganz unregelmässige, entschieden durch Verfliessung geformt gewesener Harzkörner enstandene Massen.

Bei Betrachtung unter Wasser oder Öl habe ich nur äusserst selten Schichten an den Körnern bemerkt.

Der Durchmesser der Körner schwankt nach meinen bis jetzt angestellten Beobachtungen zwischen 0·0018 Millim. und 0·018 Millim. Die Farbe derselben ist gelblich, honiggelb bis braunroth, manchmal selbst tief blutroth.

Destillirtes Wasser bringt selbst nach lang andauernder, durch mehrere Wochen fortgesetzter Einwirkung keine sichtliche Veränderung der Harzkörner hervor. — Beim Kochen in reinem Wasser bleibt ein Theil der Körner unverändert; der Rest schmilzt zu einer an die Zellwand sich anlegenden Masse zusammen. Die hierbei unverändert gebliebenen Körner sind auch nach lange fortgesetztem Kochen nicht zum Schmelzen zu bringen.

In fettem Öl (Olivenöl) betrachtet, treten die Körner mit ungemeiner Klarheit hervor. Nach tagelangem, manchmal erst nach wochenlangem Liegen in fettem Öl verblassen viele der Körner; manche erscheinen sodann geschichtet oder ausgehöhlt, letzteres oft in dem Masse, das nur ein dünnes, straffgespanntes Häutchen als Rest des Kornes zurückbleibt.

Durch Jodlösung (verdünnte alkoholische Lösung) habe ich nur selten eine Änderung der Körner hervorgebracht, indem nur einige blassgelbliche oder blassbräunliche Körner hierbei eine bläuliche Färbung annahmen. Vornehmlich schien mir die innere Partie der Harzkörner der Sitz des mit blauer Farbe niedergeschlagenen Jods zu sein.

Beim Kochen in Alkohol oder Äther oder mehrtägigem Liegen in diesen Flüssigkeiten werden nur wenige Körner ganz gelöst; die meisten nehmen blos einen lichteren Farbenton an. An manchen Körnern treten hierbei Spuren von Schichtung auf, und gelingt die Blaufärbung durch Jod etwas besser als bei den blos mit Wasser befeuchteten Körnern.

Durch concentrirte Kalilauge werden die Körner gelöst, manche momentan, manche nach länger andauernder Einwirkung. Häufig geht der Auflösung eine eigenthümliche Färbung der Körner voran, oder es tritt dieselbe gleichzeitig mit der Auflösung der Körner ein. Die Färbung ist amethystroth und geht von blassrosen-

roth in's intensiv amethystviolette. Schön rosenroth färben sich die Körner des Ahorn, amethystblau die der Rothbuche; doch nehmen nicht alle Harzkörner die genannte Farbe in Kali an, so z. B. die von *Protea*. — Das Kali bringt nach einiger Zeit sämmtliche Körner in Lösung. Die entstandene Harzseife ist stets blassbraun gefärbt (die etwa entstandene rothe oder blaue Farbe geht nach längerer Einwirkung des Kali verloren) und diffundirt durch die Zellmembranen, so zwar, dass ein Schnitt, der durch einige Tage in einer mässig concentrirten Kalilösung gelegen, alles Harzes beraubt ist.

Ich habe mit Sicherheit beobachtet, dass einige (durch Jod nicht zu bläuende) Körner (Ahorn, Rothbuche, *Protea* u. s. w.), die kurze Zeit in einer verdünnten Kalilauge gelegen, im Innern durch Jodlösung gebläut wurden. Eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Harzkörnern wurde nach der Vorbehandlung mit verdünnter Kalilauge, durch Jod und Schwefelsäure gebläut.

Ammoniak wirkt ähnlich wie Kali, färbend und lösend, doch nie so intensiv. Auch ist zu bemerken, dass eine Menge von Harzkörnern in diesem Reagens blos verblasst, ohne darin vollständig unterzugehen.

Ähnlich wie Kali und Ammoniak wirkt eine concentrirte Lösung von kohlensaurem Natron; auch hier erfolgt Färbung und Auflösung; letztere ist, bei Anwendung erhöhter Temperatur von Gasentwickelung begleitet, wie aus den nach der Erwärmung noch an und in den Zellen vorkommenden Gasblasen zu bemerken ist. Die Auflösung des Harzes geht langsam, und analog wie bei Ammoniak, nicht stets vollständig vor sich; es tritt hingegen die Amethystfarbe der Körner und deren Lösungen mit auffälliger Intensität hervor, wie ich selbe bei Anwendung von reinem Kali oder Ammoniak nicht gesehen habe.

Frisches Kupferoxydammoniak, welches Baumwolle rasch löst, scheint in Bezug auf Färbung die Harzkörner nicht zu verändern; die hin und wieder zu beobachtende röthliche Färbung ist wohl auf Rechnung des freien Ammoniaks zu setzen.

Die blossen Harzkörner, deren Eigenschaft durch Jod manchmal blau gefärbt zu werden ich oben erwähnte, quellen in Kupferoxydammoniak nicht selten deutlich auf.

Gegen Schwefelsäure und Salzsäure, weniger gegen Salpetersäure zeigen die Harzkörner eine grosse Resistenz

Stets werden die das Harzmehl umschliessenden Zellmembranen eher und weit intensiver als die Körner angegriffen.

In Schwefelsäure nehmen sie eine tief braune oder schwarz rothe Farbe an; in Salzsäure liegend, erscheint häufig ein intensiv rother Farbenton; in Salpetersäure verblassen die Harzkörner zu blassgelblichen oder farblosen Körpern, die noch die Grösse und Gestalt der ursprünglichen Harzkörner zeigen.

Ein sehr wichtiges Reagens auf Harzkörner ist verdünnte Chromsäure. Es verfliessen allerdings nicht wenige Körner in derselben, ohne nähere Structurverhältnisse erkennen zu lassen; aber manche Körner erscheinen schon nach kurz andauerndem Liegen in dieser Säure deutlich geschichtet. In der Regel ist es dann eine oder sind es mehrere, im letzteren Falle nach innen zu an Helligkeit abnehmende Zonen, welche in concentrischer oder excentrischer Lage den in Bezug auf Färbung ungeändert gebliebenen Kern umschliessen. Nach längerer Einwirkung der Chromsäure bleibt eine kleine Anzahl von Körnern ungelöst zurück. Die rückständigen, beinahe farblos gewordenen Körner zeigen nach vorhergegangenem Waschen in Wasser sowohl bei Einwirkung von Jod und Schwefelsäure als auch gegen Kupferoxydammoniak die Zellstoffreaction.

Durch Eisenchlorid habe ich in allen von mir untersuchten Pflanzen, in denen Harzkörner auftraten, an letzteren die Gerbstoffreaction bekommen. Manche Körner wurden tief olivengrün (Ahorn, Ulme, Rothbuche), andere tief blau (Eiche); doch haben nicht stets alle Körner im Reagens die genannten Färbungen angenommen; auch war selbst an einem und demselben Schnitte die Intensität in den Färbungen der einzelnen Körner durchaus nicht immer die gleiche.

Bei den meisten Harzkörnern trat die Gerbstoffreaction am schönsten hervor, nachdem der betreffende Schnitt durch einige Minuten in reinem Wasser gekocht wurde.

Aus diesem Verhalten der Harzkörner gegen Reagentien geht auf das klarste hervor, dass sie keine amorphen, sondern in der Regel geschichtete Körper sind; ferner dass sie nur selten blos aus Harzen bestehen, sondern fast immer höchst wechselvolle Gemenge von: Harz, Cellulose, Granulose, Gerbstoff und einem durch Alkalien oder kohlensaure Alkalien hervorrufbaren Farbstoff sind.

Nach den in neuester Zeit von Hartig [1]) gemachten Beobachtungen, denen zu Folge die Körner des von ihm entdeckten Gerbmehls durch Jod gebläut werden, lassen die vorstehenden Reactionen noch immer die Möglichkeit offen, dass die durch Jod entstehende Blaufärbung der unveränderten oder durch verdünnte Kalilösung vorbehandelten Harzkörner nicht von Granulose, sondern von Gerbstoff herrühren. Aber abgesehen davon, dass es bis jetzt noch nicht erwiesen ist, ob die Bläuung des Gerbmehls (durch Jod) nicht von Granulose herrührt — indem möglicherweise blos der Zellstoff der Stärkekörner sich in Gerbstoff umsetzte — haben mich meine Beobachtungen über die Entstehung der Harzkörner, die weiter unten folgen werden, überzeugt, dass auch Granulose in den Harzkörnern auftritt

In Betreff des durch Alkalien oder kohlensaure Alkalien hervorrufbaren Farbstoffes erwähne ich, dass derselbe zweifelsohne mit dem von Hartig (l. c.) in den Körnern des Gerbmehls aufgefundenen Chromogen identisch ist. In den Gerbstoffkörnern tritt dieser Körper unter Verhältnissen auf, unter welchen man nicht entscheiden kann, ob er ein Begleiter des Gerbstoffes ist, oder ob die entstehende rothe Färbung nur in Folge einer durch Alkalien in dem Gerbstoffe hervorgerufenen Zersetzung hervorgebracht wird. Es lösen sich nämlich die Gerbstoffkörner, wie Hartig zeigte, in Wasser auf und nur beim Liegen unter Öl gelingen die Gerbstoffreactionen. Anders ist es mit den eben beschriebenen Harzkörnern, die sich in Wasser nicht lösen. Kochendes Wasser entfernt, oder zerstört, wie oben gezeigt wurde, das Chromogen, hebt aber die Gerbstoffreaction (durch Eisenchlorid) nicht auf: woraus sich wohl ergibt, dass das Chromogen der Harzkörner — und man kann weiter mit Bestimmtheit behaupten, das Chromogen der Gerbstoffkörner keineswegs mit dem Gerbstoff selbst zusammenfällt, sondern ein blosser Begleiter desselben ist.

Die Harzkörner haben eine grosse Verbreitung in den parenchymatischen Elementen des Stammes, sowohl im Rindenparenchym als im Holzkörper, und treten manchmal in grossen Massen auf. Ich halte es nicbt für unzweckmässig diese eigenthümlichen Zellinhaltsstoffe analog der Benennung „Stärkmehl“ und im Anschlusse an Hartig's „Kleber-“ und „Gerbmehl“ mit dem Namen „Harzmehl“ zu

---

[1]) Hartig. Bot. Zeitg. 1865. p. 53.

bezeichnen. — Wenn auch die Hartig'sche histologische Kunstsprache — und wie ich glaube, nicht mit Unrecht — sich eines geringeren Beifalls zu erfreuen hat, als die lange Reihe wahrhaft bedeutungsvoller Entdeckungen, welche die Wissenschaft ihm verdankt, so schliesse ich mich doch gerne der Terminologie der genannten Inhaltsstoffe an, weil mir die Namen derselben sehr passend gewählt erscheinen.

2. Die Entstehung der Harzkörner.

Die angeführten Beobachtungen über das Verhalten der Harzkörner gegen Reagentien drängen unwillkürlich zu der Annahme, dass dieselben entweder aus Stärkekörnern oder aus Hartig's Gerbstoffkörnern hervorgehen; diese Annahme gewinnt durch die Wahrnehmung an Sicherheit, dass die Zellen, in welchen die Harzbildung erfolgt, mehr kein Plasma führen, mithin die Entstehung der Harzkörner nur aus den vorgebildeten grobkörnigen Einschlüssen der Zellen hergeleitet werden kann.

Diese körnigen Einschlüsse sind bei *Fagus*, *Acer*, *Quercus*, *Ulmus* und *Protea* entschieden Stärkekörnchen; bei *Acer* und *Quercus* habe ich ausser diesen noch andere mit den im selben Gewebe vorkommenden Stärkekörnern in Grösse und Form übereinstimmende Körnchen gefunden, die nur als Hartig's Gerbmehl gedeutet werden können. Diese farblosen Körnchen werden durch Jod schwach blau gefärbt, verfliessen in Kalilauge und selbst in einer Lösung von kohlensaurem Natron, welche bekanntlich auf Stärke nicht lösend einwirkt, unter Annahme einer amethystrothen (rosenroth in violet geneigt) Farbe. Durch Eisenchlorid werden diese Körner bei Ahorn schwarzgrün, bei der Eiche tiefblau gefärbt. In fettem Öl sind sie unlöslich; sie erhalten sich beim Befeuchten der Zelle mit Wasser oder Jodlösung; erst auf reichlichen Wasserzusatz verschwinden manche derselben. Die graduellen Unterschiede in ihrer Löslichkeit in Wasser, welche die Gerbstoffkörner zeigen, sind ein Beweis für deren Entstehung aus Stärkekörner: die in Wasser schwer oder gar unlöslichen, die Gerbstoffreaction zeigenden Körner sind eben Zwischenbildungen von Stärkmehl in Gerbmehl, und vornehmlich diese Zwischengebilde sind es, welche sich in Harz umsetzen.

Der genetische Zusammenhang, der zwischen Stärke- und Gerbstoffkörnern einerseits und Harzkörnern andererseits besteht, geht aus der Ausbildungsreise dieser Körper, wie sie in einem und demselben Gewebe auftreten, hervor, wie sich aus nachstehenden Beobachtungen ergibt.

Viele Stärkekörner von *Protea* sind hohl, wie eine grosse Anzahl von Harzkörnern dieser Pflanze.

Bei *Protea* und *Acer* finde ich neben einfachen Stärkekörnern hin und wieder zusammengesetzte, wie ich neben den einfachen Harzkörnern dieser Pflanzen auch zusammengesetzte auffinde.

Wenn, wie bei *Ulmus* und *Protea*, die mit den Harzkörnern im gleichen Gewebe auftretenden Stärkekörner in verdünnter Chromsäure Schichtung annehmen, zeigen auch die Harzkörner in diesem Reagens, wenn auch nicht häufig, doch sicher die Schichtung.

Wenn die Stärkekörner als Sammellinsen wirken, so zeigen auch die in selbem Gewebe auftretenden Harzkörner ein gleiches optisches Verhalten.

Endlich finde ich bei sorgsamer Prüfung der Gewebe, in den Zellen alle möglichen Übergangsformen von Stärke- und Gerbstoffkörner in Harzkörner, und gerade hierdurch erklären sich die Schwankungen in den oben angeführten Reactionen des Harzmehles.

Zur näheren Begründung des genetischen Zusammenhanges von Stärkemehl, Gerbstoff und Harz führe ich noch folgende Beobachtungen an.

In den Markstrahlenzellen von *Fagus* und *Protea* habe ich einen unmittelbaren Übergang von Stärke in Harz beobachtet. Gerbstoffkörner habe ich im fertigen Rothbuchenholze nicht gefunden, selbst nicht bei sorgsamer Prüfung unter Öl. Sämmtliche Stärkekörner blieben in Eisenchlorid ganz unverändert, und erst als die Harzmetamorphose eintrat, konnte Gerbstoff nachgewiesen werden.

Die Stärkekörner des Ulmen- und Ahornholzes zeigen vor dem Übergang in Harz nur schwache Gerbstoffreactionen.

Bei der Eiche und Esche *(Fraxinus excelsior)* finde ich hingegen, dass die Stärkekörner vor dem Beginne der Harzmetamorphose durch Eisenchlorid sehr intensive Färbungen annehmen.

Alle von mir bis jetzt untersuchten Harzkörner enthalten Gerbstoff; in dem Zustande vollständiger Umsetzung scheinen sie mir aber frei von dieser Substanz zu sein.

Ein gleichzeitiger Zerfall der Stärke in Gerbstoff und Harz, wie sich ein solcher aus den Beobachtungen an *Fagus* und *Protea* zu ergeben scheint, wird durch die Beobachtungen an *Ulmus*, *Acer*, *Fraxinus* und *Quercus* widerlegt. Es ist hingegen wahrscheinlich, dass die Stärke zuerst in Gerbstoff übergeht und erst dieser sich in Harz umsetzt. Bei dieser Annahme erklären sich auch die Beobachtungen an *Fagus* und *Protea* nur müsste sich bei diesen der Gerbstoff sehr rasch nach seiner Bildung in Harz umsetzen.

Wenn nun auch die vorstehenden Beobachtungen den chemischen Vorgang der Entstehung des Harzes nicht zu beleuchten vermögen, so geht aus denselben doch so viel hervor: dass eine grosse Menge des in der Natur vorkommenden Harzes aus Stärkekörnern, entweder direct oder indirect hervorgeht, dass der so entstandene Körper ein geschichteter ist, der in Bezug auf seinen Bau so wie Hartig's Gerbstoffkörner gleichsam eine Pseudomorphose nach Stärke ist.

Im lebenden Organismus setzt sich die Stärke in Zucker, Dextrin, Gerbsäuren u. s. w. um, im absterbenden Gewebe verwandelt sie sich in Arabin (Wigand) oder wie vorstehende Beobachtungen zeigten in Harz, die — als wahre Endproducte des Stoffwechsels — für das Leben des betreffenden Gewebes und wohl auch für das Leben der Pflanzen ohne alle Bedeutung sind.

3. Bemerkungen über die Entstehung der Harze im Allgemeinen.

Die Anschauungen der Chemiker und die Beobachtungen der Physiologen stimmen in Betreff der Entstehung des Harzes im Pflanzenkörper keineswegs überein. Die chemische Constitution der ätherischen Öle und der Harzsäuren deutet auf eine Entstehung der letzteren aus den ersteren durch Aufnahme von Sauerstoff.

Man findet aber in nicht wenigen chemischen Werken diese Entstehungsweise der Harze nicht nur als factisch bestehend hingestellt, sondern sogar durch eine bestimmte Gleichung ausgedrückt.

Terpentinöl $= C_{20}H_{16}$
Harzsäure des Kolophoniums $C_{40}H_{30}O_4$

lautet dieselbe:

$$2(C_{20}H_{16}) + {}_8O = C_{40}H_{30}O_4 + 2HO.$$

Diese Sicherheit, mit welcher die Entstehung der Harze aus ätherischen Ölen von vielen Chemikern ausgesprochen wurde, hat viele Physiologen bestimmt, diese Entstehungsweise als die richtige anzusehen.

Was vorerst die Chemiker anlangt, so sagt Gerhard[1]), dass durch Oxydation der ätherischen Öle (Terpentinöl, Citronöl u. s. w.) durch Salpetersäure allerdings harzartige Körper entstehen, die aber einen ganz andern chemischen Charakter an sich tragen als die natürlich vorkommenden Harze, indem sie auch den Stickstoff der Salpetersäure in sich aufgenommen haben.

Held[2]), welcher der Entstehung der Harze grosse Aufmerksamkeit schenkte und sie als Oxydationsproducte der ätherischen Öle auffasst, konnte weder durch Oxydation mit Sauerstoff, noch mit Chromsäure oder Salpetersäure die ätherischen Öle in die natürlich vorkommenden Harze überführen.

Maly[3]), welcher die Natur des Kolophoniums aufklärte, indem er zeigte, dass dasselbe der Hauptmasse nach aus dem Anhydrid der Abietinsäure ($C_{44}H_{62}O_4$) besteht, hat dargethan, dass die oben angeführte Formel über die Entstehung der Harzsäure des Terpentins aus Terpentinöl nicht richtig ist, dass es in der Pflanze gar nicht zur Bildung einer Harzsäure, sondern blos zur Bildung ihres Anhydrids kömmt, und dass der genannte Vorgang der Entstehung des Harzes, falls er überhaupt vorkömmt, complicirter als der oben angeführte sein müsse.

Von denjenigen Physiologen, die sich am eingehendsten mit der Genesis der Harze beschäftigten, von Karsten[4]) und später von Wigand[5]) wurde dargelegt, dass das Harz durch Verflüssigung von Zellmembranen entsteht. Wigand (l. c.) behauptet sogar auf Grund eigener und von Karsten angestellter Beobachtungen, dass die in den Balsamen vorkommenden ätherischen Öle anderen Ursprunges sind als die Harze derselben: erstere entstehen

---

[1]) Lehrb. der organ. Chemie. IV, 394.

[2]) Annalen d. Chem. u. Pharm. 63.

[3]) Beiträge zur Kenntniss der Abietinsäure von Dr. Rich. L. Maly, Sitzungsber. d. k. Akad. Bd. 50.

[4]) Abhandlungen der Berl. Akad. 1847, p. 111 und Bot. Zeit. 1856, p. 315 ffd.

[5]) Pringsheim's Jahrbücher für wiss. Bot. 164 ffd.

in kleinen, in Zellen eingeschlossenen Bläschen, aus denen sie durch Verflüssigung der Bläschenmembran heraustreten und sich mit dem durch Desorganisation der Zellmembran entstehendem Harze mengten.

Von dem im Innern von Pflanzenzellen (Holzzellen der Nadelhölzer und des *Guajacum officinale*) auftretenden Harzen vermuthet Wigand (l. c.), dass sie aus ätherischen Ölen hervorgegangen sind.

Es liegen also keine Thatsachen vor, welche auf die Entstehung der Harze aus ätherischen Ölen mit Bestimmtheit schliessen liessen, geschweige auf eine alleinige Entstehung aus diesen Körpern hinweisen würden.

Wenn nun hiermit die Möglichkeit der Entstehung der Harze aus ätherischen Ölen keineswegs ausgeschlossen ist, so muss doch andererseits zugegeben werden, dass noch ganz andere Entstehungsweisen der Harze möglich sind. Vielleicht werden die mikroskopischen Untersuchungen dem Chemiker den Weg finden helfen, den er zur Erledigung dieser Frage eingeschlagen hat.

Nach Karsten und Wigand geht die starre Wand vieler Holzzellen (Coniferen) durch Desorganisation in Harz über. Da die ganze Zellwand in Harz umgewandelt wird, so lässt sich dessen Entstehung wohl nur aus dem Hauptbestandtheile der Zellwand — aus Cellulose — herleiten, und es ist nur noch fraglich, ob diese Umwandlung direct geschieht, oder ob nicht vorerst ein anderer Körper aus der Cellulose hervorgeht.

Ich habe schon oben bei Erörterung der Entstehung des Harzmehles darauf aufmerksam gemacht, dass Gerbstoff nicht nur ein ständiger Begleiter des Harzes ist, sondern häufig der Harzbildung vorangeht, und habe es wahrscheinlich gemacht, dass das Harz aus Gerbstoff hervorgeht. Ich habe nun auch die Entstehung des Harzes aus Zellmembranen verfolgt, und finde hierin neue Anhaltspunkte für meine Annahme.

Ich finde nämlich sehr häufig in jenen Zellen von *Acer*, *Ulmus*, *Protea* u. s. w., welche Harzmehl führen, die innersten Zellwandschichten in ein Harz umgesetzt, welches mit dem Harz der Körner gleiche chemische Reaction zeigt. Ich finde ferner, dass gerade jene

Region der Zellmembran, von welcher ich früher schon [1]) nachgewiesen habe, dass sie der Sitz des Gerbstoffes ist — nämlich die innersten Wandschichten — der Harzmetamorphose unterliegt, und dass der Gerbstoff vor der vollständigen Umsetzung der Zellmembranen in Harz sich darin immer noch nachweisen lässt.

Bei Verfolgung der Bildung des Harzes aus den Holzzellen von *Pinus nigricans* finde ich, dass dieselbe in jeder einzelnen Holzzelle regelmässig von Innen nach Aussen her fortschreitet, dass die Zellmembranen sich schichtenweise in Gerbstoff umsetzen und hierauf erst in Harz übergehen. So lange die Structurverhältnisse der Holzzellen noch wahrnehmbar sind, lässt sich in denselben durch Eisenchlorid in der Regel noch Gerbstoff nachweisen; wie die vollständige Umsetzung in Terpentinharz erfolgte, gibt Eisenchlorid selbst nach tagelanger Einwirkung keine Reaction mehr.

Auf Grund meiner Beobachtungen schliesse ich mich den Anschauungen Karsten's und Wigand's, dass ein grosser Theil des in der Natur vorkommenden Harzes durch chemische Umsetzung der Zellmembranen entsteht, an und finde auch Wigand's Beobachtung [2]), dass die Harzbildung in den Zellmembranen von innen nach aussen vorwärts schreitet, bestätigt. Aus meinen Beobachtungen ergibt sich aber weiter, dass der Gerbstoff, der successive aus der Zellwand hervorgeht, und nach vollendeter Metamorphose im entstandenen Harze nicht mehr nachweisbar ist, wahrscheinlich jener Körper ist, in den die beiden Kohlenhydrate Cellulose und Granulose erst übergehen müssen, um in Harz verwandelt werden zu können. Es geht ferner aus meinen Beobachtungen in Vereinigung mit den von Karsten und Wigand angestellten hervor, dass das Harz nie ein Secretionsproduct, sondern immer das Product einer chemischen Metamorphose organisirter Substanzen ist. Diese tritt beim oder nach dem Erlöschen der Lebensthätigkeit der Gewebe ein, und die hierbei entstehenden Substanzen haben höchst wahrscheinlich

---

[1]) Mikrosk. Untersuchung der Maislische etc. Dingler's polytech. Journ. CLXXV, p. 225 ffd.

[2]) l. c. p. 169.

im Leben des Organismus keine weitere Rolle zu spielen.

Noch möchte ich schliesslich ein Wort über den Zusammenhang und das gleichzeitige Vorkommen von ätherischen Ölen und Harz sprechen. Wie die Sachen jetzt stehen, wo keine Thatsache für die Entstehung der Harze aus ätherischen Ölen redet, stehen für die Erklärung des Zusammenhanges der beiden Körper zwei Wege offen: entweder es entstehen, wie bis jetzt angenommen, die Harze im Pflanzenkörper aus den ätherischen Ölen, oder diese gehen aus den Harzen hervor. Für den letzteren Fall scheinen zwei Gründe, ein mechanischer und ein chemischer, zu sprechen. Die starre Zellwand erweicht sich und erst hierauf verflüssigt sie sich bei der Harzmetamorphose. Cellulose (oder Granulose), Gerbstoff, Harzsäure, ätherisches Öl können wir aus einander hervorgegangen uns denken durch fortgesetzte Reductionen; nicht so bei der Annahme des anderen Falles. — Heute kann man allerdings noch nicht den richtigen Sachverhalt aufklären; aber immerhin darf man vermuthen, dass die Forscher sich künftighin an der Lösung dieser Aufgabe emancipirt von den alten Vorurtheilen betheiligen werden.

XVI. SITZUNG VOM 22. JUNI 1865.

Wegen Erkrankung des Präsidenten übernimmt Herr Regierungsrath Ritter v. Ettingshausen den Vorsitz.

Der Secretär liest folgenden Erlass des h. Curatoriums:

„Seine k. k. Apostolische Majestät haben mit der Allerhöchsten Entschliessung vom 11. Juni d. J. die Wahl Seiner kaiserl. Hoheit des Herrn Erzherzogs Stephan zum inländischen Ehrenmitgliede der kaiserl. Akademie der Wissenschaften allergnädigst zu genehmigen geruht."

„Mit derselben Allerhöchsten Entschliessung haben Seine k. k. Apostolische Majestät zu wirklichen Mitgliedern der Akademie für die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe den Professor der Physik an der Universität und Mitdirector des physikalischen Institutes in Wien Dr. Joseph Stefan und den Vorstand des Hof-Mineralien-Cabinets Dr. Moriz Hörnes allergnädigst zu ernennen und die von der Akademie getroffenen Wahlen Allerhöchst zu genehmigen geruht, und zwar die Wahl des Capitularpriesters des Stiftes Raygern und mährisch-ständischen Historiographen Dr. Beda Franz Dudik zum inländischen correspondirenden Mitgliede der philosophisch-historischen Classe; des Professors der Mineralogie und Geologie am polytechnischen Institute in Wien Dr. Ferdinand Ritter v. Hochstetter, des k. k. Oberstlieutenants und Commandanten des Zeugs-Artillerie-Commando Nr. 17 in Wien Franz Ritter v. Uchatius, des Professors der Mineralogie an der Universität zu Prag Victor Ritter v. Zepharovich, des Professors und d. Z. Rectors des polytechnischen Institutes in Prag Karl Kořistka und des Inspectors der Staatstelegraphen in Wien Dr. Hermann Militzer zu inländischen correspondirenden Mitgliedern, ferner des kaiserl. russischen Staatsrathes und Präsidenten der kaiserl. Akademie in St. Petersburg Karl Ernst v. Baer zum ausländischen Ehrenmitgliede und des Professors der Zoologie und vergleichenden Anatomie an der Universität zu München Dr. Karl Theodor v. Siebold zum ausländischen correspondirenden Mitgliede

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserl. Akademie der Wissenschaften."

„Hievon beehre ich mich Euer Excellenz mit Beziehung auf die geschätzte Zuschrift vom 29. Mai d. J., Z. 603, unter Rückschluss der Wahlprotokolle zur gefälligen weiteren Verfügung in Kenntniss zu setzen."

Wien, am 14. Juni 1865.

Schmerling m./p.

Der Herr Vorsitzende begrüsst die anwesenden neu eingetretenen Mitglieder, Herrn Prof. Stefan als wirkliches, Herrn Oberstlieutenant Ritter v. Uchatius als correspondirendes Mitglied.

Der Secretär legt vor:

Die mit Zuschrift der k. ungar. Hofkanzlei vom 10. Juni übermittelten Übersichtstabellen über die an der Donau und Maros in den Jahren 1860/1, 1861/2, 1862/3 und 1864 beobachteten Eisverhältnisse;

eine von dem c. M., Herrn Vice-Director K. Fritsch eingesendete Abhandlung „über die mit der Höhe zunehmende Temperatur der untersten Luftschichten";

eine Abhandlung des Herrn Dr. Ferd. Daubrawa, Apothekers zu Mährisch-Neustadt, betitelt: „Ein Beitrag zu den Eigenschaften des Kalkes und seiner Verbindungen mit daraus resultirenden geogenetischen Schlüssen";

ein Dankschreiben des Herrn Oberstlieutenants v. Uchatius für seine Wahl zum correspondirenden Mitgliede der Classe.

Herr Dr. A. Boué spricht über die mineralogisch-paläontologische Bestimmung der geologischen Gebilde.

Herr Prof. Dr. E. Brücke überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Babouchin aus Moskau „über den Bau der Netzhaut einiger einheimischer Schnecken".

Herr Dr. K. Freih. v. Reichenbach setzt die Entwickelung der physikalischen Verhältnisse der loheartigen Erscheinungen fort, worüber derselbe in der letzten Sitzung berichtet hatte.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real, de Ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid: Memorias. Tomo VI. (2ª Serie. Ciencias fisicas. Tomo 2º,

Parte 2ª.) Madrid, 1865; 4°. — Resumen de las actas. 1862 á 1863. Madrid, 1864; 8°. — Rico y Sinobas, Don Manuel, Libros del Saber de Astronomia del Rey D. Alfonso X de Castilla. Tomo III. Madrid, 1864; Folio.

Accademia, di Scienze, Lettere ed Arti in Padova: Revista periodica. Vol. X. No. 21—22; Vol. XII. (?), No. 23—24. Vol. XIII (?); No. 25—26. Padova, 1862—1865; 8°.

— Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Tomo XVII, Anno XVII. (1863—1864.) Sess. 1ª—7ª. Roma, 1864; 4°.

Annalen der königl. Sternwarte bei München. XIV. Bd. München, 1865; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 12. Wien, 1865; 8°.

Archief, Nederlandsch, voor Genees- en Natuurkunde. Uitgegeven door F. C. Donders en W. Koster. I° Deel, 2°—3° Aflevering. Utrecht, 1864; 8°.

Astronomische Nachrichten. No. 1531. Altona, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. No. 23. Paris, 1865; 4°.

Gesellschaft, gelehrte estnische, zu Dorpat: Sitzungsberichte. 1864. 8°.— Tobien, E. S., Die ältesten Gerichtsordnungen Russlands I. Dorpat, 1846, 4°. — Körber, Bernhard, Biostatik der im Dörptischen Kreise gelegenen Kirchspiele, Ringen, Randen, Nüggen und Kawelecht in den Jahren 1834—1859. Dorpat, 1864; 4°.

— Naturhistorische, zu Hannover: XIV. Jahresbericht. 1863 bis 1864. Hannover, 1865; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift: XXVI. Jahrg. No. 25. Wien, 1865; 8°.

Osservatorio, Real, de Madrid: Anuario. VI. Año 1865. Madrid, 1864; 8°.

Reader. No. 129, Vol. V. London, 1865; Folio.

Società Reale di Napoli: Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Anno III. Fasc. 3—7. Napoli, 1864; 4°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Tome XXXVIII. Année 1865. No. 1. Moscou; 8°.

— Linnéenne de Normandie: Mémoires. Années 1863 — 64. XIV. Vol. Caen et Paris, 1865; 4°. — Bulletin. IX° Vol. Année 1863—64. Caen & Paris, 1865; 8°.

Société géologique de France: Bulletin. 2e Série. Tome XXIIe, Feuilles 1—7. Paris, 1864 à 1865; 8°.

— de physique et d'histoire naturelle de Genève: Mémoires. Tome XVII., 2de Partie. Genève, Paris & Bale, 1864; 4°.

Society, The Royal, of London: Philosophical Transactions. For the year 1864. Vol. 154. Parts I & II. London 1864; 4°. — Proceedings. Vol. XIII. No. 68—69. London, 1864; 8°.

— The Chemical: Journal. Ser. 2, Vol. II. October, November, December 1864. London; 8°.

— The Geological, of Dublin: Journal. Vol. X. Part 2. London & Dublin, 1864; 8°.

Verein, naturwiss., für Sachsen und Thüringen in Halle: Zeitschrift. Jahrg. 1864. XXIV. Bd. Berlin, 1864; 8°.

— für Naturkunde zu Pressburg: Correspondenzblatt. II. Jahrg. 1863. Pressburg; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift: XV. Jahrg. Nr. 48—49. Wien, 1865; 4°.

Über die mit der Höhe zunehmende Temperatur der untersten Luftschichten.

Von dem c. M. **Karl Fritsch**,
Vice-Director der k. k. Centralanstalt für Meteorologie.

Der bekannten Erfahrung, dass die Temperatur der Luft nur bis zu einer gewissen Höhe in Abnahme begriffen ist, dann aber stationär wird oder doch wenigstens nur einer sehr langsamen Abnahme unterliegt, hat Herr Dr. Prestel eine nicht minder bemerkenswerthe Thatsache zur Seite gestellt, indem er nachzuweisen versuchte, „dass die Temperatur in der untersten unmittelbar auf der Erdoberfläche ruhenden Schicht der Atmosphäre nicht abnimmt, sondern wächst.“[1])

Weil diese seine Wahrnehmung mit dem in allen Lehrbüchern der Meteorologie und physikalischen Geographie als Axiom hingestellten Satze in Widerspruch steht, dass die Temperatur der Luft an demselben Orte abnehme, je weiter man sich erhebt, so hat Prestel zugleich den Wunsch ausgesprochen, dass die Beobachtungen, von welchen er ausging, eine genauere Prüfung durch Wiederholung derselben an verschiedenen anderen Orten veranlassen möchten.

Hiedurch wurden auch an unserer Anstalt ähnliche Beobachtungen angeregt, welche von dem verewigten Director Kreil zur Ausführung gebracht worden sind. Die Localitäten des Gebäudes, in welchem die k. k. Central-Anstalt untergebracht ist, erlaubten nicht, wie es wünschenswerth war, die Thermometer genau in denselben Höhen über dem Boden, wie in Emden, auszusetzen; auch war keine Gelegenheit geboten, ein Thermometer unmittelbar an der Erdoberfläche anzubringen.

Dagegen wurden statt drei, wie in Emden, fünf Thermometer in verschiedenen Etagen aufgestellt, so viel als thunlich in derselben Verticale, die drei unteren vor den Fenstern des Stiegenhauses, das

---

1) Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften XXXVI. Bd. S. 384 (1859) und Verhandlungen der kais. L. C. D. A. der Naturforscher in Jena 1861.

vierte vor einem Fenster des Observatoriums, welches ober dem Stiegenhause gelegen ist und das fünfte an der Mauerbrüstung der Terrasse über dem Observatorium. Sämmtliche Thermometer waren durch Beschirmungen von Zinkblech von gleicher Form und Dimension, gegen Sonnenstrahlung und Regen geschützt und befanden sich in der Entfernung von 6 Zoll vom Gebäude. Die Thermometer wurden bei geschlossenen Fenstern abgelesen, nur das oberste musste mit der Beschirmung aus den Klammern gehoben werden, um die Ablesung bewerkstelligen zu können. Es war hier keine andere Vorsicht geboten als das Instrument vor directer Sonnenstrahlung zu schützen, wobei es genügte, die geschlossene Seite der Beschirmung der Sonne zuzuwenden. Im Winter war es auch noch angezeigt, das Instrument vor der Körperwärme des Beobachters durch eine genügende Entfernung sicher zu stellen. Beide Fehlerquellen wurden überdies durch eine rasche Ablesung des Thermometers beseitiget.

Die Höhen, in welchen die Thermometer ausgesetzt wurden und welche, wie bereits erwähnt, durch die Localitäten des Hauses geboten waren, sind 12′ 0″, 24′ 0″, 42′ 0″. 53′ 0″, 63′ 6″ W. M., welche ich von unten auf der Reihe nach mit *A, B, C, D, E* bezeichnen will. Bei den Beobachtungen von Prestel waren die Höhen 0′ 2″,[1]) 17′ 3″ und 28′ 4″ P. M.

Bei unseren Thermometern war die Exposition gegen NW. bei jenen in Emden gegen N. Auch waren hier die Thermometer weiter vom Gebäude entfernt, *A* anfangs 10, dann 40′[2]), *B*. 1′ und *C* war auf einem verschiebbaren Läufer befestiget, so dass es ganz in die freie Luft hinausgehoben, zum Behufe des Ablesens aber wieder herangezogen werden konnte.

Von den Fenstern aus, vor welchen die Thermometer *B* und *C* des Herrn Prestel sich befanden, hatte man die Aussicht auf einen Complex von Gärten bis auf eine Entfernung von hundert und mehrere Fuss, in welcher erst sich einige nicht sehr hohe Gebäude erheben.

Ähnliche Verhältnisse, aber in noch grösseren Dimensionen, bietet das Gebäude unserer Anstalt gegen W. und O., im beschränkterem Maasse auch gegen S., nicht aber gegen N. Schon im ersten

---

[1]) Im ersten Theile seiner Abhandlung gibt Prestl die Höhe mit 2″ und 3″, im zweiten mit 1″ an.

[2]) Von dieser Änderung findet sich im zweiten Theile keine Erwähnung.

Jahre wurde die freie Aussicht gegen N. durch den Neubau eines hohen Hauses beschränkt, welches sich in geringer Entfernung erhob und dem sich im zweiten Jahre ein zweites, ebenfalls hohes Gebäude anschloss, das auch die Aussicht nach NW. noch mehr beschränkte, als es früher der Fall war. Dennoch scheinen die Angaben der Thermometer hiedurch keine erhebliche Änderung erlitten zu haben, wie die Einsicht der Ergebnisse lehrt.

So wie in Emden wurden auch an unserer Anstalt die Thermometer unter einander verglichen und die Abweichungen in Rechnung gebracht. Durch mehr als ein Jahr, nachdem die Beobachtungen bereits geschlossen waren, blieben die Thermometer hart neben einander der freien Luft ohne Beschirmung ausgesetzt und wurden die Stände nach folgenden Formeln corrigirt

$$\text{I. } {}^1/_5 (A+B+C+D+E) = N.$$
$$\text{II. } A' = N-A, B' = N-B \ldots.$$

in welchen A', B' . . . die corrigirten Ablesungen sind. Dieselben wurden für jeden Grad von -11° bis $+27^\circ$ in der Regel aus 10 Ablesungen ermittelt. Mit den Mittelwerthen $N-A$, $N-B$. . . . wurden sodann sämmtliche Beobachtungen der Temperatur in verschiedenen Höhen verbessert.

Die Beobachtungen selbst wurden vom 10. April 1861 bis 10. April 1863, also genau zwei Jahre hindurch angestellt und zwar um 6 U. Morgens, Mittags und um 10 U. Abends. Es schien mir nicht gerathen, auch die Beobachtungen um 10 U. Morgens zu berücksichtigen, weil dieselben in jedem Monate durch mehr oder weniger Tage unterbrochen sind und in den letzten Monaten ganz fehlen. Auch steht der Mittelwerth aus den Beobachtungen 6^h, 0^h und 10^h dem wahren Tagesmittel näher, als jener von 6^h, 10^h, 0^h und 10^h. In Emden waren die Beobachtungszeiten 8 U., 0 U. und 6 U. und dauerten die Beobachtungen drei Jahre hindurch (1858—1860) [1]. Wenn nun auch aus diesem Grunde die Mittelwerthe beider Stationen nicht genau vergleichbar sind, so werden dennoch, wenigstens aus diesem Grunde, die Unterschiede $A-B$, $B-C$. . . nur wenig alterirt.

Zur folgenden Tabelle, welche die ersten Ergebnisse unserer Beobachtungen enthält, ist zu bemerken, dass der Monat April 1861

[1] Begannen bereits mit 1. November 1857.

die Beobachtungen vom 1—10. April 1863 und 11—30. April 1861 1861 beginnen und schon mit 10. April 1863 enden. Für die Etage dem Grunde, weil zu Ende dieses Zeitraumes das Thermometer brach der Vergleichung mit den übrigen Thermometern nach Abschluss der

Ta-

Stunden-Mittel der Temperatur-Beob-

	6 Uhr Morgens				
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
	April 1861 bis März 1862.				
April	3°27	3°12	3°17	3°07	
Mai	6·83	6·61	6·90	6·79	
Juni	13·41	13·15	13·68	13·70	
Juli	13·41	13·22	13·72	13·63	
August	13·95	13·80	14·25	14·20	
September	10·60	10·47	10·87	10·75	
October	6·03	5·85	6·13	6·02	
November	2·04	1·94	1·93	1·76	
December	−1·52	−1·68	−1·69	−1·85	
Jänner	−2·49	−2·58	−2·62	−2·74	
Februar	−1·30	−1·38	−1·51	−1·60	−1°65
März	3·07	2·95	2·91	2·81	2·63
Jahr	5·61	5·46	5·64	5·54	
	April 1862 bis März 1863.				
April	7·61	7·55	7·64	7·52	7·43
Mai	10·59	10·40	10·80	10·64	10·59
Juni	12·61	12·47	12·74	12·90	12·76
Juli	13·67	13·41	13·83	13·78	13·79
August	12·23	11·97	12·35	12·24	12·23
September	10·18	10·03	10·40	10·23	10·17
October	7·58	7·44	7·57	7·48	7·42
November	3·01	2·82	2·86	2·85	2·69
December	−0·76	−0·95	−1·00	−0·95	−0·95
Jänner	1·89	1·72	1·66	1·69	1·73
Februar	1·12	0·95	0·88	0·86	0·94
März	3·75	3·61	3·55	3·55	3·69
Jahr	6·96	6·78	6·94	6·90	6·87

enthält, um dieselben zu vervollständigen, indem sie erst mit 10. April *E* fehlen ferner die Monatmittel vom April 1861 bis Jänner 1862 aus und durch ein anderes ersetzt worden ist, welches daher nur allein Beobachtungen unterzogen werden konnte.

fel I.

achtungen in verschiedenen Höhen.

Mittags					10 Uhr Abends				
A	*B*	*C*	*D*	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
April 1861 bis März 1862.									
8°71	8°55	8°94	8°73		5°47	5°39	5°40	5°40	
12·12	11·91	12·31	12·31		8·43	8·27	8·45	8·39	
18·51	18·12	18·76	18·75		14·89	14·55	14·97	15·00	
19·21	18·91	19·50	19·49		14·63	14·71	15·11	15·04	
19·92	19·61	20·26	20·27		15·73	15·45	15·88	15·87	
16·79	16·40	17·02	16·99		13·24	13·06	13·42	13·17	
12·08	11·72	12·21	12·15		8·33	8·35	8·55	8·39	
4·99	5·15	5·36	5·23		2·68	2·74	2·67	2·45	
0·25	0·16	0·19	0·05		−0·94	−0·87	−1·00	−1·15	
−0·55	−0·64	−0·68	−0·79		−1·69	−1·71	−1·76	−1·96	
0·56	0·44	0·37	0·27	0°03	−0·86	−0·83	−0·98	−1·15	−1°16
8·38	8·22	8·52	8·50	8·33	5·48	5·54	5·53	5·38	5·26
10·09	9·88	10·23	10·16		7·12	7·05	7·19	7·07	
April 1862 bis März 1863.									
13°83	13°50	14°09	13°99	13°71	9°85	9°76	9°99	9°78	9°86
16·62	16·28	16·81	16·89	16·76	12·79	12·61	12·80	12·72	12·76
17·64	17·09	17·60	17·58	17·48	14·35	14·11	14·39	14·11	14·35
19·61	19·10	19·71	19·66	19·52	16·03	15·86	16·15	16·16	16·19
18·39	18·02	18·81	18·66	18·52	14·01	13·70	14·09	13·99	13·99
17·20	16·83	17·56	17·58	17·44	13·47	13·24	13·66	13·54	13·58
10·43	10·30	10·78	10·93	10·80	9·13	9·16	9·10	9·06	9·08
4·68	4·41	4·51	4·56	4·42	3·43	3·39	3·31	3·27	3·23
1·11	0·88	0·96	0·99	0·90	−0·27	−0·35	−0·36	−0·37	−0·31
4·15	4·02	4·15	4·17	4·16	2·37	2·28	2·24	2·19	2·24
5·20	5·02	5·31	5·24	5·26	2·38	2·43	2·33	2·26	2·35
8·17	7·92	8·22	8·30	8·27	5·24	5·20	5·15	5·09	5·15
11·42	11·11	11·54	11·55	11·44	8·56	8·45	8·57	8·48	8·54

Ein Überblick der vorstehenden Tafel lehrt, dass in allen Etagen, *B* ausgenommen, die Temperaturen nahe dieselben sind und nur in der bemerkten Etage eine nicht unerhebliche Depression stattfindet, welche einer jährlichen und täglichen Periode unterliegt, indem sie ein Maximum in den Sommermonaten erreicht, ein Minimum in den Wintermonaten und um Mittag grösser als Morgens und Abends ist. Letztere, nämlich die tägliche Änderung, erreicht aber nicht die Amplitude der jährlichen.

Um den jährlichen Gang der täglichen Änderung besser übersehen zu können, sind in der folgenden Tafel die allgemeinen Monatmittel, welche nach der Formel $^1/_3\ (6^h + M + 10^h)$ abgeleitet worden sind, zusammengestellt.

Tafel II.

Allgemeine Monatmittel der Temperatur-Beobachtungen in verschiedenen Höhen.

April 1861 bis März 1862.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
April	5°82	5°69	5°84	5°73	
Mai	9·13	8·93	9·22	9·16	
Juni	15·60	15·27	15·80	15·82	
Juli	15·75	15·61	16·11	16·05	
August	16·53	16·29	16·80	16·78	
September	13·54	13·31	13·77	13·64	
October	8·81	8·64	8·96	8·85	
November	3·24	3·28	3·32	3·15	
December	— 0·74	— 0·80	— 0·83	— 0·98	
Jänner	— 1·58	— 1·64	— 1·69	— 1·83	
Februar	— 0·53	— 0·59	— 0·71	— 0·83	— 0·93
März	5·64	5·57	5·65	5·56	5·40
Jahr	7·60	7·46	7·68	7·59	

April 1862 bis März 1863.

	A	B	C	D	E
April	10·43	10·27	10·57	10·43	10·33
Mai	13·33	13·10	13·47	13·42	13·37
Juni	14·87	14·58	14·91	14·86	14·86
Juli	16·44	16·12	16·56	16·53	16·50
August	14·88	14·50	15·08	14·96	14·91
September	13·62	13·37	13·84	13·78	13·73
October	9·03	8·97	9·14	9·16	9·10
November	3·71	3·54	3·56	3·56	3·45
December	0·02	— 0·14	— 0·13	— 0·11	— 0·12
Jänner	2·80	2·67	2·68	2·68	2·71
Februar	2·90	2·80	2·84	2·79	2·85
März	5·72	5·58	5·64	5·65	5·70
Jahr	8·98	8·78	9·01	8·98	8·95

Die Änderungen der Temperatur, soweit sie durch die Höhe des Thermometers über der Erdoberfläche bedingt werden, sind also in beiden Jahren fast ganz genau dieselben.

Tafel III.

Mittelwerthe beider Jahrgänge.

	A	B	C	D	E
April	8·13	7·98	8·10	8·08	
Mai	11·23	11·01	11·34	11·29	
Juni	15·23	14·92	15·35	15·33	
Juli	16·10	15·87	16·34	16·27	
August	15·70	15·39	15·94	15·84	
September	13·58	13·34	13·80	13·71	
October	8·92	8·80	9·05	9·00	
November	3·47	3·41	3·44	3·36	
December	— 0·36	— 0·47	— 0·48	— 0·54	
Jänner	0·61	0·51	0·50	0·45	
Februar	1·24	1·10	1·06	0·98	
März	5·68	5·57	5·64	5·60	
Jahr	8·29	8·12	8·34	8·28	

Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass in Emden die Temperatur-Depression sich an der Erdoberfläche zeigt, in Wien hingegen in der Etage $B = 24'\,0''$. Sehen wir hievon ab, so lassen sich die Ergebnisse beider Stationen vergleichen, da in Emden die beiden Thermometer beziehungsweise in 17′ 3″ und 28′ 4″ P. in Wien 42′0″—24′0″ = 18′0′W = 17′6″ P. und 53′0″—24′0″ = 29′0″W = 28′3″ P. aufgestellt waren.

Aus der folgenden Tafel entnimmt man nun, um wie viel die Temperatur in beiden Etagen höher war als an der Erdoberfläche, beziehungsweise in 24′0″.

Tafel IV.

Abweichungen der Temperatur in verschiedenen Höhen.

	Emden [1] 17′ 3″	Wien 17′ 6″	Emden 28′ 4″	Wien 28′ 3″
Jänner	0°61	— 0°01	0°69	— 0°06
Februar	0·65	— 0·04	0·81	— 0·12
März	0·75	0·07	1·03	0·03
April	0·90	0·12	1·22	0·10
Mai	0·91	0·33	1·31	0·28
Juni	1·15	0·43	1·85	0·41
Juli	0·93	0·47	1·37	0·40
August	1·08	0·55	1·63	0·45
September	1·00	0·46	1·43	0·37
October	0·81	0·25	1·14	0·20
November	0·55	0·03	0·65	— 0·05
December	0·77	— 0·01	0·68	— 0·07
Jahr	0·84	0·22	1·15	0·14

Die Änderungen der Temperatur mit der Höhe sind also in Wien weit weniger beträchtlich als in Emden, wenn sich gleich an beiden Orten eine ähnliche jährliche Periode derselben herausstellt.

Prestel hat durch seine Beobachtungen nachgewiesen, dass diese Temperatur-Verhältnisse insbesondere an Gewittertagen auf-

[1] Dreijährige Mittel.

fallend hervortreten. In einzelnen Fällen stiegen die Temperatur-Unterschiede bis 5°, um so viel stand nämlich das in einer Höhe von 28′ 4″ ausgesetzte Thermometer höher als das nahe an der Erdoberfläche aufgestellte.

Es ist einleuchtend, dass diese Verhältnisse um die Zeit des täglichen Maximums der Temperatur am meisten auffallen, also in den Wiener Beobachtungen vorzugsweise in den Aufzeichnungen um Mittag zu erkennen sein werden. Die Unterschiede sind am grössten vor dem Ausbruche der Gewitter, und da dieselben in weit überwiegender Anzahl in den Nachmittagstunden zum Ausbruche gelangen, so empfiehlt sich die Stunde um Mittag vor den übrigen zu den einschlägigen Untersuchungen.

Indem ich die Tage bezeichnete, an welchen Gewitter, gleich viel ob nahe oder entfernte, beobachtet worden sind, und aus den Temperatur-Aufzeichnungen an diesen Tagen um Mittag Monatmittel berechnete, erhielt ich die in folgender Tafel ersichtlichen Werthe:

Tafel V.

Mittlere Temperatur an Gewittertagen.

April 1861 bis März 1862.

	Zahl der Tage	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
April	0	—	—	—	—	—
Mai	3	19·87	19·80	20·50	20·47	—
Juni	10	19·16	18·80	19·48	19·49	—
Juli	6	21·55	21·22	21·97	21·92	—
August	6	23·93	23·82	24·57	24·55	—
September	2	19·80	19·55	20·15	20·35	—
October	0	—	—	—	—	—
November	0	—	—	—	—	—
December	0	—	—	—	—	—
Jänner	0	—	—	—	—	—
Februar	0	—	—	—	—	—
März	1	15·40	15·00	15·60	15·40	—
Jahr	28	19·95	19·70	20·38	20·36	—

April 1862 bis März 1863.

	Zahl der Tage	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
April	1	17·20	17·00	17·70	17·70	17·40
Mai	5	19·30	18·82	19·32	19·54	19·50
Juni	5	22·18	21·86	22·38	22·60	22·64
Juli	9	21·78	21·38	21·97	21·92	21·90
August	5	22·06	21·64	22·36	22·42	22·42
September	0	—	—	—	—	—
October	0	—	—	—	—	—
November	0	—	—	—	—	—
December	0	—	—	—	—	—
Jänner	1	8·00	7·90	8·10	8·20	8·50
Februar	0	—	—	—	—	—
März	0	—	—	—	—	—
Jahr	26	18·42	18·10	18·64	18·75	18·73

Also in beiden Jahren nahe dieselben Verhältnisse, ja noch mehr, selbst an den einzelnen Tagen, in welcher Beziehung es genügen dürfte, anzuführen, dass im äussersten Falle die Temperatur der kältesten und wärmsten Schichte nicht über 1° verschieden waren, während in Emden, wie bereits erwähnt, dieser Unterschied bis auf 5° stieg.

Die Vergleichung der beiden Tafeln II. und V. berechtiget wohl zu dem Schlusse, dass an Gewittertagen die Änderungen der Temperatur mit der Höhe grösser als gewöhnlich sind. Berücksichtiget man aber, dass die Werthe der Tafel II. aus den Beobachtungen um 6^h 0^h und 10^h, jene der Tafel V. aber nur aus den Beobachtungen um 0^h abgeleitet worden sind, und die Variationen der Temperatur mit der Höhe zu dieser Stunde grösser als zu den beiden übrigen sind, so scheinen die Verhältnisse an Gewittertagen von jenen an gewöhnlichen Tagen kaum erheblich verschieden. Als Belege wähle ich die beiden Monate Juni 1861 und Juli 1862, in welchen die Gewitter am zahlreichsten waren. Die mittlere Temperatur in Differenzen gegen die kälteste Schicht ausgedrückt war um 0^h.

An Gewittertagen:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
Juni 1861 . . .	+ 0°36	0°00	+ 0°68	+ 0°69	—
Juli 1862 . . .	+ 0·40	0·00	+ 0·59	+ 0·54	+ 0°52

Im Allgemeinen:

Juni 1861 . . .	+ 0·39	0·00	+ 0·64	+ 0·63	—
Juli 1862 . . .	+ 0·51	0·00	+ 0·61	+ 0·56	+ 0·42.

Aus den Zahlen der Tafel IV. geht hervor, dass in Emden der Wärmeüberschuss in den Höhen von 17′ und 28′ das ganze Jahr hindurch anhält, und dass sich derselbe vom Winter zum Sommer mehr als verdoppelt. In Wien hingegen bleibt dieser Überschuss auf die Monate März bis November beschränkt, und schlägt in den Wintermonaten in das Gegentheil um. Auch sind die in eine jährliche Periode eingeschlossenen Änderungen hier weit weniger beträchtlich als in Emden.

Aber die bemerkte Ausnahme in den Wintermonaten gilt in Wien nur für die normale Temperatur dieser Jahreszeit. In dem Maasse, als sich die Temperatur darüber erhebt, nähern sich die Verhältnisse jenen der Sommermonate, wie aus folgender Zusammenstellung zu entnehmen, in welcher für jeden Monat die Verhältnisse an dem kältesten und wärmsten Tage ersichtlich sind.

Um Mittag:

		A	*B*	*C*	*D*	*E*
December 1861	+	6°2	+ 6°2	+ 6°3	+ 6°2	—
	—	2·9	— 3·0	— 3·1	— 3·0	—
Jänner 1862	+	6·4	+ 6·6	+ 7·2	+ 7·0	—
	—	7·3	— 7·3	— 7·5	— 7·9	—
Februar „	+	8·6	+ 8·4	+ 8·7	+ 8·7	+ 8°4
	—	6·5	— 6·7	— 6·9	— 7·0	— 7·6
December 1862	+	6·7	+ 6·6	+ 6·9	+ 6·9	+ 6·2
	—	4·1	— 4·4	— 4·3	— 4·4	— 4·6
Jänner 1863	+	9·0	+ 8·9	+ 9·2	+ 9·2	— 9·4
	+	0·9	+ 0·7	+ 0·5	+ 0·6	+ 0·5
Februar „	+	12·1	+ 12·0	+ 12·6	+ 12·4	+ 12·5
	—	0·1	— 0·0	— 0·1	— 0·2	— 0·2

Im Sommer scheinen die Änderungen der Temperatur mit der Höhe, welche in der Regel immer in demselben Sinne erfolgen, in

keiner Abhängigkeit von der Höhe der Temperatur zu stehen, wie aus folgender Zusammenstellung der kältesten und wärmsten Tage zu entnehmen ist.

Um Mittag:

			A	*B*	*C*	*D*	*E*
Juni	1861		24°3	24°2	25°0	25°0	—
			16·0	10·6	11·5	11·5	—
Juli	"		20·0	19·9	21·1	21·4	—
			12·6	12·2	12·6	12·5	—
August	"		25·1	25·2	26·0	25·8	—
			12·5	12·0	12·8	12·6	—
Juni	1862		25·7	25·2	25·8	25·6	25°9
			11·3	11·0	11·2	11·1	10·9
Juli	"		26·7	26·4	27·2	27·0	27·1
			13·1	11·8	12·8	12·5	12·5
August	"		26·1	25·8	26·6	26·5	26·6
			12·7	12·0	12·8	12·9	12·9.

Ich bin jedoch geneigt, dieses Ergebniss als ein blos zufälliges anzusehen, in Folge der geringen Anzahl der Fälle. Hiezu bestimmt mich erstens die ziemlich regelmässige Zunahme der Differenzen mit der mittleren Monatstemperatur (m. s. Taf. V.) und zweitens die Wahrnehmung, dass diese Änderungen auch in den Morgen- und Abendstunden der Beobachtung (6^h und 0^h) in der Regel kleiner sind, als um Mittag.

Ich glaube, dass sich die besprochenen Änderungen der Temperatur in den untersten Luftschichten aus dem Verhältnisse der Boden- zur Lufttemperatur erklären lassen und aus der Verzögerung, welche dieselbe beim Eindringen in die Erdrinde erfährt. Dieses Verhältniss wird durch die Vertheilung der Winde erheblich modificirt, wie Prestel nachgewiesen hat, ohne sich über die allgemeine Ursache der Temperatur-Vertheilung in den untersten Luftschichten auszusprechen.

Schwierig bleibt aber die Erklärung, warum zu Emden der Wärmeüberschuss in *B* und *C* über *A* sich auch in den Wintermonaten zeigt und in Wien nicht *A* sondern *B*, in den Wintermonaten sogar *C* u. s. w. die tiefste Temperatur aufzuweisen haben.

Von der mühsamen Zusammenstellung der Temperatur-Beobachtungen bei verschiedenen Windrichtungen verspreche ich mir keinen befriedigenden Erfolg, weil die Temperatur-Änderungen mit der Höhe in Wien sehr klein sind, zweijährige Beobachtungen nicht ausreichend erscheinen, die Modificationen durch die Winde darzustellen und die verschiedenen Windrichtungen in Wien schwer zu unterscheiden sind, da dieselben eigentlich nur um zwei Punkte der Rose, NW. und SO. schwanken und keine regelmässige Drehung, sondern häufig ein diametrales Überspringen stattfindet.

XVII. SITZUNG VOM 30. JUNI 1865.

Wegen Erkrankung des Präsidenten übernimmt Herr Regierungsrath Ritter von Ettingshausen den Vorsitz.

Die Herren Professoren K. Kořistka und V. Ritter v. Zepharovich, so wie Herr Dr. H. Militzer danken mit Schreiben vom 26. und 27. Juni für ihre Wahl zu correspondirenden Mitgliedern der Akademie.

Der Präses der Gesellschaft der Ärzte, Herr Hofrath Rokitansky, dankt mit Schreiben vom 22. Juni, für die Betheilung dieser Gesellschaft mit dem Atlas der Hautkrankheiten.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Der Meteorit von Taranaki, Wellington, Neuseeland" und „Eine Federwolke am 17. Juni 1865", von Herrn Hofrath W. Ritter v. Haidinger;

„Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium in Innsbruck", übersendet durch Herrn Professor H. Hlasiwetz, und zwar:

I. „Zur Geschichte des Tyrosins", von Herrn L. Barth;

II. „Über das Carthamin", von Herrn G. Malin, und

III. „Apparat zur Darstellung des Phosphorsäureanhydrides", von Herrn Grafen Grabowski;

„Untersuchungen über die Abietinsäure". IV. Mittheilung, von Herrn Dr. R. Maly in Graz;

„Die Abweichung der Lothlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erforderniss einer Gradmessung", von Herrn Obersten E. Pechmann.

Herr Dr. A. Boué beschliesst seinen in der vorigen Sitzung begonnenen Vortrag „über mineralogisch-paläontologische Bestimmung geologischer Gebilde" und übergibt die betreffende Abhandlung.

Herr Dr. K. Freiherr v. Reichenbach setzt seinen letzten Vortrag über die physikalischen Verhältnissen der loheartigen Erscheinungen fort.

Herr Prof. E. Suess legt eine Abhandlung „über Ammoniten" vor.

Herr Prof. Dr. J. Boehm überreicht eine Abhandlung „über die Schmarotzernatur der Mistel".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler, Liebig und Kopp. N. R. Band LVIII, Heft 3. Leipzig und Heidelberg, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1532—1536. Altona, 1865; 4°.

Bosis, Francesco de, Le burasche di mare osservate l'anno 1864. Ancona, 1865; 4°.

Clausius, R., Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. Nr. 24. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 1er Volume, 25e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 26. Wien, 1865; 8°.

Haidinger, Wilhelm Ritt. v., Ritterstands-Diplom. Wien, 1865; 8°. — Bericht über die Haidinger-Feier am 5. Februar 1865. Wien, 1865; 8°. — Karl Haidinger und Wilhelm Haidinger. Zwei Lebensskizzen von Dr. Constant v. Wurzbach. Wien, 1864; 8°.

Haughton, Samuel, Notes on Animal Mechanics. (Read before the R. Jrish Academy, January 11, 1864.) 8°.

Katalog der Bibliothek des k. k. österr. Museums für Kunst und Industrie. Mai 1865. 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. No. 18. Wien, 1865; 4°.

Melsens, Mémoire sur l'emploi de l'Jodure de Potassium, pour combattre les affections saturnines et mercuriales et les accidents consécutifs de la Syphylis. Bruxelles et Paris, 1865; 8°.

Moniteur scientifique. 104. Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Reader. No. 130. Vol. V. London, 1865; Folio.

Scheerer, Th., Beiträge zur Erklärung der Dolomitbildung. (Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten.) Dresden, 1865; 4°.

Schreerer, Th., Über die genaue quantitative Bestimmung des Eisenoxyduls in Silicaten, namentlich in den Glimmern. 8°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. IXe Année. Nrs. 1—2. Constantinople, 1865; 4°.

Toronto, Magnetic Observatory: Abstracts of Meteorogical Observations made during the Years 1854 to 1859 inclusive; — 1856 to 1862 inclusive and during Parts of the Years 1853, 1854 et 1855; — 1860, 1861 et 1862. Toronto, 1863 et 1864; 4°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 50—51. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 12—15. Graz, 1864; 4°.

Der Meteorit von Taranaki, Wellington, Neuseeland.

Vorläufiger Bericht von dem w. M. W. Ritter v. Haidinger.

Es wird wohl noch eine Weile währen, bis wir umfassendere Nachrichten, von Proben nicht zu sprechen, von dem bei diesem neuen Meteore erfolgten Falle erhalten. Einstweilen freue ich mich, wohl die erste Nachricht in einer europäischen Versammlung, von diesem mit einem prachtvollen Meteor verbundenen Falle vorlegen zu können. Ich verdanke die Nachrichten meinem hochverehrten Freunde Herrn Professor Dr. F. v. Hochstetter, dem sie selbst unmittelbar durch Correspondenz zukamen.

Der Ort des Falles eines Theils der Meteore, ist etwa fünf englische Meilen von Turakina, auf dem Besitze eines Herrn Feeth. Es schlug in den Boden ein und brachte ein Loch hervor, von etwa 6 Zoll Durchmesser und 18 Zoll bis 2 Fuss Tiefe. Herr Feeth bedeckte das Loch einstweilen, um es gelegentlich mit Personen, die ein besonderes Interesse an dem Gegenstande nehmen, gemeinschaftlich auszugraben. Turakina liegt im Wanganui-District, an der Westküste der nördlichen Insel in der Tiefe des Busens, südlich des 8270 Fuss hohen Mount Egmont oder Taranakiberges. Beobachtungen liegen vor, von Taranaki, von Wanganui, von Nelson. Auch Angaben von Picton in Marlborough. Viele Personen, namentlich in Wanganui, hatten wenigstens die grosse Helligkeit, die furchtbare Detonation und sodann den noch nach zwei Stunden sichtbaren Schweif des Meteors beobachtet.

Das Meteor hatte eine Richtung von Nordwest gegen Südost. Die Zeit der Erscheinung war Sonntag den 4. December 1864, wenige Minuten vor 2 Uhr Morgens. Oberst Logan nahm die Äusserungen der Schildwachen entgegen, welche nahezu die genauesten Angaben

vorzulegen vermochten. Die schweren Wolken des Abends hatten sich gelichtet, bis gegen Mitternacht sich wieder Gewölk über dem Meere sammelte.

Das Meteor schien aus einer sehr dunkeln Gegend der Wolken zu kommen, etwas nördlich von den „Heads“ (Richtung von Nordwest gegen Südost). Erst war es wenig lebhaft, wurde aber immer heller, bis es bei der Zeit, wo es über die Köpfe wegzog, zu blendend von dem hellsten Glanze war, als dass man es hätte ansehen können. Es erschien so gross wie die Sonne oder grösser, vorne rund und hinten konisch. Der Vordertheil war mehr roth und dunkler als der flammende Schweif, dessen Basis der glänzendste Theil des ganzen Meteors war. Eine Reihe von Funken, wie bei einer Rakete, blieb noch eine oder zwei Secunden lang hinter dem Meteor zurück und man hörte ein pfeifendes oder rauschendes Getöse. Es schien etwas nördlich von Wanganui-District vorüber zu ziehen und die Explosion fand in nordöstlicher Richtung in 30 Grad Höhe statt. Die ganze Zeit von der ersten Erscheinung bis zum Schlusse wurde verschiedentlich auf eine bis anderthalb Minuten geschätzt. Zeit von der Explosion bis man den Schall hörte, weniger als eine Minute. Eine Wolkenschicht wurde von unten roth beleuchtet, so dass in dieser Gegend das Meteor tiefer als diese Wolken zog. Der Schall wurde von den Soldaten, welche in Indien und im Krimkriege gedient, mit dem gleichzeitigen Abfeuern von 100 Stücken groben Geschützes verglichen. Einige von den Männern fühlten wie ein Beben der Erde, alle aber waren durch den Glanz geblendet.

Von Taranaki wurde berichtet, dass das Meteor mit drei scharfen Schlägen viel lauter als der stärkste Donner, etwa zwei Meilen von der Küste entfernt, in die Rhede von Taranaki fiel. Personen, welche den Fall in das Meer sahen, beschrieben das Licht dieses prachtvollen Meteors als so hell, dass die ganze Umgegend von Taranaki, wie am Tage hell beleuchtet erschien. Zwei Stunden blieb der Schweif noch sichtbar, bis er vor dem nach und nach stärker wirkenden Lichte der aufgehenden Sonne erbleichte und verschwand.

Taranaki und Wanganui sind 80 Meilen von einander entfernt. Ein Theil des Meteors ist wohl bei Taranaki in das Meer, ein anderer bei Turakina gefallen. Selbst in Nelson, auf etwa 160 Meilen Entfernung, glaubte man etwas von dem Schalle als fernes Rollen wahrgenommen zu haben.

Sehr eigenthümlich bleibt für dieses Meteor von Taranaki und Wanganui vom 4. December 1864 die lange Sichtbarkeit des Schweifes, die bis nun von festen Angaben zunächst an die mehrstündige Sichtbarkeit des Schweifes von Agram am 26. Mai 1751 anschliesst.

Wohl dürfen wir für das Weitere anziehenden Nachrichten entgegen sehen, wo gewiss unser hochverehrter Freund und K. Oe. Franz Joseph-Ordensritter Dr. Julius Haast, wenn auch selbst sehr entfernt vom Schauplatze des Ereignisses, doch gewiss keine Mühe zu gross achten wird, um dieselben in Erfahrung zu bringen.

Eine Federwolke am 17. Juni 1865.

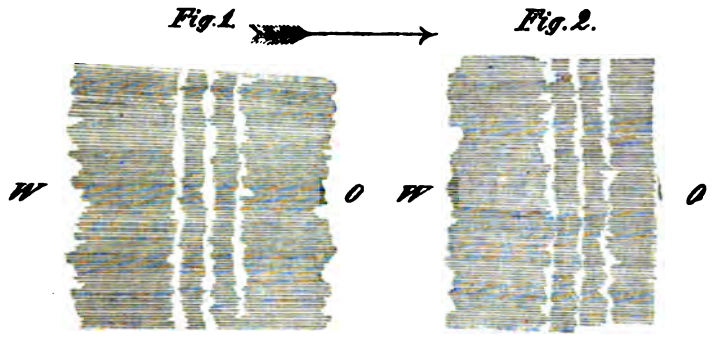
Bericht von dem w. M. W. Ritter v. Haidinger.

Nur eine Federwolke ist es, für einen Bericht, über welche ich mir heute die freundlich wohlwollende Aufmerksamkeit der hochverehrten Classe auf einige Augenblicke erbitte, eine einzelne Wahrnehmung, aber die in ihrer Eigenthümlichkeit es wohl verdient, dass man ihr einige Zeilen widme, um eine der Thatsachen fest zu halten, die vorübergehend in sich, doch mit andern zu einem Ganzen vereinigt, hohes Interesse darbieten. In der überraschenden Erscheinung darf man fast die Bezeichnung „Meteor" auf diese Federwolke anwenden.

Das ganze Himmelsgewölbe heiter, tief blau, nur gegen den Horizont zu im Westen und Osten wenig charakteristische graue stratusartige Wolkenpartien. Aber durch das Zenith gehend am 17. Juni 1865 Morgens kurz vor 8 Uhr, ein einziger Federwolkenstreif, in einer Höhe von etwa 45 Grad, etwa 10 Grad breit geschätzt, von etwa 170 Grad Länge, über das ganze Himmelsgewölbe hin, vom Zenith gegen Norden und Süden bis auf ungefähr eine Höhe von 5 Grad über dem Horizont verlängert. Reiner, charakteristischer Cirrus und zwar diejenige „Modification, welche im gemeinen Leben mit dem Namen Windsbäume bezeichnet wird", wie sie Kämtz (Vorlesungen über Meteorologie, Halle 1840, S. 146), so gut bezeichnet, wie von einem mittleren Cirrusstreifen „parallele Fäden nach beiden Seiten" auslaufen und dazu bemerkt. „Die Wolke erhält dann das Ansehen eines Pferdeschweifes."

Wohl erinnere ich mich viele an die vom 17. Juni zunächst anschliessende Erscheinungen gesehen zu haben. Was aber bei dieser als höchst überraschend sich darbot, war, dass der Streifen so ganz einzeln nahe durch das Zenith ging und den ganzen Raum vom Nord-Horizont bis zum Süd-Horizont einnahm. Aber auch gerade die Zusammensetzung aus feinen Streifen, senkrecht auf die Richtung des ganzen breiten Streifens fesselte die Aufmerksamkeit. Zu beiden Seiten lagen die feinen senkrechten Streifen, welche reichlich von

jeder Seite zwei Fünftel der Breite einnahmen. Ein Fünftel, der mittlere Theil der Breite aber bestand aus zwei bis drei eben auch senkrecht gegen die ganze Ausdehnung gestreiften, aber von den beiden Seitenfransen deutlich abgetrennten schmäleren längsgestellten Streifensystemen.



Die beiden Skizzen geben, freilich nur sehr unvollkommene Bilder der Erscheinung, und zwar wie sie in der aufeinander folgenden Zeit sich darstellten, Fig. 1 etwas vor 8 Uhr, als ich sie zuerst bemerkte, später gegen 9 Uhr war die östliche Seite mehr wie verkürzt, abgestumpft, aber der ganze Streifen hatte sich auch während dieser Zeit deutlich gegen Osten zu bewegt.

Um sich einigermaassen Rechenschaft über das Gefüge der Wolkenstreifen zu geben, darf wohl angenommen werden, dass doch eigentlich eine wellenförmige Bewegung zweier auf einander liegenden Luftschichten von ungleicher Dichtigkeit gerade an diesem Durchschnittspunkte einen namhafteren Niveau-Unterschied darbietet, der dem Orte der Erscheinung in der Linie von Nord gegen Süd entspricht, während weder in östlicher noch in westlicher Richtung sich gleiche Unterschiede finden. Dies wäre die Erklärung auch für die von Nord gegen Süd im grossen Ganzen sich zeigenden schmäleren Streifensysteme. Die feineren Streifchen aber, senkrecht gestellt gegen die Hauptlinie, können wohl in keiner Weise anders als durch Strömungen hervorgebracht worden sein, deren Wellensäume senkrecht gegen die Richtung von Nord gegen Süd, also ostwestlich liegen.

Welche Höhe diese Wolken haben, woraus sie bestehen, dafür liegen wohl schon viele gut begründete Angaben vor, welche der Erscheinung das höchste Interesse verleihen. „Messungen, welche ich in Halle angestellt habe, die aber stets eine grosse Unsicherheit bei dieser

wenig scharf begrenzten Wolkenart zulassen, deuten auf eine Höhe, welche zuweilen 20.000 Fuss übersteigt", theilt Kämtz am angeführten Orte S. 146 mit. E. E. Schmid in seinem grossen „Lehrbuche der Meteorologie, Leipzig 1860" berichtet über Pouillet's Messung einer Wolke in der Nähe von Paris nahe 38.000 Fuss über dem Erdboden.

Nähme man für die Federwolke vom 17. Juni in runder Ziffer die Höhe einer Meile (24.000 Fuss) an, so ergäbe sich die Länge derselben nördlich und südlich zu je 11·43 Meilen, zusammen also von 22·86 Meilen und würde etwa einer Nord-Südlinie entsprechen, etwas nordöstlich von Znaim beginnend bis zum Parallel des Wechsels, also ungefähr die Scheide der Begrenzung durch grössere Höhen des niederösterreichischen Tieflandes bezeichnend, östlich von welcher allerdings die Gestaltung einen Gegensatz von der westlichen Seite bildet und man wohl annehmen könnte, aus einem Stande der Ruhe oder der Bewegung beginnend, dass hier ein Einfluss sich bis in sehr hohe Luftschichten äussern könnte.

Dass die Federwolken aus den feinsten Eiskrystallen bestehen, ist wohl längst über jeden Zweifel sicher gestellt, wie dies Kämtz an dem früher genannten Orte, Seite 147, trefflich nachweist, namentlich durch seine eigenen bis dahin gegen zehnjährigen Beobachtungen, während welcher er so oft die grösseren Höfe und Nebensonnen in denselben beobachtete, welche in dem Cirrus ihren eigentlichen Sitz haben, während nie ein einziges Phänomen darauf gedeutet hätte, dass die Cirri aus Nebelbläschen zusammengesetzt wären.

Wir hätten es also hier mit einem über 20 Meilen langen von Nord gegen Süd reichenden Streifen zu thun, bei dieser Höhe und einer scheinbaren Breite von 10 Grad, also von etwas über 4000 Fuss Breite.

Ich muss es sehr beklagen, dass meine Beobachtung erst um 8 Uhr begann, und bald nach 9 Uhr der Cirrusstreif, immer weiter östlich rückend, in einzelnen Theilen etwas länger sichtbar, als in anderen, doch gegen 10 Uhr sich vollständig aufgelöst hatte. Aber auch das bedauere ich bei der grossen Schönheit der Erscheinung dass ich erst später den Entschluss fasste, ein Wort zur Erinnerung aufzuschreiben, als mehrere Personen, die ich befragte, nicht einmal irgend Etwas wahrgenommen hatten.

In der Wiener Zeitung vom 19. Juni ist in den „meteorologischen und magnetischen Beobachtungen an der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus", gegenwärtig unter der ausgezeichneten

Direction des Herrn Dr. Joseph Jelinek, für den 17. Juni mehreres enthalten, das es wohl recht sehr verdient hier als nahe gleichzeitig verzeichnet zu werden.

Das Auffallendste ist der Zustand der Elektricität, um 6 Uhr Morgens + 22·3, um 6 Uhr Abends 0·0, dabei die Wolkenbedeckung geschätzt um 6 Uhr Morgens auf 7 von Nordnordwest, um 2 Uhr Abends auf 4 von Nordwest, um 10 Uhr Abends auf 10. In der That war der herrliche erste Theil des Tages später durch schwere Wolken aus Westen durch einen wenig anmuthigen Nachmittag ersetzt worden, mit verstärktem Winde und mit folgendem Regen.

Die magnetische Declination betrug in den drei Zeiten, 6 Uhr Morgens, 2 Uhr und 10 Uhr Abends 11° 46·2, 11° 55·3, 11° 48·6, Barometer fallend von 331·92 Pariser Linien auf 331·0 und 329·59.

In den meteorologischen Beobachtungen der genannten k. k. Central-Anstalt in der „Presse“ unter dem Zeichen H. ist für 17. 7 Uhr Früh eine Faserwolke gegeben, mit der Legende: „Am 17. vor Sonnenaufgang grösstentheils bedeckt, dann heiter, wenige Wolken, Mittags Sonne und Wolken wechselnd.“

Die Angabe der Art der Wolken F (Faserwolke), nach der Methode des Herrn Vicedirectors K. Fritsch ist hier sehr dankenswerth und ich bedauerte sie in dem Berichte der Wiener Zeitung zu vermissen.

Ich muss besonders bemerken, dass die nordsüdliche Richtung des Cirrusstreifens mehr dem geographischen, nicht dem magnetischen Meridian entsprach. Bekanntlich hat Humboldt der Richtung dieser Streifen, die er als Polarstreifen (bandes polaires) beschrieb, grosse Aufmerksamkeit gewidmet und namentlich hervorgehoben, dass die „perspectivischen Convergenzpunkte meist anfangs in den Magnetpolen liegen, so dass die parallelen Reihen der Schäfchen dem magnetischen Meridian folgen“ (Cosmos I, S. 441). Wohl unterscheidet sich dieser Cirro-Cumulus etwas weniges von dem reinen Faser-Cirrus, dem die Erscheinung vom 17. Juni angehört. Aber doch muss wohl die etwas abweichende Richtung von der von Humboldt aus vielen Beobachtungen entnommenen als Ausnahme betrachtet werden. Aber Humboldt gedenkt auch eines allmählichen regelmässigen Fortschreitens des Convergenzpunktes.

Ich glaubte oben aus der Lage des Cirrusstreifens sowohl als der senkrecht auf die Richtung desselben stehenden feineren Fasern auf zweierlei „Strömungen“ Wellen ähnlich schliessen zu dürfen, wovon

die ersteren in westöstlicher Richtung, die letzteren in nordsüdlicher ihre Wirkung äussern. Ob es Pressung atmosphärischer Gegensätze ist, ob nicht namentlich bei den feineren Fasern elektrische Einflüsse zwischen den zarten Eiskrystallen in diesen hohen Gegenden zur Geltung kommen, darf wohl als Frage übrig bleiben. „Veränderten Luftströmungen in der obersten Region der Atmosphäre möchte ich das Fortschreiten der Zonen nicht zuschreiben", sagt Humboldt eben dort. „Sie entstehen bei sehr ruhiger Luft und grosser Heiterkeit des Himmels und sind unter den Tropen viel häufiger als in der gemässigten und kalten Zone. Ich habe das Phänomen in der Andeskette fast unter dem Äquator in 14.000 Fuss Höhe, wie im nördlichen Asien in der Ebene zu Krasnojarski, südlich von Buchtarminsk, sich so auffallend gleich entwickeln sehen, dass man es als einen weitverbreiteten von allgemeinen Naturkräften abhängigen Process zu betrachten hat."

Es war mir nicht möglich die neuere Literatur in umfassenderer Weise zu vergleichen. Doch sei es mir gestattet, einer Mittheilung des Herrn H. Wollaston Blake zu gedenken, welche durch Herrn J. Glaisher, Secretär der British Meteorological Society in den „Proceedings" der Sitzung am 18. März 1863, Vol. I, Nr. 7, S. 331 vorgelegt ist. Sie führt die Aufschrift: „Cirriclouds and Aurora". Herr Blake beschreibt ein ausgezeichnetes System von fächerartig aus einer Mittelmasse von lichten Wolken am nördlichen Horizont gegen das Zenith zu, nebst einem schmalen von Ost gegen West reichenden Wolkenbogen, ausstrahlenden nordsüdlichen Streifen, welche derselbe am 14. December 1862 Nachmittags gegen 4 Uhr bei Danesbury unweit Welwyn in Hertfordshire beobachtet hatte, in welcher Nacht sodann ein Nordlicht statt fand. Er gedachte einer ähnlichen Cirrus-Wolkenstellung unmittelbar vor einem Nordlichte aus einer früheren Zeit, während seines Aufenthaltes in Cambridge im Jahre 1856. Diesmal am 14. December sprach er sogleich seine Ansicht von der Wahrscheinlichkeit eines für den Abend bevorstehenden Nordlichtes aus, und wirklich zeigte sich zu seiner Befriedigung eine sehr glänzende Erscheinung dieser Art. „Ich kann den tiefen Eindruck auf meinen Geist nicht auslöschen, dass das was ich als eine eigenthümliche Anordnung von Cirruswolken bei Tage beobachtete, in der That ein Nordlichtvorgang war, der eben statt fand, und dass ein Zusammenhang besteht zwischen dem Cirrus der höchsten Regionen der Atmosphäre, und den elektrischen Erscheinungen des Nordlichtes.

Und wenn ich diesen Gedanken vereinige mit Herrn Glaisher's Beobachtungen, während seiner letzten Luftfahrten, wo die Cirruswolken, wenn sie am höchsten standen, eben so weit entfernt schienen, als zunächst der Erdoberfläche, so scheint es, dass man nach irgend welchen anderen Ursachen für ihre Bildung sich umsehen muss, als um Wasserdampf, besonders wenn man auch die Trockne und die ausnehmende Tiefe des Thaupunktes in jenen Gegenden in Betrachtung zieht" [1]).

Es bezieht sich dies auf die wichtigen Ergebnisse der Luftreisen des Herrn Glaisher in seinem Artikel über die meteorologischen Beobachtungen in acht Luftballonfahrten [2]). Bei grossen Höhen, namentlich über 5000 Fuss ist die Luft ungemein trocken und der Unterschied zwischen Temperatur und Thaupunkt ist so gross, dass Wasserdampf fast vollständig fehlt. „Unter diesen Umständen ist die Gegenwart von Cirrus hoch über dieser trockenen Region höchst merkwürdig: jedesmal schienen sie noch eben so hoch, als wenn man sie von der Erde aus sah. Aus was mögen sie bestehen?" [3]).

Bei der Fahrt am 18. August 1862 von Wolverhampton aus, in dem Ballon des Herrn Coxwell und in Gesellschaft mit demselben durchgeführt, erreichte Glaisher die Höhe von 23.000 Fuss. Die Höhe der Cirri in zwei Lagen wurde auf 28.000 und 31.000 Fuss geschätzt. Bei der Fahrt von Wolverhampton am 5. September 1862 bei tiefblauem Himmel gelangen Beobachtungen noch bis zur Höhe von 28.000 Fuss, aber obwohl Glaisher nach der Zeit die vorüberging, einem Minimum-Thermometer und einem Aneroid-Barometer die mit

---

[1]) „I cannot remove from my mind a strong impression that what I noticed in day light as a singular arrangement of the cirri was in fact an auroral display then going on and that there is some connection between the cirri in the highest regions of our atmosphere and the electrical phenomena of an aurora. And when I couple this idea with the observations made by Mr. Glaisher during his late balloon ascents, on which occasion the cirri appeared to be as far removed from him at his highest elevation as when on the earth it seems we must look for some other cause for their formation than that of aqueous vapour, especially when the dryness and the extremely low dew-point of those regions are likewise considered."

[2]) On the meteorological Observations made in Eight Balloon Ascents. By James Glaisher Esq. F. R. S. Secretary, in dem ersten Bande (Vol. I. N. S.) S. 234, Sitzung am 19. November 1862, veröffentlicht am 7. April 1863 der Proceedings of the British Meteorological Society.

[3]) „Under these circumstances, the presence of cirrus clouds far above this dry region is very remarkable: on all occasions, when seen, they appeared still as far above as when viewed from the earth. Of what can they be composed?" S. 259.

dem Ballon erreichte Höhe auf 37.000 Fuss zu schätzen vermochte, so hatte die Dünne der Luft und die niedrige Temperatur jede Beobachtung unmöglich gemacht und die beiden Herren waren offenbar in grösster Gefahr, Opfer ihres Forschungseifers zu werden.

Aber von diesen Höhen bis zu jenen der Erscheinung des Nordlichtes ist doch noch ein grosser Zwischenraum, wie noch vom 9. März 1861 Herr Alex. S. Herschel von Hawkhurst berichtet, wo der westöstliche Bogen, nach Beobachtungen in London und Nottingham in der Mitte zwischen beiden Orten auf einer Höhe von 83 englischen oder etwa 17 geographischen Meilen stand [1]).

Auf die Frage der Einwirkung elektrischer Strömungen beziehen sich die Ergebnisse der Beobachtungen des Herrn Reverend George Fisher M. A., F. R. S., der Captain Parry's zweite Nordpol-Reise als Astronom begleitete, welche dieser in einem Berichte an die British Association für 1845, p. 22—25 verzeichnete [2]). „Die lebhaftesten Erscheinungen des Nordlichtes finden in der Nähe der Ränder des überfrierenden Meeres statt [3])."

Dann: „Es ist ein elektrisches Phänomen und wird hervorgebracht durch die positive Elektricität entwickelt durch das Gefrieren der Wasserdämpfe und der darauffolgenden inducirten negativen Elektricität der höheren und umgebenden Theile der trockenen Atmosphäre. Es ist das begleitende Anzeichen der Wiederherstellung des elektrischen Gleichgewichtes und dieses wird hergestellt unter der Vermittlung und Leitkraft der kleinen gefrorenen Theilchen, welche bei dem Durchgange der Elektricität die Lichterscheinung geben und durch dieselbe alle die verschiedenen einzelnen Erscheinungen [4])".

---

[1]) Proceedings of the British Meteorological Society. Vol. I, P. III. Sitzung am 15. Jänner. Herausgabe am 10. April 1862.

[2]) Proceedings Brit. Met. Soc. Vol. I, p. 128.

[3]) „The principal displays of the aurora occur in the vicinity of the edge or margin of the Frozen Sea."

[4]) „It is an electrical phenomenon and arises from the positive electricity developed by the congelation of these (humid) vapours and the consequent induced electricity of the upper and surrounding portions of dry atmosphere. It is the accompanying indication of the restoration of of the electrical equilibrium, which equilibrium is restored by the intervention and conducting power of minute frozen particles, which particles are rendered luminous by the transmission of electricity and thereby give rise to the various appearances of the phenomena."

Ferner: „Die gewöhnliche Höhe über der Erdoberfläche ist in hohen Breiten sehr wenig beträchtlich [1])".

Sehr wichtig ist auch diese Thatsache, dass der Berichterstatter selbst und Andere öfters beobachteten, „dass sich höchst feine Eistheilchen absetzten, wenn das Nordlicht im Zenith stand [2])".

Diese Bemerkungen bieten wohl vielfache Anknüpfungspunkte in der Betrachtung der sämmtlichen scheinbar so verschiedenartigen Erscheinungen dar.

Wenn ich auch, um ein doch etwas mehr anschauliches Bild dieser einzelnen Federwolke zu geben, mich nicht enthalten konnte einige Beziehungen ihrer Natur zu berühren, so muss ich es doch des grossen Umfanges wegen vermeiden, auf entferntere Ursachen des genannten Phänomens der Wolken überzugreifen. Aber ich darf wohl nicht verfehlen, wenigstens in allgemeinen Worten anerkennendst des hohen Werthes der umfassenden Arbeit unseres hochgeehrten correspondirenden Collegen, Herrn Karl Fritsch, Vicedirectors der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, zu gedenken, welche er bereits in dem 1847 herausgekommenen vierten Bande der V. Folge aus den Jahren 1845 und 1846 der Abhandlungen der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften veröffentlichte, gegründet auf langjährige Aufmerksamkeit seit dem Jahre 1827 und namentlich fünfjährige unausgesetzte tägliche Beobachtung vom 1. August 1839 bis zum Ende Juli 1844 darstellend, wie sie auch seinen späteren Arbeiten in Gemeinschaft mit unserem verewigten Collegen Kreil zum Grunde liegen. Noch weniger aber schien es mir am Orte in die vielfachen Erfolge der de la Rive, Loomis und Anderer, die sich andererseits anschliessen, näher einzugehen.

Jedenfalls bleibt aber auch die unmittelbare Messung einer Erscheinung, wie die am 17. Juni recht sehr wünschenswerth und wäre bei entsprechender Vorbereitung auch nicht mit allzu grossen Schwierigkeiten verbunden.

---

[1]) „Its usual height above the surface of the earth is very inconsiderable in high latitudes."

[2]) „The sudden deposition of extremely minute frozen particles, when auroral displays took place near to the zenith, was several times observed by the author as well as by others."

Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium in Innsbruck.

I.

Zur Geschichte des Tyrosins.

Von L. Barth.

Die Ansichten über die Constitution dieses interessanten Körpers sind durch die neuesten Untersuchungen so ziemlich auf diejenige zurückgeführt worden, nach welcher er als Äthylamidosalicylsäure anzusprechen wäre.

Die Belege für diese Ansicht schienen die verschiedenen Zersetzungsproducte zu bieten, da derselbe Derivate des Phenyls und Acetyls [1]), so wie Ammoniak zu liefern im Stande ist.

Es musste daher befremden, dass trotzdem eine Synthese des Tyrosins nicht gelang, obwohl der eingeschlagene Weg beinahe sicher hätte zu diesem Resultate führen müssen, ein Umstand, der einigermassen an der Richtigkeit der ersterwähnten Hypothese zweifeln liess.

Salicylsäure selbst war noch nie aus Tyrosin dargestellt, sondern ihre Anwesenheit blos aus den Zersetzungsproducten erschlossen worden. Es konnte also wünschenswerth erscheinen durch eine neue Zersetzungsweise wirklich Salicylsäure daraus zu erhalten. Das einfachste Mittel hiezu schien die Oxydation durch schmelzendes Kali, das die einmal gebildete Salicylsäure nicht weiter zersetzt [2]).

Zu diesem Zwecke wurden etwa 2 Loth Tyrosin mit der vierfachen Menge Kalihydrat in der Silberschale verschmolzen, bis das anfangs auftretende starke Schäumen und der bald sich entwickelnde Ammoniakgeruch aufgehört hatten. Sodann wurde mit Wasser ver-

---

[1]) Vergl. die letzte Untersuchung von Schmitt u. Nasse, Annal. Bd. 133, S. 211. u. Städeler Annal. Bd. 116, S. 57.

[2]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. 51, S. 160.

dünnt, mit Schwefelsäure übersättigt und die, von Spuren eines harzartigen Körpers, so wie von auskrystallisirtem schwefelsaurem Kali filtrirte Flüssigkeit wiederholt mit Äther ausgeschüttelt.

Beim Versetzen mit Schwefelsäure machte sich ein Geruch nach Essigsäure bemerklich.

Die ätherischen Auszüge wurden dann destillirt und der Destillationsrückstand in heissem Wasser aufgenommen. Alsbald nach dem Auskühlen krystallisirte eine Substanz in schönen langen Prismen, die durch Umkrystallisiren gereinigt wurden.

Ihre äusseren Eigenschaften stimmten vollkommen mit denjenigen überein, welche ein in neuester Zeit mehrfach beschriebener Körper zeigt: Die Paraoxybenzoësäure. Alle Reactionen, die in dieser Richtung gemacht wurden, bestätigten die erste Vermuthung vollständig.

Die durch Umkrystallisiren gereinigten Krystalle löst man in verdünnter Ammoniakflüssigkeit und dampft auf dem Wasserbade ein, bis der Geruch nach Ammoniak verschwunden ist. Dann versetzt man die kalte Lösung des so entstandenen Ammoniaksalzes mit einer mässig concentrirten Lösung von schwefelsaurem Kupfer. Sogleich erstarrt die ganze Masse zu einem Brei von feinen Nadeln, die auf ein Filter gebracht und mit kaltem Wasser gewaschen werden. Nach dem Trocknen stellen sie eine grünliche verfilzte Krystallmasse dar, von demselben Aussehen wie das früher beschriebene paraoxybenzoësaure Kupfer. Sie verloren bei 120° getrocknet 24·7 Pct. Krystallwasser und gaben beim Glühen eine Menge Kupferoxyd, die 18·4 Pct. metallischen Kupfer's entsprach.

Die Rechnung verlangt 24·2 Pct. Wasser und 18·9 Pct. Kupfer.

Löst man dieses Salz in Wasser, dem etwas Salzsäure zugesetzt ist, und fällt das Kupfer mit Schwefelwasserstoff, so erhält man aus der filtrirten und etwas eingeengten Lösung schöne, bis halbzolllange Nadeln, die bei 100° matt werden und bei 208—210° schmelzen, die in kaltem Wasser schwer löslich, leicht löslich aber in heissem, in Alkohol und Äther sind, die alkalische Kupferoxydlösung nicht reduciren und mit den kohlensauren Salzen des Cadmiums, des Bleies und Silbers schnell die charakteristischen Salze der Paraoxybenzoësäure geben.

Versetzt man ihre Lösung mit überschüssigem Bromwasser, so erhält man eine flockig krystallinische Ausscheidung von dreifach gebromtem Phenylalkohol.

Die bei 110° vollständig getrocknete Substanz verlor 11·7 Pct. Krystallwasser. Die für die lufttrockene Paraoxybenzoësäure nach der Formel $C_7H_6O_3 + H_2O$ berechnete Menge ist 11·5 Pct.

Die getrocknete Substanz gab bei der Verbrennung

		Gefunden.		Berechnet.
C	—	60·7	—	60·9
H	—	4·3	—	4·3

Bei der trockenen Destillation zersetzt sich die Substanz zum Theil, und das krystallisirende Destillat von dem mit übergehenden öligen Körper getrennt und umkrystallisirt, ist wieder unveränderte Paraoxybenzoësäure.

Kurz alle ausgeführten Versuche lassen keinen Zweifel über die Identität dieser beiden Säuren.

Die Zersetzungsgleichung des Tyrosins wäre dann folgende:

$$C_9H_{11}NO_3 + H_2O + O = C_7H_6O_3 + C_2H_4O_2 + NH_3.$$

Die erhaltene Menge Paraoxybenzoësäure entsprach, in Anbetracht der unvermeidlichen Verluste, ziemlich genau dieser Gleichung.

Da die Paraoxybenzoësäure mit der Salicylsäure isomer ist, war die bisherige Ansicht über das Tyrosin allerdings die nächstliegende, um so mehr als beide isomere Säuren mit grösster Leichtigkeit Phenylverbindungen zu liefern im Stande sind.

Das was sie noch zu bestätigen schien, die violette Farbenreaction der sulfotyrosinsauren Salze mit Eisenoxydsalzlösungen, ist, wie ich mich überzeugt habe, auch auf Rechnung der Paraoxybenzoësäure zu schreiben.

Stellt man die Piria'sche, von Städeler modificirte Tyrosinreaction mit Paraoxybenzoësäure an, so erhält man eine dunkelrothe Farbenerscheinung.

Eine weitere Stütze für die frühere Ansicht schien in der zweibasischen Natur des Tyrosins zu liegen, die dasselbe als Derivat einer zweibasischen Säure zeigen musste, und es wäre gegen die jetzt mitgetheilte Auffassung sprechend, wenn die Paraoxybenzoësäure, wie aus den bisherigen Analysen ihrer Salze hervorgeht, einbasisch wäre.

Versuche in dieser Richtung angestellt, zeigten aber, dass die Paraoxybenzoësäure wirklich eine zweibasische Säure sei und dass man nach der Methode, nach welcher Piria die neutralen Salze der Salicylsäure dargestellt hat, ziemlich leicht Neutralsalze der Paraoxybenzoësäure von der Formel $C_7H_4R_2O_3$ erhält[1]).

Für die Synthese des Tyrosins, welches nunmehr sich am einfachsten als ein Derivat der Amidoparaoxybenzoësäure

$$\underbrace{C_7\begin{pmatrix}H_5\\NH_2\end{pmatrix}O_3}_{\text{Amidoparaoxybenzoësäure}} \quad \text{und} \quad \underbrace{C_7\begin{pmatrix}H_5\\NHC_2H_5\end{pmatrix}O_3}_{\text{Tyrosin}}$$

betrachten lässt, sind die eben mitgetheilten Verhältnisse von entschiedener Bedeutung, und es ist einleuchtend, dass aus Salicylverbindungen niemals wird Tyrosin entstehen können, sondern dass die entsprechenden Isomeren für diese Reaction in Betracht kommen.

Das, jetzt schon so oft beobachtete Auftreten der Paraoxybenzoësäure beweist die Wichtigkeit dieses Körpers und aus einer Zusammenstellung der betreffenden Reactionen lässt sich noch auf einen Zusammenhang des Tyrosins mit der kürzlich von Prof. Hlasiwetz entdeckten Paracumarsäure schliessen.

1. $\underbrace{C_8H_8O_3}_{\text{Anissäure}} + HJ = CH_3J + C_7H_6O_3$ (Saytzeff).

2. $\underbrace{2\left(C_7\begin{pmatrix}H_5\\NH_2\end{pmatrix}O_3\right)}_{\text{Paraamidobenzoësäure}} + N_2O_3 = H_2O + 4N + 2(C_7H_6O_3)$ (Fischer).

3. $\underbrace{C_9H_8O_3}_{\text{Paracumarsäure}} + H_2O + O = C_2H_4O_2 + C_7H_6O_3$ (Hlasiwetz und Malin[2]).

4. $\underbrace{C_9H_{11}NO_3}_{\text{Tyrosin}} + H_2O + O_2 = C_2H_4O_2 + NH_3 + C_7H_6O_3$ (Barth).

5. $\underbrace{C_{14}H_{14}O_7}_{\text{Carthamin}} + O = 2H_2O + 2(C_7H_6O_3)$ (Malin[2]).

---

[1]) Eine genaue Beschreibung dieser Salze, die jetzt zu weit führen würde, soll später gegeben werden.

[2]) Im Drucke befindliche Untersuchungen.

6. Aus Aloë (vielleicht: $\underbrace{C_{15}H_{16}O_7}_{\text{Aloëresinsäure}} + O = \underbrace{C_7H_8O_2}_{\text{Orcin}} + CO_2 + H_2O +$ $C_7H_6O_3$) (Hlasiwetz).
7. Aus Benzoëharz (Hlasiwetz und Barth).
8. Aus Drachenblut (Hlasiwetz und Barth).

Man sieht hieraus, dass das Tyrosin in dem Verhältnisse zur Paracumarsäure steht, wie das Alanin zur Acrylsäure.

Die nächsten Versuche werden dahin gehen, eine durch Brom oder Jod substituirte Paraoxybenzoësäure zu erhalten, mittelst der dann weiterhin die Synthese des Tyrosins versucht werden kann.

Weitere Mittheilungen hierüber seien vorbehalten.

Über das Carthamin.

Von G. Malin.

In seiner Untersuchung über das Pflanzengelb [1]) fand Stein, dass das Melin und das Melletin in Gegenwart von Wasser, oder gelöst in Weingeist, durch Natriumamalgam in einen rothen Körper verwandelt wird, welchen er Paracarthamin nannte, und der sich nach seiner Annahme vom Carthamin nur durch ein Plus von Wasser unterscheidet.

Die Beziehung zwischen Melin und Carthamin drückt er aus durch Melin + Buttersäure = Carthamin. Es schien um so mehr der Mühe werth, die Annahme einer so nahen Beziehung zwischen dem Paracarthamin und Carthamin durch einen Versuch zu prüfen, als zuletzt Hlasiwetz und Pfaundler auch den Zusammenhang dieses Paracarthamins mit dem Isomorin, den des Melins (Quercitrins) mit dem Morin selbst nachgewiesen haben [2]).

Gehörte das Carthamin mit in diese Gruppe von Körpern, so war mit Wahrscheinlichkeit zu erwarten, dass man aus dem Carthamin auch Phloroglucin oder eine entsprechende ähnliche Verbindung erhalten würde, dass überhaupt die Zersetzungsproducte des Carthamins diese Analogie unterstützen würden. Die Einwirkung von Alkalien in der Hitze, die bei den genannten Körpern so leicht die Bildung von Phloroglucin zur Folge hat, schien sich für diesen Zweck am besten zu empfehlen und ich habe auf Veranlassung des Herrn Prof. Hlasiwetz diesen Versuch ausgeführt.

Eine grössere Quantität Saflor wurde nach dem Verfahren von Schlieper zuerst mehrmals mit kaltem Wasser ausgelaugt, bis das

---

[1]) Zeitschrift für Chem. und Pharm. 1862, S. 370; 1863. S. 487; Centralblatt 1862, S. 376.

[2]) Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1864 vom 9. Juni; Centralblatt 1864, S. 565.

Apparat zur Darstellung des Phosphorsäureanhydrids.

Von **A. Graf Grabowski.**

(Mit 1 Tafel.)

Für die Darstellung grösserer Mengen Phosphorsäureanhydrids haben die bekannten Apparate, namentlich der von Delalande, so viel Unbequemes und Umständliches, dass die Beschreibung einer Vorrichtung, die ihren Zweck besser erfüllt, Vielen vielleicht nicht unwillkommen ist.

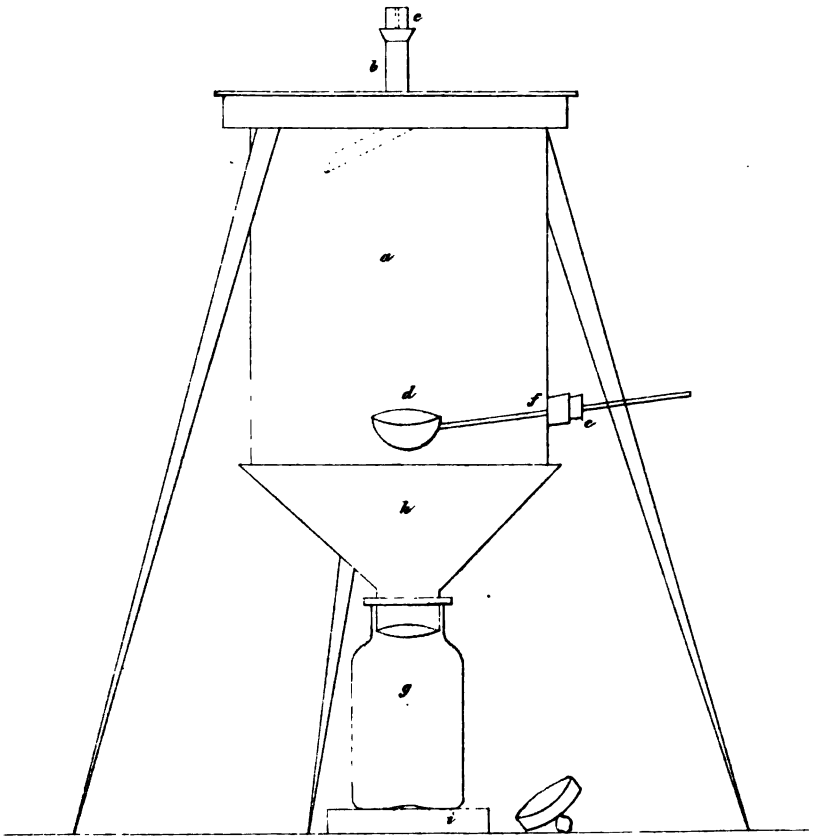
Eine solche muss eine leichte und schnelle Erneuerung der Luft gestatten, ein Abnehmen oder Überfüllen der Säure in das Sammelgefäss umgehen, möglichst einfach zu handhaben und unzerbrechlich sein.

Die von mir construirte leistet das Verlangte: es lassen sich darin continuirlich beliebige Mengen Phosphor verbrennen und man erhält in kürzerer Zeit eine reichlichere Ausbeute, als nach den anderen Methoden.

In der beigefügten Zeichnung ist *a* eine unten offene Trommel, 14 Zoll hoch und 12 Zoll weit, aus verzinntem, hartgelöthetem Eisenblech. Sie wird an einem vorspringenden Rande von einem hölzernen Gestell getragen und hat einen innen geknickten, etwa 1 Zoll weiten Schornstein *b*, den man während der Verbrennung mittelst eines durchbohrten Korkes *c* verengern kann. *d* ist ein kupferner Löffel, dessen eiserner Stiel in einem Holzpfropfen *e* festgesteckt ist. Dieser seinerseits passt in die viereckige 1½ Zoll weite Tubulatur *f* der Trommel *a*. *g* ist ein Glasgefäss, in das ein weitmündiger, blecherner Trichter *h*, der oben etwa ¼ Zoll weiter ist als die Trommel, genau passt. Durch Wegnahme des Brettchens *i* kann die Spalte zwischen *a* und *h* vergrössert werden, wenn die entsauerstoffte Luft, die dann bei *c* entweicht, erneuert werden soll.

Beim Beginn der Operation wird der Löffel mittelst einer Spirituslampe erhitzt und der in die Glasbüchse hineingepasste Trichter möglichst schliessend an die Trommel gestellt.

Grabowski. Apparat zur Darstellung des Phosphorsäureanhydrids



Aus d. k. k. Hof. u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LI. Bd. II. Abth. 1865.

Der in Stücke geschnittene, gut abgetrocknete Phosphor wird jetzt mit einer Zange eingetragen, indem man den heissen Löffel am Pfropfen fassend der Tubulatur nähert, ein Phosphorstück hineinlegt und den Löffel in seine frühere Lage zurückbringt.

Der Gang der Verbrennung kann von Zeit zu Zeit durch die Tubulatur beobachtet werden. Den Luftzutritt regelt man mittelst Senkung des Trichters und Lüftung des Korkes im Schornstein.

Nur anfangs, bevor die Trommel warm geworden ist, quillt etwas Dampf aus der Spalte zwischen Trichter und Trommel; die aus dem Schornstein austretende Dampfmenge ist, wenn man mit der Erneuerung der Luft wartet, bis der Phosphor abgebrannt ist, ganz unbeträchtlich.

Arbeitet man bei trockenem Wetter, so ist das Product immer pulverig und lässt sich leicht und vollständig mit den Händen in das Glasgefäss herunterklopfen, das man durch ein zweites ersetzt, wenn das erste gefüllt ist.

Die theoretische Ausbeute wird bei keiner der bekannten Methoden erreicht; nach der hier beschriebenen ist sie um mehrere Percente grösser als sonst, weil die Menge des, im Löffel hinterbleibenden rothen Phosphors eine ganz geringe ist.

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND. II. HEFT.

Jahrgang 1865. — Juli.

(Mit 2 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1865.

INHALT.

Seite

XVIII. Sitzung vom 13. Juli 1865: Übersicht 173

Schrauf, Die Refractionsäquivalente und optischen Atomzahlen der Grundstoffe 176

XIX. Sitzung vom 20. Juli 1865: Übersicht 212

Boltzmann, Über die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen 214

Frischauf, Über die Berührungsaufgabe für die Kugel . . . 222

Loschmidt, Beiträge zur Kenntniss der Krystallformen organischer Verbindungen (III.) (Mit 1 Tafel.) 238

XX. Sitzung vom 27. Juli 1865: Übersicht 244

Rollett, Versuche über thatsächliche und vermeintliche Beziehungen des Blutsauerstoffes. (Mit 1 Tafel.) 246

Ludwig, E., Chemische Analyse der Therme von Tobelbad bei Graz in Steiermark 264

Exner und *Kobrisch*, Chemische Analyse der Frauenquelle in Baden 272

Düsing, Eine absolute Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen *D*-Linien 280

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

7.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

XVIII. SITZUNG VOM 13. JULI 1865.

Wegen Erkrankung des Präsidenten übernimmt Herr Regierungsrath Ritter v. Ettingshausen den Vorsitz.

Der kais. russische Staatsrath Dr. K. E. v. Baer dankt, mit Schreiben vom $\frac{22.\ \text{Juni}}{4.\ \text{Juli}}$, für seine Wahl zum auswärtigen Ehrenmitgliede, und Herr Prof. Dr. Ferd. Ritter v. Hochstetter, mit Schreiben vom 10. Juli, für seine Wahl zum inländischen correspondirenden Mitgliede der Classe.

Das w. M. Herr Director M. Hörnes übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Eine Revision der Gatropoden der Gosauschichten in den Ostalpen", von Herrn Dr. F. Stoliczka, Assistenten der geologischen Aufnahmen in Ostindien.

Herr Director K. Jelinek übermittelt eine Abhandlung: „Beitrag zur Meteorologie und Klimatologie Galiziens", von Herrn Dr. M. Rohrer, Kreisphysikus in Lemberg.

Herr Dr. K. Freih. v. Reichenbach liest eine weitere Fortsetzung, betreffend seine Untersuchungen über loheartige Erscheinungen.

Der Secretär legt eine von Herrn Rutherfurd in New-York verfertigte und für die Akademie bestimmte Photographie des Mondes vor, so wie eine photographische Aufnahme des Sonnenspectrums, welche er von Herrn Rutherfurd erhalten hat.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wiss., königl. bayer., zu München: Sitzungsberichte. 1865. I. Heft 2. München; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 13. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1537. Altona, 1865; 4°.

Beer, August, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektromagnetik. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Plücker. Braunschweig, 1865; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LX. Nr. 25—26. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. 1er Volume, 26e Livraison; 2e Volume, 1re Livraison. Paris, 1865: 8°.

Ecker, Alexander, *Crania Germaniae meridionalis occidentalis.* (Mit 38 Tafeln.) Freiburg i. Br., 1865; 4°.

Gesellschaft, Naturforschende, in Danzig: Schriften. N. F. I. Bd., 2. Heft. Danzig, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 27—28. Wien, 1865; 8°.

Karliński, Franciscus Michael, *Hestiae Planetae minoris XLVI^{i}. elementa nova etc. Cracoviae, MDCCCLV;* 4°.

Lamy, A., Le Thallium et ses principaux composés. (Extr. des Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, t. II. 1865) Paris; 4°.

Land- und forstwirthsch. Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 19—20. Wien, 1865; 4°.

Mittheilungen des k. k. Genie-Comité. Jahrg. 1865, 5. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. V. Hft. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 105e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Nägeli, Carl, Entstehung und Begriff der Naturhistorischen Art. (2. Auflage.) München, 1865; 8°.

Örsted, A. S., Bidrag til Naaletraeernes Morphologi. (Af naturhist. Foren. Vidensk. Meddelelser. 1864. 8°.) — Jagttagelser som have ledet til Opdagelsen af de hidtil ukjendte Befrugtningsorganer hos Bladsvampene. Kjöbenhavn, 1865; 8°. — Compte rendu provisoire de quelques observations, qui prouvent, que le *Podisoma Sabinae* et le *Roestelia cancellata* sont des générations alternantes de la même espèce de Champignon. 8°.

Osservatorio Reale di Palmero: Bullettino Meteorologico. Nr. 5, Maggio 1865. Fol.

Reader. Nr. 131—132. Vol. VI. London, 1865; Fol.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatschrift für Forstwesen. XV. Bd. Jahrg. 1865. Mai-Heft. Wien, 1865; 8°.

Santini, Giovanni, Relazione intorno alle attrazioni locali risultanti nei contorni di Mosca etc. (Estr. dal Vol. XII. delle Memorie dell'Istit. Veneto.) Venezia, 1865; 4°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 52—55. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 18. Gratz, 1865; 4°.

Die Refractionsäquivalente und optischen Atomzahlen der Grundstoffe.

Von **Dr. Albrecht Schrauf.**

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. April 1866.)

Die Frage nach der Einwirkung der Materie auf die Schwingungen des Lichtes war oftmals Gegenstand der Untersuchungen. Auch von mir wurden mehrere Abhandlungen bereits veröffentlicht, in welchen durch weitläufige Begründung dargelegt ward die Möglichkeit einer speciellen Untersuchungsmethode, auf welche gestützt, in nachfolgendem die Werthe ermittelt sind, die die wahren wirkenden Kräfte der Materie darzustellen vermögen. Die Einwirkung der Krystallbildung soll den Gegenstand nachfolgender Untersuchungen bilden.

I. Theoretische Untersuchungen.

§. 1. Theorie des Refractionsvermögens. Die wechselnden optischen Eigenschaften von den Eigenschaften der Materie abzuleiten, war oftmals Bestreben der Physiker. Als ein Ausfluss dieses Bestrebens kann die allbekannte Newton-Laplace Formel für das Brechungsvermögen

$$(1) \qquad \frac{\mu^2 - 1}{d}$$

angesehen werden. Schon die Untersuchungen der nachfolgenden Autoren waren bestrebt, diese Formel zu verwerthen, um aus den bekannten Eigenschaften der Bestandtheile auf die Summe der letzteren schliessen und dieselbe im Voraus berechnen zu können.

Die Gase, welche sich am leichtesten darboten, zeigten nur zum Theile günstige Resultate und noch weniger aber feste Körper, eine Thatsache, welche erst durch die neueren Untersuchungen, über die Nothwendigkeit des Atomgewichtes als Factor, erklärt ward. Die

Beobachtungen von Arago und Biot [1]) führten damals zu einem zweiten Gesetze, welches in der Neuzeit als gleichsam neu aufzutauchen beginnt, zur Formel

$$\frac{\mu-1}{d}. \tag{2}$$

Ihre Untersuchungen ergaben nämlich für die Gase, dass der Zuwachs des absoluten Brechungsexponenten dem Dichtigkeitszuwachs proportional, daher $\frac{\mu-1}{d}$ constant ist.

Ihre Versuche führten sie damals zu dem Ausspruche [2]): la refraction d'un même gaz quelquonque est toujours rigoureusement proportionelle a sa densité — doch blieben sie aus theoretischen Gründen bei der Newton'schen Formel; und erst Beer erklärte ihre Beobachtungen durch die Formel (2).

Welche Formel in Wahrheit gelte, namentlich bei den festen und flüssigen Körpern, ob bei diesen der Molecularzustand auf die Fortpflanzung des Lichtes von Einfluss sei oder nicht, war unbestimmt — man ersieht dies wohl aus einer Äusserung von Beer [3]): „Die Geschwindigkeit des Lichtes in flüssigen und festen Körpern ist eine Function der Oscillationsdauer oder Wellenlänge, während sie im leeren Raume oder in den Gasen von jenen unabhängig bleibt."

Ich habe nun bereits seit längerem und weitläufig bewiesen, dass auch in den festen und flüssigen Körpern die Fortpflanzung des Lichtes auf denselben Principien beruht, wie in den Gasen, und dass auf die Geschwindigkeit, mit der der Lichtimpuls sich fortpflanzt, die Körperdichte und die chemische Zusammensetzung einen Einfluss haben — letztere in der Weise, dass das Verzögerungsmoment jeder Verbindung als Summe der Verzögerungen jeder ihrer Bestandtheile hingestellt werden kann.

Meine Untersuchungen, welche auf die Cauchy'sche Dispersionsformel gebaut waren, führten daher zu folgenden Gleichungen:

$$\mu = A + \frac{B}{\lambda^2} \tag{3}$$

$$M = \frac{A^2-1}{d} \qquad N = \frac{B}{d^2} \tag{4}$$

---

[1]) Gilbert, Ann. vol. 25, vol. 26.

[2]) Memoir. d'Institut. Paris, 1806. P. I. 322.

[3]) Beer, höhere Optik pag. 36.

$$(5) \qquad \mathfrak{M} = PM \qquad \mathfrak{N} = PN$$

$$(6) \qquad \mathfrak{M}(a+b+c..) = n\mathfrak{M}(a)+n'\mathfrak{M}(b)+\ldots,$$

in welchen Gleichungen P das Atomgewicht ist, M und N als Refractions- und Dispersionsvermögen, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ als Refractions- und Dispersionsäquivalent bezeichnet wurde und n, $n'\ldots$ aus der Reihe der einfachen Zahlen entnommene Multipla darstellen. Die Dichte selbst wird immer auf die Luft als Einheit bezogen und d für Gase oder Dampf, D für feste Körper genannt, letztere daher mittelst 773·48 in erstere verwandelt.

Die Dispersionsformel (3), welche oben zu Grunde gelegt ward, findet schon zahlreiche Gegner, da sie sich den Beobachtungen nicht vollständig anzuschmiegen scheint, es stand daher auch zu erwarten, dass die Werthe von N viel grössere relative Unsicherheit hatten als M.

Manche Rechnungen führten mich später zu einer kleinen Abänderung des Dispersionsvermögens, wodurch den Verhältnissen besser Rechnung getragen wurde; es ist dies die Annahme von

$$(7) \qquad \mu = A'\left(1+\frac{B'}{\lambda^3}+..\right)$$

$$(8) \qquad N' = \frac{B'}{d}\,.$$

Doch da sich bei der vollständigen theoretischen Entwickelung des Begriffes Brechungsvermögen sowohl eine neue Dispersionsformel darbot, als auch der Überfluss einer speciellen Dispersionsconstante erwies, so ziehe ich die früheren Sätze über das Dispersionsvermögen als überflüssig zurück.

Dass ich für das Brechungsvermögen die Formel (4) und nicht die von Beer proponirte Formel (2) wählte, obgleich beide nahezu richtig sind, ward bei dem Beginne meiner damaligen Untersuchungen durch folgende Gründe unterstützt: *a)* durch die Angaben von Dulong, welcher angibt, dass der relative Zuwachs der Brechungsexponenten nahe dem Condensationspunkte [1]) nicht mehr der Dichte

[1]) Die neuesten Untersuchungen von Ketteler (Berlin, Monatsberichte 1864) haben über das Verhalten in der Nähe der Condensation keine Angaben.

proportional sei; *b)* dass sich die Formel aus dem Princip [1]) der wirkenden und verzögernden Kräfte ableiten lasse und schliesslich *c)* die Verhältnisse sowohl bei Gasen als auch festen und flüssigen Körpern gleichmässig zu umfassen vermag, was ich durch vielfache Rechnungen, ausgeführt nach beiden Formeln (1) und (2) constatirte.

Da ich die letztere Formel (2) manchmal berücksichtigen werde, so wähle ich zu ihrer Bezeichnung, da sie durch Beer auf Grund der Forschungen von Arago und Biot später als (1) in die Wissenschaft eingeführt ward, den Ausdruck secundäres oder Biot'sches Refractionsvermögen oder Refractionsäquivalent

$$m = \frac{\mu - 1}{d} \tag{9}$$

$$\mathfrak{m} = Pm \tag{10}$$

zum Unterschiede von den primären Formeln (4) und (5).

Um von vorneherein die Tragweite von Vergleichungen der Formeln (4) und (9) sicher zu stellen, darf man nur bedenken, dass

$$\mu^2 - 1 = 2(\mu - 1) + (\mu - 1)^2,$$

woraus folgt:

$$M = 2m + dm^2 \tag{11}$$

$$m = \tfrac{1}{2}M - \tfrac{1}{4}M^2 d + \ldots (aM^{2n-1} - bM^{2n}). \tag{12}$$

Beide Formeln sind also untrennbar verknüpft, da sie Summe oder Differenz von einander sind, wobei nur das eine variable Element, die Dichte hinzutritt. Für alle Fälle — Gase — wo die Dichte der Limite $d = 0$ sich nähert, fällt m mit $\frac{1}{2}M$ zusammen; hingegen für jene Fälle, wo D grosse Werthe annimmt, ist zu berücksichtigen, dass für Reihen — namentlich die der organischen Chemie — bei deren Gliedern die Dichte nur wenig wechselt, die Constanz von m durch jene von M bedingt ist, da ja das variable Element d sich selbst einer Constanten nähert.

---

[1]) Schrauf, Pogg. Ann. 119, pag. 472.

Es lässt sich somit von vorneherein erklären, dass die Verification solcher Formeln nur durch weit aus einander liegende vollständig heterogene Körper erreicht werden kann.

Ich habe daher um einen solchen Beweis zu liefern, bereits, Pogg. Ann. vol. 116, pag. 218, solche Körper in die Untersuchung eingezogen; da ich damals zufrieden mit der Richtigkeit von (4), nicht auf den Nachweis der grösseren oder geringeren Genauigkeit von dem secundären Biot'schen Refractionsvermögen eingehen wollte, so bin ich genöthigt, diesen hier folgen zu lassen.

Schwefeldampf. [1]) . .	$d = 6 \cdot 617$	M 0·000492	m 0·000246
„ fest	$D = 2 \cdot 065$	0·002017	0·000659
Phosphordampf . . .	$d = 4 \cdot 355$	0·000626	0·000313
„ fest	$D = 1 \cdot 823$	0·002437	0·000784
Kohlenst. Diamant . .	$D = 3 \cdot 5$	0·001820	0·000529
Anthracit . .	$D = 1 \cdot 4$	0·001829	0·000664
Wasser, flüssig	$D = 1 \cdot 0$	0·001005	0·000430
fest	$D = 0 \cdot 918$	0·001004	0·000435

Die Zahlen (l. c.) gaben die Nothwendigkeit, bei der Formel $\frac{\mu^2-1}{d}$ zu beharren, indem sie zeigten, dass die Werthe von M entweder constant oder ein einfaches — bei Schwefel und Phosphor das vierfache — Multiplum seien (von mir Pogg. 119, pag. 473, Satz 16, Refractionscondensation genannt), während sich hingegen bei m eine geringere Übereinstimmung und trotz der Nothwendigkeit eines Multiplicators doch nicht das Gesetz eines einfachen Multiplicators bei S und P zeigte.

Da also Identität, oder letztere mittelst eines einfachen Multiplums nur durch M erreichbar, andererseits — wie ich auch in der vorliegenden Untersuchung wohl noch vielfach zu erwähnen Gelegenheit haben werde — auch die Formel (9) für m ohne Refractionscondensation nicht bestehen kann; so führte dies zu dem Satze:

„Das Brechungsvermögen M eines jeden Körpers ist ein constantes oder ein Multiplum desselben aus der Reihe der einfachen Zahlen."

---

[1]) Nach Angabe De Roux.

§. 2. Entwickelung der Formeln. Die Erscheinungen des Lichtes werden von Transversalvibrationen der kleinsten Theilchen abhängig gedacht, deren Elemente daher sein müssen: s Vibrations-Amplitude, die Elongation der Theilchen von ihrer Ruhelage, c die Vibrationsgeschwindigkeit, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge und τ die Dauer der Oscillation; zwischen welchen Grössen die Relationen bestehen müssen

$$s = c\tau \qquad \lambda = v\tau.$$

Die Vibrationshypothese des Lichtes hat in ihrem Gegensatze zur Emissionstheorie für die Schwingungen des Lichtes ein Imponderabile, den Äther, angenommen; die dritte, der Zeit nach älteste und jüngste Hypothese: eine Moleculartheorie des Lichtes, erklärt die Erscheinungen des Lichtes, ohne Zuhilfenahme des Äthers, durch die Transversalschwingungen der Materie selbst. Da also vermöge letzterer Hypothese, welche durch Euler begründet, durch Grove's „Correlations" ausgebildet und von mir im Nachfolgenden adoptirt ist, die Erscheinungen des Lichtes mit der Materie in untrennbarem Connex stehen, so müssen sie auch den mechanischen Gesetzen letzterer folgen.

Eine Kraft, welche die Masseneinheit m mit der Geschwindigkeit c um die Elongation s aus dem Gleichgewicht zu bringen vermag, wird daher ausdrückbar sein durch

$$x = mc^2 = \frac{ms^2v^2}{\lambda^2}. \tag{13}$$

Da man diese Kraft als einen Unterschied der ursprünglichen wirkenden und der verzögernden Kräfte auffassen kann, so ist

$$\left(\frac{1}{x_w - x_v}\right) = \frac{\lambda^2}{ms^2v^2}. \tag{14}$$

Vergleicht man dieselbe Masseneinheit m in verschiedenen Aggregatzuständen, für welche v und v' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind; so ist

$$\left(\frac{1}{x_w^1 - x_v^1}\right) - \left(\frac{1}{x_w - x_v}\right) = \frac{\lambda'^2}{ms'^2v'^2} - \frac{\lambda^2}{ms^2v^2} \tag{15}$$

Postulirt man für v' einen solchen Aggregatzustand der identischen Masse, dass die Fortpflanzungsgschwindigkeit v mit der des

sogenannten leeren Raumes coincidirt, so ist auch s die Elongation und λ die Wellenlänge bezüglich des leeren Raumes. Bekanntlich ist, wenn μ den Brechungsexponenten bezeichnet $\lambda' = \frac{\lambda}{\mu}$; nimmt man ferner an, dass die Änderungen des Molecularzustandes gleichmässige Änderungen von c und v bewirken, so kann analog mit obigen bei constanten x_w statt s' gesetzt werden $\frac{s}{\mu}$. Da ferner die wirkenden Kräfte $x_w = x'_w$ gleich gesetzt werden können, so wie für $v = \infty$ auch $x'_v = o$, so folgt als Relation:

$$X_v = \frac{x'_v}{x_w(x_w - x'_v)} = \frac{\lambda^2}{ms^2v'^2} - \frac{\lambda^2}{ms^2v^2}$$

$$m\left(\frac{s^2}{\lambda^2}\right)v^2X_v = \frac{v^2}{v'^2} - \frac{v^2}{v^2} = \mu^2 - 1.$$

Setzt man für Masse Volumen und Dichte, so ist für constante Masseneinheit

$$V\left(\frac{s^2}{\lambda^2}\right)v^2X_v = \left(\frac{\mu^2-1}{d}\right) = M \tag{16}$$

Dieser Satz gilt für die Masseneinheit für jeden beliebigen Volum- oder Dichtigkeitszustand; sollen aber verschiedene Stoffe verglichen werden, so ist es nöthig, eine $\Sigma(m)$ Summe von Masseneinheiten einzuführen, welche den Complex des chemisch wirksamen und mit anderen Stoffen äquivalenten Körpers bilden; das Äquivalentgewicht P bildet hierzu den nöthigen Factor; daher sich unter übrigens constanten Verhältnissen für zwei Stoffe a und b

$$X_a : X_b = P_aM_a : P_bM_b = \mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b \tag{17}$$

verhalten.

Während die früher erhaltene Formel M als Refractionsvermögen bezeichnet wird, so stellt $\mathfrak{M}$ das Refractionsäquivalent dar und kann, da es auf einer der Newton'schen Formel analogen Formel beruht, als Newton'sches Refractionsäquivalent bezeichnet werden.

Die obige Gleichung zeigt ferner an, dass um die optischen Eigenschaften zweier chemisch verschiedenen Stoffe zu vergleichen, immer bis Berechnung der Refractionsäquivalente vorgeschritten werden muss; indem sich nur dieses auf chemisch äquivalente Massen bezieht.

Diese Ableitung der Refractionsäquivalente führt noch weiter zu Aufklärungen über Wesen und Möglichkeit der Refractionscondensation, über die Dispersion und schliesslich über die Zahl und Grösse der physikalischen Atome, welche alle mit den Beobachtungen im Einklange stehen und daher auch für die Richtigkeit obiger Hypothesen sprechen.

§. 3. Refractionscondensation. Werden die Refractionsäquivalente eines und desselben Grundstoffes in mehreren seiner Modificationen — z. B. gasförmig und fest — verglichen, so zeigen sich dieselben, wie bereits mehrmals (l. c.) erwähnt, nicht absolut gleich, sondern als ein einfaches Multiplum derselben. Grund und Grösse dieser Condensation lässt sich aus Formel (16) ableiten.

Will man mehrere M vergleichen, so ist nöthig, dass dieselben wegen der Abhängigkeit von s, λ, v, für Lichtstrahlen gleicher Art, d. i. gleicher Farbe gelten. Unter dieser Voraussetzung folgt aus (16), da für denselben Körper in seinen verschiedenen Aggregatzuständen dennoch $P_a = P_b$ ist.

$$\mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b = V_a X_a : V_b X_b. \qquad (18)$$

Löst man nun das Volumen auf in das Product von Zahl der Atome in deren Grösse also

$$V = ZG;$$

und bedenkt ferner, dass in obiger Entwickelung x_v bereits als Function von Masse, Volumen, Dichte angenommen ist, X^v, bei constanten x_w, nur mehr abhängig sein kann von dem chemischen Charakter des Stoffes und daher im vorliegenden Falle, wo nur Modificationen eines Stoffes vorliegen, gleich sein müsse, also $X_a^v = X_b^v$, so resultirt:

$$\mathfrak{M}_a : \mathfrak{M}_b = Z_a G_a : Z_b G_b \qquad (19)$$

in Worten ausgedrückt: Für gleiches Atomgewicht verschiedener Modificationen einer und derselben Substanz verhalten sich die Refractionsäquivalente wie die Producte an Zahl und Grösse der physikalischen Atome, durch deren Variation selbst der Unterschied der Modification begründet ist.

Obiges Product aus Zahl und Grösse der physikalischen Atome wird im Nachfolgenden als optische Atomzahl bezeichnet werden.

Beispielsweise verhalten sich nach Obigen die Refractionsäquivalente von Schwefel und Phosphor für deren gasförmigen oder festen Zustand

$$\mathfrak{M}_g : \mathfrak{M}_f = 1 : 4.$$

Wir können somit sagen

$$ZG_g : ZG_f = 1 : 4 = 1.2 : 8.1,$$

d. h. die Masseneinheit S oder P würde in gasförmigem Zustande durch 1 Atom der Grösse 2, hingegen in festem Zustande durch 8 Atome der Grösse 1 gebildet.

Es wäre wohl auch eine andere Zahlencombination möglich, allein die angeführte basirt auf der Vorstellungsweise: die Molecule der Gase im Gegensatz zu den fester Körper aus einer geringeren Anzahl grösserer Atome mit grösserer Distanz derselben bestehend zu denken.

Analog hiermit laufen auf dem Gebiete der theoretischen Chemie die Untersuchungen, welche die Bestimmung des physikalischen Moleculargewichtes zum Gegenstande haben.

§. 4. Optische Atomzahlen. Während in Obigem die Modificationen eines Stoffes, so sollen nun für gleiche Farbe die Refractionsvermögen mehrerer Körper für die Einheit ihrer Masse verglichen werden. Aus der obigen Gleichung folgt nämlich unter übrigens constanten Verhältnissen, dass

$$M_a : M_b = \frac{\mathfrak{M}_a}{P_a} : \frac{\mathfrak{M}_b}{P_b} = Z_a G_a X_a : Z_b G_b X_b \tag{20}$$

verhält.

Über die Variation der Grössen ZGX sind mehrere Annahmen möglich.

Die erste Annahme, welche sich darbietet, ist, die Kräfte X_a und X_b von den chemischen Eigenschaften abhängig zu machen.

Näher eingehend, ersieht man jedoch, dass kein physikalischer Grund vorhanden sein kann, warum die Massentheilchen von O anders als von H auf das Licht wirken sollen, da doch chemische Affinitäten nicht als Kräfte einen Schwingungszustand beeinflussen können.

Hierdurch wird man zur Hypothese geführt: die verzögernden Kräfte für alle Körper gleich zu setzen — eine Hypothese, welche durch die mittelst derselben gefundenen Resultate mehr als wahrscheinlich gemacht wird.

Sind somit für die verschiedenen Modificationen der Materie im Elemente die Kräfte gleich, so müssen sich in Folge früheren

$$M_a : M_b = \frac{\mathfrak{M}_a}{P_a} : \frac{\mathfrak{M}_b}{P_b} = ZG_a : ZG_b \qquad (21)$$

verhalten; also die Elemente durch Anzahl und Grösse der Atome der einen Materie unterscheiden und durch die Variation der ersteren erzeugt werden.

Soll dies wahr sein, so müssen sich die Reihen der chemisch ähnlichen Grundstoffe auch durch ähnliche Reihen ihrer optischen Atomzahlen auszeichnen. Letztere im dritten Theile berechnet, sprechen für obige Prämission.

§. 5. Dispersion. Aus der obigen Formel folgt für den Brechungsexponenten der Ausdruck:

$$\mu^2 = 1 - m\frac{s^2v^2}{\lambda^2}\frac{x'_v}{x_w(x_w - x_v)}. \qquad (22)$$

Da nach frühern erörterten

$$\lambda = v\tau, \quad s = c\tau, \quad \text{also } \frac{s}{\lambda} = \frac{c}{v} \text{ ist,}$$

so folgt

$$\mu^2 = 1 - Cmc^2,$$

wobei $c = \frac{s}{\tau}$ und für leeren Raum giltig. Da man die Intensität durch die Grösse der Amplitude zu bezeichnen pflegt, so wird für constante Kraft x_w auch s für alle Farben nahezu den Charakter einer Constanten annehmen, und wir können sagen, der Eindruck der verschiedenen Farben wird erzeugt durch die Variation der Vibrationsgeschwindigkeit; dies vorausgesetzt, folgt aus $c = \frac{s}{\tau}$ und $c = \frac{\text{const}}{\tau} = \frac{\text{const}}{v\lambda}$ schliesslich

$$\mathfrak{E}_w = 1 - mC\frac{\text{const}}{v^2\lambda^2} \qquad (23)$$

als Ausdruck der Abhängigkeit von der Wellenlänge im leeren Raume. Man ist ferner wohl gewohnt, v des leeren Raumes für alle Farben gleich zu setzen; allein die Annahme Cauchy's über das Fehlen der Dispersion ist unbegründet und es wäre daher zur absolut genauen Berechnung der Factor v in Rechnung zu stellen.

Während in der früheren Abhandlung daher nöthig war, die Dispersion getrennt in Untersuchung zu ziehen, so folgt dieselbe hier unmittelbar, da

$$\mathfrak{M}_\rho = \frac{\mathfrak{M}}{\lambda_\rho^2} \qquad \mathfrak{M}_v = \frac{\mathfrak{M}}{\lambda_v^2}$$

oder in Beziehung auf Fraunhofer'sche Linien

$$(24) \quad \mathfrak{M}_H - \mathfrak{M}_g : \mathfrak{M}_g - \mathfrak{M}_F \ldots = \left(\frac{1}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda_g^2}\right) : \left(\frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_F^2}\right) \ldots$$

Um diese Formel auf dem einfachsten Wege zu verificiren, kann man die Factoren d und P von M als Coëfficienten von C betrachten und daher $\mu^2 - 1$ statt $\mathfrak{M}$ setzen, daher auch

$$(25) \quad (\mu_\rho^2 - 1) - (\mu_v^2 - 1) = \mu_\rho^2 - \mu_v = C\left(\frac{1}{\lambda_\rho^2} - \frac{1}{\lambda_v^2}\right)$$

oder

$$(26) \quad \mu_H^2 - \mu_g^2 : \mu_g^2 - \mu_F^2 \ldots = \frac{1}{\lambda_H^2} - \frac{1}{\lambda_g^2} : \frac{1}{\lambda_g^2} - \frac{1}{\lambda_F^2} \ldots$$

Diese Dispersionsformel ward in Folgendem mit den Beobachtungen verglichen, wobei der Factor v vernachlässigt ward.

Nimmt man für die Wellenlängen die von Ditscheiner (Sitzb. d. Wien. Akad. 1864) erhaltenen Werthe für Fraunhofer'sche Linien, so ergeben sich nebenstehende Verhältnisse der Differenzen:

B	687·0		
		15·0	
C	655·9		
		40·5	
D	589·2		
		52·7	
E	526·2		
		46·1	
F	485·9		
		84·0	
G	430·8		
		70·4	
H	396·7		78·5.
		8·1	
H'	393·3		

Im Nachfolgenden sind für einige Stoffe mit ziemlich verschiedenem Dispersionsvermögen sowohl die Differenzen $\mu - \mu$ (nach Cauchy's Dispersionsformel) als auch die Differenzen $\mu^2 - \mu^2$ nach Formel (26) angegeben.

Wasser. Willigen, Pogg. Ann. 1864.

	μ	$(\mu-\mu)$	Δ	μ^2	$(\mu^2-\mu^2)$	Δ'
B	1·33048			1·77017		
		18·0	3		18	3
C	1·33122			1·77215		
		45·0	4·5		44·8	4·3
D	1·33307			1·77708		
		53·5	0·8		53·3	0·6
E	1·33527			1·78294		
		46·9	0·8		46·9	0·8
F	1·33720			1·78810		
		83·4	0·6		83·5	0·5
G	1·34063			1·79729		
		67·4	{ 3·0		70·0	{ 0·4
H	1·34350		{11·1	1·80499		{ 8·5
			$S\Delta$ 12·7			$S\Delta'$ 9·6
			20·1			17·7

Lösung von salpeters. Wismuth. Ditscheiner, Sitz. Wien, 1864.

	μ	$(\mu-\mu)$	Δ	μ^2	$(\mu^2-\mu^2)$	Δ'
B	1·43616			2·06254		
		14·0	1		13·4	1·6
C	1·43733			2·06583		
		40·0	0·5		40·6	0·1
D	1·44076			2·07579		
		52·5	0·2		52·9	0·2
E	1·44526			2·08878		
		45·9	0·2		46·4	0·3
F	1·44920			2·10018		
		85·3	1·3		86·5	2·5
G	1·45651			2·12142		
		72·2	6·3		73·7	4·8
H	1·46270			2·13949		
			S·Δ 9·5			$S\Delta'$ 9·5

Flintglas 13. Fraunhofer.

	μ	$(\mu-\mu)$	Δ	μ^2	$(\mu^2-\mu^2)$	Δ'
B	1·627749			2·64896		
		14·0	1·0		15·0	0·0
C	1·629681			2·65586		
		38·7	1·7		38·0	2·5
D	1·635036			2·67333		
		50·5	2·1		49·9	3·8
E	1·642024			2·69624		
		45·1	1·0		44·6	1·5
F	1·648260			2·71676		
		91·1	7·0		86·5	2·5
G	1·660285			2·75655		
		77·9	0·6		77·8	0·7
H	1·671062			2·79232		
			$S\Delta$ 13·4			$S.\Delta'$ 11·0

Im Vorstehenden sind wohl nur drei, jedoch als sehr genau bekannte Beobachtungen verwendet worden, aber bereits in zwei derselben entscheidet die Summe der Fehler zu Gunsten der neu aufgestellten Formel 25.

Wir gewinnen somit das Resultat, dass sowohl die Verhältnisse der Brechung als auch der Dispersion sich durch Anwendung des Princips der lebendigen Kraft erklären lassen, und dass es ferner unnöthig ist, die Dispersion speciell in Betracht zu ziehen, da dieselbe nur eine Folge der Abhängigkeit des Refractionsäquivalents von der Wellenlänge ist [1]).

Eine weitere Folge ist ferner die aus diesen Principien ableitbare, sehr einfache Dispersionsformel, welche nur eine Constante enthält. Es ergibt sich aus 19 und 23, dass, will man die Constante C einführen, schliesslich ist

$$\mu^2 = 1 + \frac{C'}{\lambda^2}. \tag{27}$$

Im Gegensatze zur Cauchy'schen Formel $\mu = A + \frac{B}{\lambda^2}$ ist hier in (27) die Constante A auf die Einheit reducirt, eine bei näherer Betrachtung nothwendige Bedingung, da jede Refraction mit zunehmendem λ ($\lim \lambda = \infty$) sich der Einheit nähern muss. Die Cauchy'sche Formel gibt zwar eine scheinbar von λ unabhängige Constante A, allein aus der Verificationsformel μ—μ (analog 26), kann immer eine Wellenlänge gefunden werden, für welche μ den Werth A erhält. Andererseits ist auch die Grösse der Wellenlängen unbestimmt und unabhängig von dem Bau unseres Auges, welches nur im Stande ist, bestimmte Schwingungszustände als Licht zu erfassen.

Da in (27) kein von λ unabhängiges, variables Glied vorkommt, so ist es nöthig, auch die Wellenlänge bei Berechnung des Refractionsäquivalents zu berücksichtigen. Nach dem bereits früher erwähnten genügt es jedoch, wenn für die untersuchten Stoffe die Refractionsäquivalente für gleiche Farben berechnet werden.

Es eignet sich hierzu jene Wellenlänge, welche die kleinsten beobachteten Werthe gibt, nämlich λ_ρ und mit derselben wurden auch alle nachfolgenden Untersuchungen durchgeführt. Dass die zu Grunde

---

[1]) Dies macht erklärlich, warum ich alle früheren Sätze bezüglich des Dispersionsvermögen zurückziehe.

gelegten Prämissen richtig sind, zeigt wohl zur Genüge die Übereinstimmung, der in den Paragraphen 2, 3, 4, 5 erhaltenen Resultate.

§. 6. Kritische Bemerkungen. Seit meinen Untersuchungen haben sich mehrere Autoren theils mit meinen Arbeiten, theils mit analogen beschäftigt; es sind dies Dale und Gladstone, Landoldt, Lorenz und Ketteler, von denen erstere sich für das Biot'sche, die beiden letzteren für das Newton'sche Refractionsvermögen ausgesprochen haben.

Dale und Gladstone haben sich in ihren Untersuchungen zur Formel $\frac{\mu-1}{d}$ bekannt, ohne dieselbe bis zur Theorie des Refractionsäquivalents zu erheben; letzteres geschah durch Landolt, welcher, die Form des Biot'schen Refractionsvermögens adoptirend, den Gang meiner Untersuchungen (Pogg. Ann. 119) schrittweise, aber nicht in derselben Ausdehnung verfolgt. Nachdem er zuerst die Constanz von $\frac{\mu-1}{d}$ beweist — eine nothwendige Folge von Formel (2) — wendet er dieselbe auf die Reihen C, H, O-haltiger Verbindungen an, wobei er jedoch — ich muss für dies Geständniss sehr dankbar sein, obgleich er meinen Namen nicht nennt — oftmals bemerkt, dass man dieselben Resultate auch durch μ^2-1 erreichen kann. (Ich füge hinzu: bereits erreicht hatte.)

An mehreren Stellen finde ich jedoch Andeutungen, denen ich nicht beipflichten kann. Landolt's Untersuchungen erstrecken sich auf Verbindungen aus den Reihen $CH_2 \ldots . C_{n+2} H_{2n}$ ohne, wie ich früher gethan, die höheren Kohlenwasserstoffverbindungen zu berücksichtigen. Für letztere nimmt er denselben Vorgang an und erklärt die möglichen Abweichungen durch Fehler der Dispersionsformel; er läugnet somit Refractionscondensationen.

Es war mir nun interessant, obgleich sich bereits aus §. 2 die Nothwendigkeit der Condensationen auch für m ergaben, die höheren Kohlenwasserstoffe zu untersuchen, indem hier möglicher Weise ein Fall zu Gunsten von m vorhanden sein könne.

Ich berechnete für mehrere Verbindungen, welche nach Cauchy's Formel nahe gleiche Dispersion- und Refractionsconstanten A und B hatten (wo also ein Einwand wegen der fehlerhaften Formel lächerlich wäre, da er ja beide Resultate gleichmässig afficirt) die secundären Refractionsäquivalente m.

Die denselben zu Grunde liegenden Werthe von H und C ergeben sich aus

H $d = 0 \cdot 0675$ $\mu = 1 \cdot 000138$ Dul. $m = 0 \cdot 002014$
C $D = 3 \cdot 55$ $\mu = 2 \cdot 434$ Schr. $m = 0 \cdot 006267$.

Es ist ferner nach den Beobachtungen von Dale, Gladstone [1]) und Landolt

$C_{10}H_{16}$ Terpentinöl $D = 0 \cdot 8644$ $\mu_\rho = 1 \cdot 4596$. $\mu_v 1 \cdot 4845$ D. und Gl. $A = 1 \cdot 45058$ $B = 0 \cdot 5242$ $m_b = 0 \cdot 091653$
$m_r = m(10C + 16H) = 0 \cdot 06267 + 0 \cdot 03223 = 0 \cdot 09590$.
$\Delta(m_b - m_r) = -425$.

C_6H_6 Benzol $D = 0 \cdot 8667$ $\mu_\rho = 1 \cdot 4806$ $\mu_v = 1 \cdot 5225$ Land.
$A = 1 \cdot 46525$ $B = 0 \cdot 8833$ $m_b = 0 \cdot 054133$
$m_r = m(6C + 6H) = 0 \cdot 037602 + 0 \cdot 012087 = 0 \cdot 049689$
$\Delta(m_b - m_r) = +444$.

Es sind somit Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung vorhanden, welche, da sie — wie ich mich überzeugte — in den höheren Reihen immer vorkommen, wohl für die Nothwendigkeit eines unbestimmten Multiplicator sprechen. Noch auffallender wird dies, wenn man hier nicht die Cauchy'sche Formel zu Hilfe nimmt, sondern die Ableitungen von §. 2. Rechnet man die in beiden Fällen bestimmte Wellenlänge beispielsweise λ_ρ, so erhöht sich beiderseits auch der Werth von m; dadurch wird aber $\Delta(m_b - m_r)$ (da sie oben

---

[1]) Aus den Angaben von Dale und Gladstone für *B*, *D*, *H*, lassen sich die Werthe von *A* und *B* (Cauchy) annähernd ermitteln durch

$$A = \frac{11B - 3H}{8} = \frac{7D - 3H}{4}$$

$$B = \frac{H - B}{5} = \frac{2(H - D)}{7},$$

wobei dann seine Angaben mit den jüngst von Landolt gemachten übereinstimmen, z. B.: Phenylhydrat $C_6H_6O_2 = 94$.

a) Dale und Gladstone. $D = 1 \cdot 0618$ $\mu_\rho = 1 \cdot 5301$ $\mu_v = 1 \cdot 5802$ $A = 1 \cdot 51171$ $B = 1 \cdot 0570$ $m = 0\,058568$.

b) Landolt. $D = 1 \cdot 0722$. $\mu_\rho = 1 \cdot 54447$ $\mu_v = 1 \cdot 57535$ $A = 1 \cdot 52035$ $B = 1 \cdot 03925$ $m = 0 \cdot 058979$.

Ein Beweis zugleich, dass die obige Differenz nicht im Fehler der Angaben beruhen kann, indem hier bei letzteren der Fehler nur den zehnten Theil dessen beträgt, was der obige Fehler $\Delta(m_b - m_r)$ ausmacht.

negativ ist) bei Terpentinöl nahe Null, während sie bei Benzol auf den doppelten Werth steigt

Es sprechen also diese Kohlenwasserstoffverbindungen nicht gegen die Nothwendigkeit einer Annahme von Condensationen für m; und liefern daher keinen Grund zur weiteren Befürwortung der Formel des secundären Biot'schen Brechungsvermögens.

Im Gegensatze zum Vorigen gaben Lorenz und Ketteler Verificationen der Formel $\frac{\mu^2-1}{d}$.

Lorenz fand aus mathematischen Gründen, dass der Brechungsexponent von der Dichte auf folgende Weise abhängt

$$\mu^2 = 1 + Dx - D\frac{y}{1+Dx} \qquad (28)$$

da x und y als constante zu betrachten sind,

$$\frac{\mu^2-1}{D} = x - \frac{y}{r^2}$$

folgt. Ich versuchte bei mehreren in drei Modificationen bekannten Körpern eine Verification dieser Formel, welche jedoch zu keinem Resultate führte. Die jüngste Untersuchung auf diesem Gebiete, welche wohl nur die Unabhängigkeit von der Dichte berücksichtigt, ist von Ketteler (Berlin. Monatsberichte, November 1864). Derselbe ist, eine neue Dispersionsformel annehmend, bestrebt Dispersion und Refraction mit einer Formel zu umfassen in der Weise

$$\mu^2-1 = a\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^2}{l^2}}\right) \qquad (29)$$

wobei l die innere Wellenlänge, β die Constante der Dispersion und $A = \frac{\alpha}{d}$ ist — die Formel lautet also, der gezwungenen Schreibweise entledigt,

$$\frac{\mu^2-1}{d} = A\left(\frac{1}{1-\frac{\beta^2}{l^2}}\right).$$

Nachschrift. Während dies Manuscript bereits druckfertig war, kam mir das dritte Heft Poggendorff's Annalen zu, in welchem Ketteler, in einer Nachschrift zu seinem oben citirten Aufsatze, seine Formel (29) — es waren inzwischen Landolt's Unter-

suchungen erschienen — zurücknimmt, und nach Landolt's Vorgange die neue Formel angibt.

$$\mu - 1 = \alpha\left(\frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\lambda^2}}\right),$$

welche sich, da wieder $A = \frac{\alpha}{d}$ ist, reducirt auf

$$\frac{\mu - 1}{d} = A\left(\frac{1}{1 - \frac{\beta^2}{\lambda^2}}\right).$$

Ich vermuthe, dass dies nicht geschehen wäre, wären Ketteler alle hierfür geltenden Gründe bekannt gewesen. Denn wenn m auch für schweflige Säure, und wie ich noch hinzufügen kann, für Schwefelkohlenstoff besser stimmende Werthe gibt als $\mathfrak{M}$, so genügt dies allein noch nicht.

II. Bestimmung der Refractionsäquivalente.

§. 7. Methoden. Durch die bisherigen Untersuchungen ward die Abhängigkeit der Fortpflanzung des Lichtes von der Substanz dargestellt; um nun sowohl die theoretischen Ansichten zu verificiren, als auch um eine Basis zu erhalten, mittelst welcher alle optischen Messungen verwerthet werden können, erübrigt nur die Refractionsäquivalente der Grundstoffe aufzusuchen.

Da von den wenigsten Grundstoffen Beobachtungen für diesen isolirten Zustand vorhanden sind, so müssen dieselben aus ihren Verbindungen berechnet werden. Die hierbei anzuwendende Formel ist die bekannte (6).

$$\mathfrak{M}(a+b+c..) = n\mathfrak{M}(a) + n'\mathfrak{M}(b)\ldots,$$

wobei für jeden Grundstoff mehrere und verschiedene Combinationen von $b, c\ldots$ vorgenommen werden müssen, um zu erkennen, ob und mit welcher Condensation n der optischen Atomzahlen die Elemente in die Verbindungen eingetreten sind. Es wurden daher vor allen die binären Verbindungen aufgesucht und von diesen zu den ternären und quaternären aufgestiegen, so wie es auch möglich war, zu dieser

Berechnung nicht blos isophane Körper, sondern auch Lösungen, Krystalle und selbst undurchsichtige Medien zu benützen.

Lösungen konnten verwendet werden, da Beobachtungen von Beer und Kremers (Pogg. Ann.) vorliegen, welche für zahlreiche Reihen, Dichte, Brechungsexponenten und den Gehalt des gelösten Stoffes in Wasser angeben. Da somit alle Daten bekannt sind, so kann aus M der Lösung nach Abzug des Procenttheiles von $M(H_2\Theta)$, M und $\mathfrak{M}$ der gelösten Substanz ermittelt werden.

Zur Controle wurden Messungen an mehreren solcher Stoffe in ungelöstem Zustande vorgenommen.

Dass Krystalle dem allgemeinen Gesetze des Refractionsvermögens unterliegen, habe ich wohl bereits, Pogg. Ann. 116, bewiesen, doch ich muss auf die für dieselben nothwendige Berechnungsmethode zurückkommen.

Die doppelbrechenden Krystalle besitzen nach den drei Elasticitätsaxen dreifach verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes; folglich auch drei verschiedene Dichten, da der Dichtigkeitszustand nur in jener Richtung wirksam werden kann, in welcher ein wahres Heraustreten aus der Gleichgewichtslage durch die Schwingung hervorgerufen ist.

Da jedoch die Wägungen uns nur den Werth einer mittleren Dichte geben, so handelt es sich darum, auch aus den α, β, γ einen Werth zu suchen, der ein wahres Mittel aller im Krystalle möglichen Brechungsexponenten der Substanz unabhängig von der Krystallform zukommt, also mit der beobachteten Dichte übereinstimmt.

Setzt man nun den mittleren Werth gleich dem arithmetischen Mittel, so erhalten wir mit Rücksichtnahme auf die obigen Verhältnisse des Elasticitätsellipsoids und die für jeden mittleren Werth einer Functionalgleichung geltende Methode; den Ausdruck

$$\mu^2 = \tfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \qquad (30)$$

Dieser Werth stellt die von der Krystallgestalt unabhängige Fortpflanzung des Lichtes dar, gleichsam als wäre der Krystall selbst tesseral oder ein isophaner Körper.

Schliesslich wurden auch undurchsichtige Körper, in metallischen Zustande gewählt und deren Brechungsexponent nach der Brewster'schen Tangenten-Formel für Reflexion berechnet. Es ist mir nur allzu bekannt, dass die Formel nach den Untersuchungen

Cauchy's und seiner Nachfolger bei der Metallreflexion unvollständig und unrichtig wird, allein mehrere Gründe bewogen mich, dieselbe zu verwenden.

Vor Allem waren es die günstigen Resultate; da die durch dieselbe erzielten Refractionsäquivalente nicht nur unter sich und für metallische Verbindungen passten, sondern auch mit den übrigen Werthen in Causalnexus treten. Zweitens ist wohl nicht allzuwahrscheinlich, dass metallisches Silber in seinen hohen Dichtigkeitszuständen einen Brechungsexponenten von $\mu = 0 \cdot 23 — 0 \cdot 19$, also fünfmal grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die Luft besitze, während doch in den Verbindungen dem Silber ein hohes Brechungsvermögen eigen ist, schliesslich die Thatsache, dass der von Cauchy selbst auf Grund seiner Theorie angegebene Brechungsexponent für Quecksilber (Pogg. Ann. 74, 543) $\mu = 1 \cdot 7$ ein Refractionsvermögen gibt, welches mit dem des Quecksilberdampfes (siehe unten) nahe übereinstimmt.

Man wäre hierdurch fast zur Annahme berechtigt, die Cauchy'sche Refractionsformel gebe nach dessen eigener Anwendung die Fortpflanzung des Lichtes in der äussersten Schichte (verg. Lorenz, Pogg. Ann.) an, welche bereits die atomistische Gliederung des dampfförmigen Zustandes angenommen hat.

Den Rechnungen wurden Beobachtungen zu Grunde gelegt von C. Cauchy; D. Dulong; Desc. Descloizeaux, Gl., Dale und Gladstone; Kr. Kremers und Beer, L. Landolt, M. Miller, R. De Roux, Schr. Schrauf. Aus diesen Angaben, welche durch zahlreiche eigene Messungen verificirt sind, wurden die Refractionsäquivalente mit Benützung der Atomgewichte $O = 16$ und der Brechungsexponenten für rothes Licht μ_ρ oder A berechnet und durch den successiven Fortschritt von Element zu Element immer neue Daten gewonnen. Um die für Verbindungen ziemlich weitläufigen Rechnungen abzukürzen, ward im Nachfolgenden die Schreibweise adoptirt, den zu suchenden Stoff (x) als Differenz der totalen Verbindung und einiger der Bestandtheile anzugeben.

$$(31) \qquad \mathfrak{M}(\text{Tot}) — \mathfrak{M}(\text{Pars}) = \mathfrak{M}(x).$$

Der Werth der Refractionscondensation ward wie in früheren Abhandlungen zum Unterschiede nicht als Coëfficient, sondern als Exponent geschrieben in der Weise, dass n bedeutet die Condensation.

Für $n\mathfrak{M}(x)$ ward geschrieben $\mathfrak{M}^n(x)$ oder bei Vernachlässigung und Kürzung durch $\mathfrak{M}$ selbst $(x)^n$ um dies zu unterscheiden von dem Falle $\mathfrak{M}(x_m)$, welcher als $m\mathfrak{M}(x)$ oder (mx) zu bezeichnen ist.

Um jedoch die verschiedenen Zustände der Materie als gasförmig, fest, flüssig oder metallisch anzugeben, wurden die Buchstaben *g*, *f*, *m* als Indices an $\mathfrak{M}$ angehängt.

Um schliesslich meinem Nachfolger die Mühe zu ersparen, mit nur etwas geänderter Formel das Material nochmals durchgehen zu müssen, habe ich auch zugleich das secundäre Refractionsäquivalent m berechnet, wobei ich jedoch für dasselbe, um die Berechnung durchführen zu können, zur Annahme von unbestimmten Factoren gezwungen wurde.

§. 8. Die Grundstoffe in ihrem isolirten Zustande.

a) Die Grundstoffe in gas- und dampfförmiger Modification.

1. Wasserstoffgas H=1 d=0·0685 μ=1·000138 D. M=0·004050 $\mathfrak{M}$=0·004050 m=0·002024.
2. Sauerstoffgas O=16 d=1·1026 μ=1·000272 D. M=0·000489 $\mathfrak{M}$=0·007824 m=0·003946.
3. Stickstoffgas N=14 d=0·976 μ=1·000300 D. M=0·000602 $\mathfrak{M}$=0·008428 m=0·004214.
4. Chlorgas Cl=35·5 d=2·47 μ=1·000772 D. M=0·000627 $\mathfrak{M}$=0·022258 m=0·011095.
5. Schwefeldampf S=32 d=6·17 μ=1·001629 R. M=0·000494 $\mathfrak{M}$=0·015784 m=0·007876.
6. Phosphordampf P=31 d=4·355 μ=1·001364 R. M=0·000626 $\mathfrak{M}$=0·019406 m=0·009709.
7. Arsendampf As=75 d=10·38 μ=1·001114 R. M=0·000218 $\mathfrak{M}$=0·016350 m=0·008041.
8. Quecksilberdampf Hg=200 d=6·976 μ=1·000556 R. M=0·000159 $\mathfrak{M}$=0·031800 m=0·001590.

b) Die Grundstoffe in ihren festflüssigen oder metallischen Zuständen.

I. Durch directe Messung der Brechungsexponenten.

9. Schwefel S=32 D=2·065 α=2·2214 β=2·0209 γ=1·9365. μ=2·053 Schr. M=0·002044 $\mathfrak{M}$=0·065144 m=0·021096.

10. Phosphor P = 31 $D = 1{\cdot}823$ $\mu = 2{\cdot}106$ Gl. $M = 0{\cdot}002437$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}075547$ $m = 0{\cdot}024315$.

11. Kohlenstoff Diamant C = 12 $D = 3{\cdot}55$ $\mu = 2{\cdot}434$ Schr. $M = 0{\cdot}001810$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}021720$ $m = 0{\cdot}006267$.

II. Durch Ermittlung der Brechungsexponenten mittelst der Cauchy'schen Metallreflectionsformel.

12. Quecksilber Hg = 200 $D = 13{\cdot}5$ $\mu = 1{\cdot}7$ Cauchy $M = 0{\cdot}000181$ $\mathfrak{M}_c = 0{\cdot}036200$ $m_c = 0{\cdot}013406$.

III. Durch Ermittlung der Brechungsexponenten vermittelst der Brewster'schen Tangentenformel für den Reflexionswinkel R.

13. Antimon Sb = 120 $D = 6{\cdot}65$. $R = 75°5'$ $\mu = 3{\cdot}7539$ Schr. $M = 0{\cdot}002545$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}30540$ $m = 0{\cdot}064248$.

14. Silber Ag = 108 $D = 10{\cdot}65$ $R = 73°30'$ $\mu = 3{\cdot}376$ Schr. $M = 0{\cdot}001262$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}13631$ $m = 0{\cdot}03115$.

15. Wismuth Bi = 210 $D = 9{\cdot}74$ $R = 74°20'$ $\mu = 3{\cdot}565$ Schr. $M = 0{\cdot}001554$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}32647$ $m = 0{\cdot}071490$.

16. Kupfer C = 63·4 $D = 8{\cdot}64$ $R = 71°50'$ $\mu = 2{\cdot}932$ Schr. $M = 0{\cdot}001136$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}072052$ $m = 0{\cdot}018329$.

17. Stahl (Fe = 56)? $D = 7{\cdot}45$ $R = 75°30'$ $\mu = 3{\cdot}866$ Schr. $M = 0{\cdot}002421$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}13558$ $m = 0{\cdot}027851$.

18. Quecksilber Hg = 200 $D = 13{\cdot}5$ $R = 77°54'$ $\mu = 4{\cdot}664$ Schr. $M = 0{\cdot}001987$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}39740$ $m = 0{\cdot}07016$.

19. Selen Se = 79 $D = 4{\cdot}8$ $R = 68{\cdot}5$ $\mu = 2{\cdot}608$ Jamin. $M = 0{\cdot}001525$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}12046$ $m = 0{\cdot}034216$.

20. Zink Zn = 65·2 $D = 9{\cdot}08$ $R = 72°55'$ $\mu = 3{\cdot}254$ Schr. $M = 0{\cdot}001304$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}08701$ $m = 0{\cdot}02044$.

21. Silicium Si = 28 $D = 3{\cdot}5$ Kryst. Wöhler. $\mu = 3.736$ Miller. $M = 0{\cdot}004786$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}13097$ $m = 0{\cdot}028298$.

Obgleich es von grosser Wichtigkeit gewesen wäre, auch für mehrere hier nicht angeführte Metalle das Refractionsäquivalent zu ermitteln, so hinderte doch das an der Oberfläche diffundirte Licht jede genauere Bestimmung; und eine Polirung derselben machte bei,

der ohnehin so hohen Dichte derselben, namentlich bei Gold und Platin, zu bedeutende Variation, um noch genaue Resultate bei solchem Verfahren erhoffen zu können.

§. 9. Die Grundstoffe aus den Verbindungen abgeleitet.

A. Durch directe Bestimmung der Brechungsexponente.

a) aus Äthylverbindungen, in welchen sie durch Substitution für Θ enthalten sind.

Controle: Zur Ermittlung der Basis $\mathfrak{M}_f(C_4H_{10})$ diene:

Butylalkohol $C_4H_{10}\Theta = 74$ $D = 0{\cdot}8074$ $A = 1{\cdot}38579$ L.
$M = 0{\cdot}001474$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}109063$ $m = 0{\cdot}045716$.

Äthyläther $C_4H_{10}\Theta = 74$ $D = 0{\cdot}7166$. $A = 1{\cdot}34368$ Gl.
$M = 0{\cdot}001453$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}10757$ $m = 0{\cdot}045884$
$\mathfrak{M}(C_5H_{10}) = \mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = 0{\cdot}100521$ $m(C_4H_{10}) = 0{\cdot}041888$.

22. Quecksilberäthyl $C_4H_{10}Hg = 258$ $D = 2{\cdot}444$ $A = 1{\cdot}51435$ Gl.
$M = 0{\cdot}00068412$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}176502$ $m = 0{\cdot}07198$
$\mathfrak{M}(\text{Tot.}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(\text{Hg}) = 0{\cdot}07598$. $m(\text{Hg}) = 0{\cdot}028310$.

23. Jodäthyl $C_4H_{10}J_2 = 312$ $D = 1{\cdot}9228$ $A = 1{\cdot}48489$ Gl.
$M = 0{\cdot}0008121$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}254368$ $m = 0{\cdot}101622$
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(\text{J}) = 0{\cdot}076927$. $m(\text{J}) = 0{\cdot}029867$.

24. Zinnäthyl $(C_4H_{10})_2Sn = 234$. $D = 1{\cdot}192$ $A = 1{\cdot}44965$ Gl.
$M = 0{\cdot}0011947$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}279558$ $m = 114120$.
$\mathfrak{M}(\text{To}) - \mathfrak{M}(\text{Pa}) = \mathfrak{M}(\text{Sn}) = 0{\cdot}078516$ $m(\text{Sn}) = 0{\cdot}030344$.

25. Triäthylarsen $(C_4H_{10})_3As_2 = 324$ $D = 1{\cdot}151$ $\mu = 1{\cdot}44795$ Gl.
$M = 0{\cdot}0012317$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}399074$ $m = 0{\cdot}163022$
$\mathfrak{M}(\text{To}) - \mathfrak{M}(\text{Pa}) = \mathfrak{M}(\text{As}) = 0{\cdot}048755$ $m(\text{As}) = 0{\cdot}01868$.

26. Kieseläthyl $(C_4H_{10})_2SiO_6 = 298$. $D = 0{\cdot}932$ $A = 1{\cdot}37266$ Gl.
$M = 0{\cdot}0012265$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}365497$ $m = 0.15423$
$\mathfrak{M}(\text{To}) - \mathfrak{M}(\text{Pa}) = \mathfrak{M}^{\frac{1}{4}}(\text{Si}) = 0{\cdot}01701$ $m^{\frac{1}{4}}(\text{Si}) = 0{\cdot}00484$.

27. Boräthyl $(C_4H_{10})_3B_2O_6 = 292$ $D = 0{\cdot}876$ $A = 1{\cdot}36081$ Gl.
$M = 0{\cdot}001257$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}367044$ $m = 0{\cdot}145492$
$\mathfrak{M}(\text{To}) - \mathfrak{M}(\text{Pa}) = \mathfrak{M}^{\frac{1}{4}}(\text{B}) = 0{\cdot}01855$ $m(\text{B}) = 0{\cdot}00611$.

b) Aus Phosphorverbindungen.

Zur Controle für die vorkommende Condensation kann dienen:

Phosphorchlorid $PCl_3 = 138{\cdot}5$ $D = 1{\cdot}453$ $A = 1{\cdot}44887$ Gl. $M = 0{\cdot}0010827$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}149945$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}060246$ $\mathfrak{M}_f(P) + 3\mathfrak{M}_g(Cl) = 0{\cdot}142321$ $\mathfrak{m}(P+Cl_3) = 0{\cdot}057600$, daher ohne Condensation verbunden.

28. Phosphorbromid $PBr_3 = 272$. $D = 2{\cdot}88$ $A = 1{\cdot}63901$ Gl. $M = 0{\cdot}00075702$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}205910$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}078025$ $\mathfrak{M}(To) - \mathfrak{M}(Pa) = \mathfrak{M}(Br) = 0{\cdot}043461$ $\mathfrak{m}(Br) = 0{\cdot}017903$.

c) Aus den Chlor- oder Bromverbindungen.

I. Bestimmung tessular krystallisirter Körper.

Controle zur Bestimmung der Condensation:

Salmiak $NH_4Cl = 53{\cdot}5$ $D = 1{\cdot}528$ $\mu = 1{\cdot}6308$ Schr. $M = 0{\cdot}0014105$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}075467$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}028686$ $\mathfrak{M}(To) - \mathfrak{M}(Pa) = \mathfrak{M}(NH_4) = 0{\cdot}053209$ $\mathfrak{m} = (NH_4) = 0{\cdot}017591$.

Da aber $\mathfrak{M}_g(N+H_4) = 0{\cdot}024628$. $m_g(N+H_4) = 0{\cdot}012314$ erkennt man, dass für die Elemente verbunden mit Chlor die Condensation 2 für $\mathfrak{M}$ und $\frac{1}{2}$ für $\mathfrak{m}$ gelten; daher diese Zahlen im Nachfolgenden um den Werth des Grundstoffes in seinem freien Zustande zu erhalten, mit 2 oder $\frac{1}{2}$ dividirt werden muss.

29. Kaliumchlorid $KCl = 74{\cdot}7$ $D = 1{\cdot}945$ $\mu = 1{\cdot}4754$ Schr. $M = 0{\cdot}0007822$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}058433$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}023605$ $\mathfrak{M}(To) - \mathfrak{M}(Pa) = \mathfrak{M}^2(K)$ oder $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}(K)$; daher $\mathfrak{M}(K) = 0{\cdot}018187$ $m(K) = 0{\cdot}00833$.

30. Natriumchlorid (Steinsalz) $NaCl = 58{\cdot}5$ $D = 2{\cdot}192$ $\mu = 1{\cdot}5388$ Schr. $M = 0{\cdot}0008062$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}047167$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}018581$ $\mathfrak{M}(To) - \mathfrak{M}(Pa) = \mathfrak{M}^2(Na)\,\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}(Na)$, daher $\mathfrak{M}(Na) = 0{\cdot}012454$ $m(Na) = 0{\cdot}005434$.

II. Ermittlung der Brechungsvermögen chlor- oder bromhaltiger Verbindungen aus den Lösungen in 100 Gewichtstheilen Wasser.

Zur Controle der Übereinstimmung mit *c)* I. diene die Berechnung von Kaliumchlorid und Kaliumbromid:

Kaliumchlorid $KCl = 74{\cdot}7$. Lösung: Gewicht der gelösten Substanz zur Totalsumme der Lösung $= \frac{31}{131}$ $D = 1{\cdot}16$ $\mu = 1{\cdot}3646$ Kr.

Bringt man von 131 $M=0{\cdot}12587$ oder von 131 $m=0{\cdot}053232$ die 100 Gewichtstheile Wasser $M(H_2O)=0{\cdot}001008$, $m(H_2O)=0{\cdot}000432$ in Abzug und berechnet aus dem Reste das Refractionsäquivalent der gelösten 31 Gewichtstheile des gelösten Stoffes, so folgt $\mathfrak{M}(KaCl)=0{\cdot}060425$ $m(KaCl)=0{\cdot}024176$ und $\mathfrak{M}(To) - \mathfrak{M}(Pa)=\mathfrak{M}(Ka)=0{\cdot}019083$; $m(Ka)=0{\cdot}008720$, welche Zahlen mit denen von 29 stimmen sowohl ihrer Grösse nach als auch in ihrer Condensation, da hier wieder $\mathfrak{M}^s$ und $m^{\frac{1}{3}}$ auftritt.

Kaliumbromid $KaBr=119{\cdot}2$ Lös. $=\frac{60{\cdot}5}{100{\cdot}5}$ $D=1{\cdot}34$ $\mu=1{\cdot}3859$ Kr. $M=0{\cdot}008882$. Woraus analog wie oben $\mathfrak{M}(KaBr)=0{\cdot}08878$ $m(KaBr)=0{\cdot}032623$ $\mathfrak{M}(Ka)=0{\cdot}02266$ $m(Ka)=0{\cdot}00981$ folgen, Zahlen, welche also auch die gleiche Bildungsweise für die Bromide beweisen.

31. Chlornatrium $NaCl=58{\cdot}5$ Lösung $=\frac{35{\cdot}5}{135{\cdot}5}$ $D=1{\cdot}20$ Kr. $\mu=1{\cdot}3786$. $\mathfrak{M}(NaCl)=0{\cdot}050503$ $m(NaCl)=0{\cdot}019878$ $\mathfrak{M}(Na)=0{\cdot}014122$ $m(Na)=0{\cdot}005868$.

32. Bromnatrium $NaBr=103$ Lösung $=\frac{62{\cdot}5}{162{\cdot}5}$ $D=1{\cdot}48$ Kr. $\mu=1{\cdot}4144$ $\mathfrak{M}(NaBr)=0{\cdot}073262$ $m(NaBr)=0{\cdot}028535$ $\mathfrak{M}(Na)=0{\cdot}014900$ $m(Na)=0{\cdot}0070900$.

33. Chlorlithium $LiCl=42{\cdot}5$ Lösung $=\frac{32{\cdot}5}{102{\cdot}5}$ $D=1{\cdot}14$ Kr. $\mu=1{\cdot}3844$ $\mathfrak{M}(LiCl)=0{\cdot}048293$ $m(LiCl)=0{\cdot}019041$ $\mathfrak{M}(Li)=0{\cdot}013018$ $m(Li)=0{\cdot}005274$

34. Bromlithium $LiBr=87$. Lösung $=\frac{100{\cdot}1}{200{\cdot}1}$ $D=1{\cdot}536$ Kr. $\mu=1{\cdot}4407$ $\mathfrak{M}(LiBr)=0{\cdot}070581$ $m(LiBr)=0{\cdot}02740$ $\mathfrak{M}(Li)=0{\cdot}013560$ $m(Li)=0{\cdot}006331$.

35. Chlorcalcium $CaCl_2=111$ Lösung $=\frac{67{\cdot}5}{167{\cdot}5}$ $D=1{\cdot}40$ Kr. $\mu=1{\cdot}4388$ $\mathfrak{M}(CaCl_2)=0{\cdot}10645$ $m(CaCl_2)=0{\cdot}040585$ $\mathfrak{M}(Ca)=0{\cdot}03097$ $m(Ca)=0{\cdot}011551$.

36. Bromcalcium $CaBr_2=200$ Lösung $=\frac{63{\cdot}7}{163{\cdot}7}$ $D=1{\cdot}45$ Kr. $\mu=1{\cdot}4188$ $\mathfrak{M}(CaBr_2)=0{\cdot}14775$ $m(CaBr_2)=0{\cdot}056285$ $\mathfrak{M}(Ca)=0{\cdot}03041$ $m(Ca)=0{\cdot}01365$.

37. Chlorbaryum $BaCl_2=208$ Lösung $=\frac{33{\cdot}5}{133{\cdot}5}$ $D=1{\cdot}25$ Kr. $\mu=1{\cdot}3738$ $\mathfrak{M}(BaCl_2)=0{\cdot}13238$ $m(BaCl_2)=0{\cdot}051009$ $\mathfrak{M}(Ba)=0{\cdot}04393$ $(mBa)=0{\cdot}019186$.

38. Brombaryum $BaBr_2 = 297$. Lösung $= \frac{108}{203}$ $D = 1{\cdot}711$ Kr. $\mu = 1{\cdot}4322$ $\mathfrak{M}(BaBr_2) = 0{\cdot}17368$ $m(BaBr_2) = 0{\cdot}066301$ $\mathfrak{M}(Ba) = 0{\cdot}04338$ $m(Ba) = 0{\cdot}020330$.

39. Chlorstrontium $SrCl_2 = 158{\cdot}6$ Lösung $= \frac{84{\cdot}9}{134{\cdot}9}$ $D = 1{\cdot}201$ Kr. $\mu = 1{\cdot}3715$ $\mathfrak{M}(SrCl_2) = 0{\cdot}11255$ $m(SrCl_2) = 0{\cdot}054126$ $\mathfrak{M}(Sr) = 0{\cdot}03402$ $m(Sr) = 0{\cdot}021246$.

40. Bromstrontium $SrBr_2 = 247{\cdot}6$ Lösung $= \frac{94{\cdot}6}{100{\cdot}6}$ $D = 1{\cdot}66$ Kr. $\mu = 1{\cdot}4375$ $\mathfrak{M}(SrBr_2) = 0{\cdot}15911$ $m(SrBr_2) = 0{\cdot}060463$ $\mathfrak{M}(Sr) = 0{\cdot}03609$ $m(Sr) = 0{\cdot}01646$.

41. Chlorcadmium $CdCl_2 = 183$ Lösung $= \frac{83{\cdot}1}{83{\cdot}1}$ $D = 1{\cdot}71$ Kr. $\mu = 1{\cdot}4504$ $\mathfrak{M}(CdCl_2) = 0{\cdot}13832$ $m(CdCl_2) = 0{\cdot}054743$ $\mathfrak{M}(Cd) = 0{\cdot}04690$ $m(Cd) = 0{\cdot}02166$.

42. Bromcadmium $CdBr_2 = 272$ Lösung $= \frac{17{\cdot}6}{37{\cdot}6}$ $D = 1{\cdot}595$ Kr. $\mu = 1{\cdot}4199$ $\mathfrak{M}(CdBr_2) = 0{\cdot}19453$ $m(CdBr_2) = 0{\cdot}07790$ $\mathfrak{M}(Cd) = 0{\cdot}05380$ $m(Cd) = 0{\cdot}02806$.

43. Chlormagnesium $MgCl_2 = 95$. Lösung $= \frac{109{\cdot}7}{109{\cdot}7}$ $D = 1{\cdot}340$ Kr. $\mu = 1{\cdot}4311$ $\mathfrak{M}(MgCl_2) = 0{\cdot}096342$ $m(MgCl_2) = 0{\cdot}038121$ $\mathfrak{M}(Mg) = 0{\cdot}025913$ $m(Mg) = 0{\cdot}010576$.

44. Brommagnesium $MgBr_2 = 184$. Lösung $= \frac{181{\cdot}6}{281{\cdot}6}$. $D = 1{\cdot}503$. Kr. $\mu = 1{\cdot}4322$ $\mathfrak{M}(MgBr_2) = 0{\cdot}15379$ $m(MgBr_2) = 0{\cdot}061103$ $\mathfrak{M}(Mg) = 0{\cdot}03343$ $m(Mg) = 0{\cdot}01686$.

45. Chlorzink $ZnCl_2 = 136{\cdot}2$ Lösung $= \frac{108{\cdot}7}{208{\cdot}7}$ $D = 1{\cdot}552$. Kr. $\mu = 1{\cdot}4359$ $\mathfrak{M}(ZnCl_2) = 0{\cdot}11174$ $m(ZnCl_2) = 0{\cdot}04460$ $\mathfrak{M}(Zn) = 0{\cdot}03361$ $m(Zn) = 0{\cdot}01530$.

46. Bromzink $ZnBr_2 = 225{\cdot}2$ Lösung $= \frac{191{\cdot}1}{321{\cdot}1}$ $D = 2{\cdot}109$ Kr. $\mu = 1{\cdot}5002$ $\mathfrak{M}(ZnBr_2) = 0{\cdot}14792$ $m(ZnBr_2) = 0{\cdot}055676$ $\mathfrak{M}(Zn) = 0{\cdot}03050$ $m(Zn) = 0{\cdot}019926$.

d) Ableitung aus den Sauerstoffverbindungen.

I. Einfach und doppeltbrechend krystallisirte Körper.

47. Quarz $SiO_2 = 60$ $D = 2{\cdot}65$ $\omega = 1{\cdot}5409$ $\varepsilon = 1{\cdot}5499$ Schr. $\mu = 1{\cdot}5439$ $M = 0{\cdot}0008498$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}050888$ $m = 0{\cdot}015921$ $\mathfrak{M}(Si) = 0{\cdot}035240$ $m(Si) = 0{\cdot}008100$.

Diese Werthe des Refractionsäquivalents von Silicium bleibt in den niedern Silicaten constant, nimmt jedoch in den höheren, so wie in 25 die Condensation $\frac{1}{3}$ an.

48. Anatas $TiO_2 = 82$. $D = 3{\cdot}87$ $\omega = 2{\cdot}5111$ $\varepsilon = 2{\cdot}4759$ Schr. $\mu = 2{\cdot}4974$ $M = 0{\cdot}0017495$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}14346$ $m = 0{\cdot}041019$ $\mathfrak{M}(Ti) = 0{\cdot}12782$ $m(Ti) = 0{\cdot}033195$.

49. Corund $Al_2O_3 = 75{\cdot}4$ $D = 3{\cdot}98$. $\omega = 1{\cdot}7675$. $\varepsilon = 1{\cdot}7592$ Desc. $\mu = 1{\cdot}763$ Schr. $M = 0{\cdot}0006836$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}070285$ $m = 0{\cdot}021418$ $\mathfrak{M}(Al) = 0{\cdot}023404$ $m(Al) = 0{\cdot}004842$.

50. Spinell $MgOAl_2O_3 = 115{\cdot}4$ $D = 3{\cdot}502$ $\mu = 1{\cdot}759$ Schr. $M = 0{\cdot}0007720$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}11025$ $m = 0{\cdot}039914$ $\mathfrak{M}(Tot) - \mathfrak{M}(Part) = \mathfrak{M}(Mg) = 0{\cdot}03216$ $m(Mg) = 0{\cdot}01458$.

51. Chrysoberyll $BeO,Al_2O_3 = 128{\cdot}2$ $D = 3{\cdot}680$ $\alpha = 1{\cdot}7565$ $\beta = 1{\cdot}7484$. $\gamma = 1{\cdot}7470$ Desc. $\mu = 1{\cdot}7506$. $M = 0{\cdot}00072537$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}092999$ $m = 0{\cdot}033806$ $\mathfrak{M}(Tot) - \mathfrak{M}(Part) = \mathfrak{M}(Be) = 0{\cdot}01490$ $m(Be) = 0{\cdot}00848$.

52. Borazit $3MgO,\ 4BO_3 = 400$ $D = 2{\cdot}91$. $\mu = 1{\cdot}701$ M. $M = 0{\cdot}008414$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}33648$ $m = 0{\cdot}12457$ — $\mathfrak{M}(Mg+B+O) = 0{\cdot}36248$, woraus sich ergibt, dass hier $\mathfrak{M}(B) = 0{\cdot}03710$ ist, daher in 26 $\mathfrak{M}(B)$ in Condensation $\frac{1}{4}$ vorkommt; während in den gewöhnlichen Boraten der normale Werth beobachtet wird.

53. Andalusit $Al_2O_3SiO_3 = 162{\cdot}8$ $D = 3{\cdot}18$. $\alpha = 1{\cdot}643$ $\beta = 1{\cdot}637$ $\gamma = 1{\cdot}632$ $\mu = 1{\cdot}6373$ Desc. $M = 0{\cdot}00068334$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}11125$ $m = 0{\cdot}04218$. $\mathfrak{M}(AlSiO) = 0{\cdot}1211$ $m(AlSiO) = 0{\cdot}03728$, daher die niederen Silicatverbindungen ohne Condensation, was für die folgenden Bestimmungen wichtig ist.

54. Zirkon $ZrO_2SiO_2 = 181{\cdot}6$ $D = 4{\cdot}502$ $\omega = 1{\cdot}92$ $\varepsilon = 1{\cdot}97$ Senarmont. $\mu = 1{\cdot}9368$. $M = 0{\cdot}00079043$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}14354$ $m = 0{\cdot}048866$. $\mathfrak{M}(Tot) - \mathfrak{M}(Part) = \mathfrak{M}(Zr) = 0{\cdot}07702$ $m(Zr) = 0{\cdot}025121$.

55. Chrysolith $2MgOSiO_2 = 140$ $D = 3{\cdot}37$. $\alpha = 1{\cdot}697$ $\beta = 1{\cdot}678$ $\gamma = 1{\cdot}661$ $\mu = 1{\cdot}6787$ Desc. $M = 0{\cdot}00069749$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}097649$ $m = 0{\cdot}036452$ $\mathfrak{M}((Mg_2)^{\frac{1}{4}}SiO_4) = 0{\cdot}0987$ $m(Mg^{\frac{1}{4}}SiO) = 0{\cdot}03828$. Die Übereinstimmung der Berechnung mit der Beobachtung unter der Voraussetzung der Condensation $\frac{1}{4}$ für die vorherrschende Basis Mg sowohl bei $\mathfrak{M}$ als m führt zu der im Nachfolgenden als richtig bewährten Annahme, dass alle im Überschuss vorhandenen Basen eine Concentration erleiden.

56. Cordierit $Al_2\Theta_3SiO_2 + 2Mg\Theta SiO_2 + 4SiO_2 = 482{\cdot}8$. $D = 2{\cdot}65$ $\alpha = 1{\cdot}543$ $\beta = 1{\cdot}541$ $\gamma = 1{\cdot}537$ $\mu = 1{\cdot}5403$ Desc. $M = 0{\cdot}00066965$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}32331$ $m = 0{\cdot}12726$.
$\mathfrak{M}(\text{Andalusit}) + \mathfrak{M}(\text{Chrysolith}) + \mathfrak{M}(4(Si)^{\frac{1}{4}}8\Theta) = 0{\cdot}3409$
$m(A + Chr + (Si)^{\frac{1}{4}}\Theta) = 0{\cdot}1267$. Der bei der vorhergehenden Nummer gefundene Satz der Halbirung des Refractionsäquivalents für multiple Basen bewährt sich auch hier vollkommen für m und $\mathfrak{M}$.

57. Phenakit $2Be\Theta,Si\Theta = 110{\cdot}8$ $D = 2{\cdot}98$. $\omega = 1{\cdot}651$. $\varepsilon = 1{\cdot}672$ Senarmont. $\mu = 1{\cdot}6587$ $M = 0{\cdot}0007599$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}084205$ $m = 0{\cdot}031664$
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - M(\text{Part}) = \mathfrak{M}^{\frac{1}{4}}(Be_2) = 0{\cdot}0175$, analog $m^{\frac{1}{4}}(Be_2) = 0{\cdot}00777$; in Folge von Satz 55.

58. Euclas $Al_2\Theta_3SiO_2 + 2Be\Theta,SiO_2 + H_2\Theta = 291{\cdot}6$ $D = 3{\cdot}05$ $\alpha = 1{\cdot}6710$ $\beta = 1{\cdot}6553$ $\gamma = 1{\cdot}6520$ $\mu = 1{\cdot}65945$ Descl. $M = 0{\cdot}00074341$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}21678$ $m = 0{\cdot}081511$
$\mathfrak{M}(\text{Andalusit}) + \mathfrak{M}(\text{Phenakit}) + \mathfrak{M}(H_2\Theta) = 0{\cdot}21145$
$m(An + Phen + H_2O) = 0{\cdot}08184$. Diese Übereinstimmung spricht wieder, da sie Folge von $\mathfrak{M}^{\frac{1}{4}}(Be)$ ist, für den Satz in 55.

59. Beryll $Al_2\Theta_3SiO_2 + 2Be\Theta SiO_2 + 5SiO_2 = 539$. $\omega = 1{\cdot}5702$ $\varepsilon = 1{\cdot}5654$ $\mu = 1{\cdot}5687$ Schr. $M = 0{\cdot}00070194$
$\mathfrak{M} = 0{\cdot}37834$ $m = 0{\cdot}14732$ $\mathfrak{M}(\text{Andal.}) + \mathfrak{M}(\text{Phen.}) + \mathfrak{M}((Si_5)^{\frac{1}{4}} + \Theta_{10}) = 0{\cdot}3617$ $m(A + Ph + (Si)^{\frac{1}{4}}\Theta) = 0{\cdot}1354$.
Die Übereinstimmung ist erzielt durch Satz 55, in Folge dessen $(Be)^{\frac{1}{4}}$ und $(Si)^{\frac{1}{4}}$ angenommen sind.

60. Perowskit $Ca\Theta Ti\Theta_2 = 138$ $D = 4{\cdot}02$ $\mu = 2{\cdot}3$ Desc. $M = 0{\cdot}0013758$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}189855$ $m = 0{\cdot}057696$
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(Ti) = 0{\cdot}13151$. $m(Ti) = 0{\cdot}03696$.

61. Scheelit $Ca\Theta W\Theta_3 = 288$ $D = 6{\cdot}04$ $\omega = 1{\cdot}918$ $\varepsilon = 1{\cdot}934$ Desc. $\mu = 1{\cdot}9233$ $M = 0{\cdot}0005777$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}166402$ $m = 0{\cdot}056918$
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(W) = 0{\cdot}10766$ $m(W) = 0{\cdot}03227$.

62. Wulfenit $Pb\Theta Mo\Theta_3 = 368$ $D = 6{\cdot}51$ $\omega = 2{\cdot}402$ $\varepsilon = 2{\cdot}304$ $\mu = 2{\cdot}3697$ Desc. $M = 0{\cdot}0009167$. $\mathfrak{M} = 0{\cdot}337343$ $m = 0{\cdot}100105$
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(Mo) = 0{\cdot}19670$
$m(Mo) = 0{\cdot}05057$.

63. Anhydrit $\mathfrak{C}aS\mathfrak{O}_4 = 136$. $D = 2{\cdot}93$. $\alpha = 1{\cdot}614$ $\beta = 1{\cdot}576$ $\gamma = 1{\cdot}571$ $\mu = 1{\cdot}5861$. Mill. $M = 0{\cdot}00066875$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}090951$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}09466$.
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - [\mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(S) + \mathfrak{M}(\mathfrak{O}_4)] = \mathfrak{M}(\mathfrak{C}a) = 0{\cdot}02726$
$\mathfrak{m}(\text{Tot}) - [\mathfrak{M}_{\frac{1}{2}}(S) + \mathfrak{m}(\mathfrak{O}_4)] = \mathfrak{m}(\mathfrak{C}a) = 0{\cdot}00887$. Es stimmt sowohl $\mathfrak{C}a$ mit dem in 35 und 36 gefundenen Werthe als auch mit dem Satz, dass in Schwefelsäure S in der Condensation $\frac{1}{2}$ gegenüber dem festen Schwefel vorkommt.

64. Arragonit $\mathfrak{C}a\mathfrak{C}\mathfrak{O}_3 = 100$ $D = 2{\cdot}95$ $\alpha = 1{\cdot}6806$ $\beta = 1{\cdot}6763$ $\gamma = 1{\cdot}5274$ Rudberg $\mu = 1{\cdot}6296$ $M = 0{\cdot}00072566$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}072566$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}027593$. $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}a + \mathfrak{C} + \mathfrak{O}) = 0{\cdot}07244$ $\mathfrak{m}(\mathfrak{C}a + \mathfrak{C} + \mathfrak{O}) = 0{\cdot}02686$, wodurch $\mathfrak{M}(\mathfrak{C}a)$ von 63 bestätigt und erkannt wird, dass in die kohlensaure Verbindung $\mathfrak{C}$ mit dem Refractionsäquivalent von 11 ohne Condensation eintritt.

65. Baryt $\mathfrak{B}aS\mathfrak{O}_4 = 233$ $D = 4{\cdot}37$ $\alpha = 1{\cdot}64415$ $\beta = 1{\cdot}63370$ $\gamma = 1{\cdot}63258$ Heusser $\mu = 1{\cdot}63685$ $M = 0{\cdot}0004737$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}10997$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}04179$. Es folgt analog 63.
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(S^{\frac{1}{2}}\mathfrak{O}_4) = \mathfrak{M}(\mathfrak{B}a) = 0{\cdot}04628$ $\mathfrak{m}(\mathfrak{B}a) = 0{\cdot}01549$.

66. Cerussit $\mathfrak{P}b\mathfrak{C}\mathfrak{O}_3 = 268$ $D = 6{\cdot}51$ $\alpha = 2{\cdot}0613$ $\beta = 2{\cdot}0595$ $\gamma = 1{\cdot}7915$ Schr. $\mu = 1{\cdot}9748$ $M = 0{\cdot}00057592$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}154345$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}0051882$ $\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(\mathfrak{P}b) = 0{\cdot}10916$. $\mathfrak{m}(\mathfrak{P}b) = 0{\cdot}03389$.

67. Salpetersaures Natron $Na\mathfrak{N}\mathfrak{O}_3 = 85$ $D = 2{\cdot}26$ $\omega = 1{\cdot}5793$ $\varepsilon = 1{\cdot}3345$ Schr. $\mu = 1{\cdot}50104$ $M = 0{\cdot}00071685$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}060932$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}02436$. $\mathfrak{M}((Na)^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{O}_3) = 0{\cdot}06022$ $\mathfrak{m}((Na)^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{N}\mathfrak{O}_3) = 0{\cdot}024736$. In salpetersauren Verbindungen treten hier die Basen mit derselben Condensation ein, wie in die Chlorverbindungen $\mathfrak{M}^2$ und $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$.

68. Salpetersaures Kali $K\mathfrak{N}\mathfrak{O}_3 = 101{\cdot}2$ $D = 2{\cdot}058$. $\mu = 1{\cdot}44344$ $a = 1{\cdot}4993$ $\beta = 1{\cdot}4988$ $\gamma = 1{\cdot}3327$ Schr. $M = 0{\cdot}00068066$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}068884$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}028192$ $\mathfrak{M}((K)^2 + \mathfrak{N}\mathfrak{O}_3) = 0{\cdot}06991$ $\mathfrak{m}(K^{\frac{1}{2}} + \mathfrak{N}\mathfrak{O}_3) = 0{\cdot}02902$.

69. Salpetersaures Silber $Ag\mathfrak{N}\mathfrak{O}_3 = 170$ $D = 4{\cdot}35$ $\alpha = 1{\cdot}788$ $\beta = 1{\cdot}75$? $\gamma = 1{\cdot}729$ Brewster $\mu = 1{\cdot}7558$; $M = 0{\cdot}00061905$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}10524$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}038188$

$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}^{\frac{1}{3}}(\text{Ag}) = 0{\cdot}07336$ $\mathfrak{m}^{\frac{1}{3}}\text{Ag} = 0{\cdot}02224$, daher $\mathfrak{M}_f\text{Ag} = 0{\cdot}03668$ $\mathfrak{m}_f(\text{Ag}) = 0{\cdot}01483$.

70. Hemimorphit $\text{Zn}\Theta\text{Si}\Theta_2 + \text{Zn}\Theta\text{H}_2\Theta = 240{\cdot}4$ $D = 3{\cdot}41$ $\alpha = 1{\cdot}632$ $\beta = 1{\cdot}614$ $\gamma = 1{\cdot}610$ Desc. $\mu = 1{\cdot}5875$ $M = 0{\cdot}00057632$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}13853$. $\mathfrak{m} = 0{\cdot}042514$ $\mathfrak{M}(\text{Zn} + \text{Si} + \text{H} + \Theta) = 0{\cdot}1456$ $\mathfrak{m}(\text{Zn}^{\frac{1}{3}} + \text{Si} + \text{H} + \Theta) = 0{\cdot}00471$. Hier hat Zn, trotz dass dieselbe in der gewöhnlichen Schreibweise als multiple Base vorkommt, keine Condensation, was vielleicht in der Verbindung mit Krystallwasser seinen Grund hat; hingegen hat $\mathfrak{m}$ seine Condensation im Werthe $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{2}$. Es folgt $\mathfrak{M}(\text{Zn}) = 0{\cdot}028$.

71. Dioptas $\text{Cu}\Theta,\text{Si}\Theta_2 + \text{H}_2\text{O} = 157{\cdot}4$ $D = 3{\cdot}31$ $\omega = 1{\cdot}667$ $\varepsilon = 1{\cdot}723$ Descl. $\mu = 1{\cdot}6859$ $M = 0{\cdot}00071954$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}11326$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}042168$
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(\text{Cu}) = 0{\cdot}03876$ $\mathfrak{m}(\text{Cu}) = 0{\cdot}00441$. Die Condensation von $\mathfrak{m}(\text{Cu})$ ist problematisch, vielleicht $\mathfrak{m}$ $\frac{1}{3}$.

II. Lösungen von Sauerstoffverbindungen.

72. Salpetersaures Wismuthoxyd $\text{Bi}_2\Theta(\text{N}\Theta_3) + 9\text{H}_2\Theta = 477$. Lösung $= \frac{10{\cdot}5}{100}$ $D = 1{\cdot}556$ $\mu = 1{\cdot}4373$ Ditscheiner. $M = 0{\cdot}0088555$ $M(\text{Lösung}) - 71{\cdot}5\ (\text{H}_2\text{O}) = M(\text{Substanz}) = 0{\cdot}005795$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}55161$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}182650$.
$\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}(\text{Part}) = \mathfrak{M}(\text{Bi}) = 0{\cdot}10880$ $\mathfrak{m}(\text{Bi}) = 0{\cdot}01570$.

e) Fluorverbindungen.

73. Flussspath $\text{CaFl}_2 = 78$ $D = 3{\cdot}14$ $\mu = 1{\cdot}433$ Schr. $M = 0{\cdot}0004342$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}03403$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}013905$
$\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\text{Fl}) = 0{\cdot}00340$ $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}(\text{Fl}) = 0{\cdot}00254$, in Folge des nachfolgenden Stoffes möglicherweise als Condensation $\frac{1}{2}$ aufzufassen, doch problematisch.

74. Cryolith $\text{AlNa}_3\text{Fl}_6 = 210{\cdot}4$ $D = 2{\cdot}96$. $\mu = 1{\cdot}668 - 1{\cdot}685$ Miller $\mu = 1{\cdot}674$ $M = 0{\cdot}007872$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}16563$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}061939$ $\mathfrak{M}(\text{Tot}) - \mathfrak{M}[(\text{Al})^{\frac{1}{3}} + \text{Na}] = \mathfrak{M}(\text{Fl}) = 0{\cdot}0058$. $\mathfrak{m}(\text{Tot}) - \mathfrak{m}[(\text{Al})^{\frac{1}{3}} + \text{Na}] < \mathfrak{m}(\text{Fl}) = 0{\cdot}0059$. In Folge dessen könnte; da sowohl $\mathfrak{M}$ als $\mathfrak{m}$ mit den obigen Condensationen stimmt, $\mathfrak{M}^{\frac{1}{3}}\,\mathfrak{m}^{\frac{1}{3}}$ und $\mathfrak{m}\mathfrak{M}$ angenommen werden.

f) Schwefelverbindungen.

75. Zinnober. $HgS = 232$ $D = 8{\cdot}1$ $\omega = 2{\cdot}854$ $\varepsilon = 3{\cdot}201$ Descl. $\mu = 2{\cdot}972$ $M = 0{\cdot}0012502$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}29006$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}073024$ $\mathfrak{M}(Hg)^2 + (S)^2 = 0{\cdot}28104$ $\mathfrak{m}(Hg)^{\frac{1}{2}} + (S)^{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}074$, $\mathfrak{M}$ ist in analogen Stoffen in Condensation 2, $\mathfrak{m}$ in Condensation $\frac{1}{2}$.

76. Greenockit $CdS = 144$ $D = 4{\cdot}85$. $\mu = 2{\cdot}688$ Mill. $M = 0{\cdot}0016594$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}23897$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}064795$ $\mathfrak{M}(CdS)^2 = 0{\cdot}2228$. $\mathfrak{m}(CdS)^{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}06411$, was mit 75 in Übereinstimmung ist, und auf ein Äquivalent des Cadmium, wie oben 41, führt.

B. Berechnung der Brechungsexponenten durch Brewster'sche Tangentenformel.

77. Eisenkies $FeS_2 = 120$ $D = 4{\cdot}95$ $R = 77°5'$ Schr. $\mu = 4{\cdot}361$ $M = 0{\cdot}004705$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}51245$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}10157$ $\mathfrak{M}(Fe)^2 + (S)^2 = 0{\cdot}52932$ $\mathfrak{m}(Fe)^{\frac{1}{2}} + (S)^{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}10510$, wobei wie früher, $\mathfrak{M}(Fe) = 0{\cdot}13558$ $\mathfrak{m}(Fe) = 0{\cdot}027851$.

78. Bleiglanz $(PbS) = 241$ $D = 7{\cdot}52$ $R = 77°50$ $\mu = 4{\cdot}638$ Schr. $M = 0{\cdot}003520$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}8464$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}15011$, in Folge Condensation $\mathfrak{M}^2$ und $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ berechnet sich für metallisch Blei $\mathfrak{M}(Pb) = 0{\cdot}358$ $\mathfrak{m}(Pb) = 0{\cdot}079$.

79. Zinkblende $ZnS = 97{\cdot}2$ $D = 4{\cdot}09$ $R = 67{\cdot}6$ $\mu = 2{\cdot}371$ Jamin $M = 0{\cdot}001468$ $\mathfrak{M} = 0{\cdot}14504$ $\mathfrak{m} = 0{\cdot}042331$. Dies macht eine Ausnahme? von den für die vorigen geltenden Gesetze indem keine Condensation bei Einführung der Äquivalente von metallischem Zink eintritt $\mathfrak{M}_m(Zn) + \mathfrak{M}(S) = 0{\cdot}1515$ $\mathfrak{m}_m(Zn) + (S) = 0{\cdot}04153$, folgt daraus $\mathfrak{M}_m(Zn) = 0{\cdot}08050$ $\mathfrak{m}_m Zn = 0{\cdot}02122$.

III. Zusammenstellung der Resultate.

§. 10. Tafel der Refractionsäquivalente. Geht man die bisher erhaltenen Zahlen durch mit Berücksichtigung der wahrscheinlichen Fehler und dem Gewichte der einzelnen Beobachtungen, so erhalten wir angenäherte Werthe für eine grosse Reihe von Grundstoffen. Zieht man von den sämmtlich bisher bekannten Grundstoffen diejenigen ab, welche nur als Seltenheiten vorkommen, so bleiben vielleicht noch 5—10 wichtigere Stoffe übrig,

welche bei den bisherigen Untersuchungen übergangen werden mussten. Aber die grosse Anzahl von Elementen, es sind 37, für deren Modificationen die Einwirkung des Lichtes studirt ward, ermöglicht jedoch leicht, mittelst derselben, sobald günstige Messungen vorliegen, auch die Refractionsäquivalente der übrigen zu erhalten.

In der nachfolgenden Zusammenstellung ward angegeben, für welche Modificationen des Grundstoffes die beifolgenden Refractionsäquivalente gerechnet sind, ob für den gasförmigen (*g*), für den festflüssigen (*f*) oder für den metallischen (*m*) Zustand.

In der Columne *m* habe ich die Werthe für das secundäre Refractionsäquivalent, welches sich also auf $\frac{\mu-1}{d}$ basirt angegeben; hingegen in der Columne $\mathfrak{M}$ das primäre Refractionsäquivalent für roth.

Um letzteres, welches in Folge §. 2 von so grosser Wichtigkeit auf die atomistische Lagerung ist, in der Rechnung handsamer einzuführen, ward, analog der Chemie, das Refractionsäquivalent des Wasserstoffes — welches das kleinste ist — der Einheit gleichgesetzt

$$\mathfrak{M}(H) = 0{\cdot}004050 = 1{\cdot}00 = [\mathfrak{M}](H) \tag{32}$$

und diese so reducirten Refractionsäquivalente (welchen Ausdruck ich zugleich für die Bezeichnung beibehalten will), sind in der Columne $[\mathfrak{M}]$ zusammengestellt.

Diese letzterwähnten Zahlen können wohl ohne Frage mit den chemischen Äquivalenten verglichen werden, da sie auf gleiche Weise die quantitative Einwirkung auf das Licht zu erkennen geben, wie die Äquivalente der Grundstoffe uns die Quantität der Verbindung darstellen; sie sind wahre Äquivalente. Durch ihre Kenntniss ist es möglich, mittelst einfacher Rechnungsoperationen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes in den verschiedenen Verbindungen zu ermitteln und da sie ja von λ^2 abhängig sind, für die verschiedenen Farben zu berechnen.

Ich muss hier nochmals bemerken, dass, wie Satz 22 zeigte, $\mathfrak{M}$ eine Function der Wellenlänge ist, und dass in den nachfolgenden Zahlen $\mathfrak{M}_{\lambda\rho}$ *di.* das Refractionsäquivalent für rothes Licht anzugeben ist. Zur Transformation für andere Wellenlänge dient Formel (22). Da durchgehends $\mathfrak{M}_{\lambda\rho}$ gerechnet, sind die Resultate vergleichbar.

	P		$\mathfrak{M}_\rho$	$[\mathfrak{M}_\rho]$	m_ρ
Aluminium	Al = 27·4	f	0·023404	5·79	0·004842
Antimon	Sb = 120	m	0·30540	75·59	0·064248
Arsen	As = 75	g	0·016350	4·05	0·008041
		f	0·048755	12·07	0·018679
Baryum	Ba = 137	f	0·04628	11·38	0·01549
Beryllium	Be = 9·4	f	0·01620	4·01	0·00848
Blei	Pb = 208	f	0·10916	27·02	0·03389
		m	0·358	88·60	0·079
Bor	B = 22	f	0·03710	9·18	0·00611
Brom	Br = 80	f	0·043461	10·76	0·017903
Calcium	Ca = 40	f	0·02726	6·65	0·00887
Cadmium	Cd = 112	f	0·04690	11·61	0·02163
Chlor	Cl = 35·5	g	0·022258	5·51	0·011095
Eisen	Fe = 56	m	0·13558	33·56	0·02785
Fluor	Fl = 19	f	0·00600	1·45	0·00580
Jod	J = 127	f	0·076927	19·05	0·029867
Kalium	K = 39·2	f	0·019083	4·73	0·00872
Kohlenstoff	C = 12	f	0·021720	5·01	0·006267
Kupfer	Cu = 63·4	f	0·03876	9·60	0·01441
		m	0·07205	17·83	0·01883
Lithium	Li = 7	f	0·013560	3·36	0·005274
Magnesium	Mg = 24	f	0·03125	7·74	0·014580
Molybdän	Mo = 96	f	0·19690	48·73	0·05057
Natrium	Na = 22	f	0·014122	3·68	0·005868
Phosphor	P = 31	g	0·019406	4·81	0·009709
		f	0·075547	18·70	0·024315
Quecksilber	Hg = 200	g	0·031800	7·87	0·015900
		c	0·036200	8·96	0·013406
		f	0·07598	18·81	0·028310
		m	0 39740	98·38	0·07016
Sauerstoff	O = 16	g	0·007824	1·97	0·003912
Schwefel	S = 32	g	0·015764	3·94	0·007876
		f	0·064084	16·13	0·021096
Selen	Se = 79·5	m	0·12046	29·81	0·034216
Silber	Ag = 108	f	0·03668	9·08	0·01483
		m	0·13631	33·75	0·03115
Silicium	Si = 28	f	0·03524	8·73	0·008100
	?	m	0·13097	32·45	0·028298
Stickstoff	N = 14	g	0·008428	2·09	0·004214

	P		$\mathfrak{M}_\rho$	$[\mathfrak{M}_\rho]$	m_ρ
Strontium	Sr = 87·6	*f*	0·03609	8·93	0·021246
Titan	Ti = 56	*f*	0·12782	31·67	0·033195
Wasserstoff	H = 1	*g*	0·004050	1·00	0·002024
Wismuth	Bi = 210	*f*	0·10880	26·90	0·00785
		m	0·32647	80·82	0·07149
Wolfram	W = 184	*f*	0·10766	26·66	0·02972
Zink	Zn = 65·2	*f*	0·02950	7·23	0 01892
		m	0·08510	21·01	0·02122
Zinn	Sn = 118	*f*	0·078516	19·70	0·03034
Zirkon	Zr = 44·8	*f*	0·07702	19·01	0·025121.

Vergleicht man diese erhaltenen Resultate und ordnet sie nach ihren Grössenverhältnissen, so lassen sich mehrere interessante Folgerungen machen. Das wichtigste Factum ist, dass mehrere Stoffe ein nahezu gleiches Refractionsäquivalent besitzen. Der nachfolgende Paragraph wird, wie ich glaube, den Grund dieser Erscheinung genügend angeben. Andererseits gewährt auch die Tabelle für die Zwecke der Dioptrik, wenn es sich um die Erzeugung von Glassorten bestimmter Brechbarkeit handelt, einige theoretische Anhaltspunkte. Es war für mich interessant zu sehen, dass nächst dem leicht flüchtigen Quecksilber, Blei das höchste Refractionsäquivalent besitzt; ein Factum, welches, ohne den wahren Grund zu kennen, wohl seit längst die Dioptrik für die Erzeugung ihrer Gassorten benützt.

§. 11. Werthe der Optischen Atomzahlen. Durch die Formel (18) ist bewiesen, dass das Refractionsäquivalent eine Function von der Zahl und Grösse der physikalischen Atome ist.

In §. 2 ward ausführlich angegeben, in welcher Weise es möglich ist, aus den bekannten Refractionsäquivalenten $\mathfrak{M}$ oder $[\mathfrak{M}]$ die optischen Atomzahlen (ZG), die das Product aus der Anzahl in die Grösse der physikalischen Atome durch Formel (20) zu berechnen.

Führt man diese Berechnung durch mit dem aus der vorigen Tafel bekannten Refractionsäquivalent $[\mathfrak{M}]$, bringt ferner alle Atomgewichte auf gleiches Mass 100, so erhält man die im Nachfolgenden zusammengestellten optischen Atomzahlen. Es ist zu bemerken, dass gleichwie im Vorigen der Factor λ_ρ^2 constant für alle Zahlen vorausgesetzt ward, so ist hier für alle erhaltenen Zahlen der Factor λ_ρ^2 der Einheit gleichgesetzt worden.

Da es sich hier nicht um die Entwickelung der absoluten Werthe handeln kann, sondern nur um relative Verhältnisszahlen, so kann dieser constante Ausdruck λ^2 vernachlässigt werden.

		ZG
Aluminium	*f*	21·14
Antimon	*m*	62·99
Arsen	*g*	5·23
	f	16·01
Baryum	*f*	8·30
Berythium	*f*	42·66
Blei	*f*	12·99
	m	42·60
Bor	*f*	41·71
Brom	*f*	13·45
Calcium	*f*	16·65
Cadmium	*f*	10·38
Chlor	*g*	15·53
Eisen	*m*	51·00
Fluor	*f*	7·63
Jod	*f*	15·00
Kalium	*f*	12·06
Kohlenstoff	*f*	41·75
Kupfer	*f*	15·15
	m	27·05
Lithium	*f*	48·00
Magnesium	*f*	32·25
Molybdän	*f*	50·76
Natrium	*f*	15·96
Phosphor	*g*	15·51
	f	60·31
Quecksilber	*g*	3·83
	c	4·48
	f	9·40
	m	49·19
Sauerstoff	*g*	12·25
Schwefel	*g*	12·00
	f	50·40
Selen	*m*	37·49
Silber	*f*	8·40
	m	31·25
Silicium	*f*	31·17
?	*m*	115·00
Stickstoff	*g*	14·93
Strontium	*f*	10·19
Titan	*f*	56·55
Wasserstoff	*g*	100·00
Wismuth	*f*	12·80
	m	38·49
Wolfram	*f*	14·49
Zink	*f*	10·93
	m	32·22
Zinn	*f*	16·70
Zirkon	*f*	42·42

Diese vorstehenden optischen Atomzahlen (Product aus der Anzahl der physikalischen Atome in deren Grösse) zeigen bei näherer Vergleichung die sehr wichtige Thatsache, dass sie für ähnliche chemische Grundstoffe entweder gleiche oder multiple Reihen bilden. Es tritt hier derselbe Fall ein, wie bei den Forschungen der theoretischen Chemie über relative Raumerfüllung (Kopp, theor. Chemie pag. 163) oder über die specifische Wärme.

Da also die Atomzahlen ähnlicher chemischer Grundstoffe in so einfachem Connex stehen, so sind wir — ohne eine allzu kühne

Hypothese zu wagen — wohl berechtigt, diese chemische Ähnlichkeit davon herzuleiten, dass die Molecüle von ähnlichen Elementen entweder aus gleicher Zahl der physikalischen Atome bei im einfach multiplen Verhältnisse variirender Grösse derselben — oder aus gleichgrossen Atomen, aber in multipler Anzahl gebildet werden.

Über die Ähnlichkeit der Grundstoffe hat Kremers (Pogg. Ann. 1864) einige Abhandlungen veröffentlicht und solche Reihen zusammengestellt. Es sind dies die nachfolgenden, wobei ich die optischen Atomzahlen beifüge.

Li	48·00	Na	15·96	Ka	12·06
Mg	32·25	Zn	10·93	Cd	10·38
			32·22		
Ca	16·65	Sr	10·19	Ba	8·30
Hg	4	Pb	12·99	Ag	8·40
	9·4		42·60		31·25
	49·19				
Wo	14·49	Va		Mo	50·76
Te		Se	37·77	S	12·00
					50·40
		O	12·25	Bi	12·80
					38·49
Sb	62·99	As	5·23	P	15·51
			16·01		60·31
J	15·00	Br	13·45	Cl	15·53
				Fl	7·62
Ta		Nb		Ti	56·55.

Berücksichtigt man aber nicht blos wie Kremers die Differenz der Atomgewichte, sondern auch die morphologischen Verhältnisse, welche namentlich in der Isomorphie zur Geltung gelangen, so könnte man nachfolgende Reihen, welche sowohl in ihrem chemischen als physikalischen Charakter sich sehr nahe stehen, aufstellen. Ein Blick auf die beigefügten Atomzahlen wird genügen, um meine frühere Behauptung über die atomistische Gruppirung zu bekräftigen.

I.		II.		III.	
Fl	7·63	O	12·25	As	5·23
Br	13·45	S	12·00	N	14·93
J	15·00	Se	37·77	P	15·51
Cl	15·53	S	50·40	As	16·01
				P	60·31
				Sb	62·99

IV.		V.	
C	41·75	Al	21·14
Bo	41·71	Be	42·66
		Zr	42·42

VI.			VII. (?)		
Sn	16·70	(2)	W	14·49	(2)
Si	31·17	(4)	Cu	15·15	(2)
Ti	56·55	(7)	Cu	27·05	(4)
Si	115·00	(14)	Fe	51·00	(7)

VIII.		IX.		X.	
Ag	8·40	Ba	8·30	Hg	9·40
Ka	12·06	Sr	10·19	Cd	10·38
Na	15·96	Pb	12·99	Zn	10·93
Ag	31·25	Ca	16·65	Zn	32·22
Li	48·00	Pb	42·60	Mg	32·25
				Hg	49·19
				Mo	50·76.

Die Übereinstimmung der Zahlen in ihrem einfachen und multiplen Verhältniss ist, wenn man von der etwas fraglichen Reihe 7 (wo die Factoren in Klammern beigesetzt) absieht, eine so auffallende, dass dieselbe nicht nur für die Richtigkeit der im ersten Theile dieser Untersuchungen aufgestellten Annahmen spricht, sondern auch die optischen Atomzahlen als ein Hilfsmittel bezeichnet, um über die physikalische Ähnlichkeiten der Grundstoffe zu unterscheiden.

XIX. SITZUNG VOM 20. JULI 1865.

Wegen Erkrankung des Präsidenten übernimmt Herr Prof. Unger den Vorsitz.

Herr Prof. H. Hlasiwetz hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

Herr Prof. E. Mach in Gratz übersendet eine für den „Anzeiger" bestimmte vorläufige Mittheilung „über die Wirkung zeitlicher und räumlicher Vertheilung der Lichtreize auf die Netzhaut".

Von dem w. M. der philos.-histor. Classe, Herrn Dr. Pfizmaier, wird eine Abhandlung: „Japanische Beschreibungen von Pflanzen" vorgelegt.

Herr Prof. Dr. Aug. Em. Reuss überreicht eine Abhandlung: „Die Foraminiferen, Anthozoen und Bryozoen des deutschen Septarienthones"; ferner die 2. Hälfte des I. Theiles und den II. Theil einer Abhandlung des Herrn Dr. K. Zittel, betitelt: „Die Bivalven der Gosaugebilde in den nordöstlichen Alpen".

Beide Abhandlungen sind für die Denkschriften bestimmt.

Das w. M., Herr Prof. Dr. J. Stefan, legt eine Abhandlung des Herrn Boltzmann, Zöglings des k. k. physikalischen Institutes, „über die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen" vor.

Herr Dr. A. Boué spricht über fossile Menschenknochen, die er vor 40 Jahren im Löss zu Lahr im Badischen gefunden hatte.

Herr Prof. J. Petzval überreicht eine Abhandlung „über die Berührungsaufgabe für die Kugel", von Herrn Dr. J. Frischauf.

Herr Dr. K. Freih. v. Reichenbach beendigt seinen Vortrag über loheartige Erscheinungen, welche von sensitiven Menschen wahrgenommen werden sollen.

Herr J. Loschmidt legt die weitere Fortsetzung seiner „Beiträge zur Kenntniss der Krystallformen organischer Verbindungen" vor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 34e Année, 2e Série, Tome XIX, Nr. 5. Bruxelles, 1865; 8°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 14. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1538. Altona, 1865; 4°.

Bauzeitung, Allgemeine: XXX. Jahrg. 4.—6. Heft. Nebst Atlas. Wien, 1865; 4° & Fol.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. Nr. 1. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 2e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Fiedler, Wilhelm, Analytische Geometrie des Raumes von George Salmon. II. Theil. Leipzig, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 29. Wien, 1865; 8°.

Lotos. XV. Jahrgang. Mai, Juni 1865. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1865. 4. Heft. Wien; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. Heft VI. Gotha; 4°.

Mortillet, G. de, L'époque quaternaire dans la vallée du Pô. (Extr. du Bulletin de la Ste géologique de France. 2e sér., t. XXII.) 8° — Les mystifiés de l'Académie des Sciences. Paris, 1865; 8°.

Osservatorio del R. Istituto tecnico di Ancona: Bullettino meteorologico. No. 5. Maggio 1865. Ancona; 4°.

Pisko, Fr. Jos., Die neueren Apparate der Akustik. (Mit 36 in den Text aufgenommenen Holzschnitten.) Wien, 1865; 8°.

Protokoll über die Verhandlungen der 39. General-Versammlung der Actionäre der ausschl. priv. Kaiser Ferdinands-Nordbahn. Wien, 1865; 4°.

Reader. Nr. 133, Vol. VI. London, 1865; Fol.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. 1865. XV. Bd. Nr. 2. April—Juni. Wien; Kl.-4°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 56—57. Wien, 1865; 4°.

Über die Bewegung der Elektricität in krummen Flächen.

Von **Ludwig Boltzmann**,
Zögling des k. k. physikalischen Institutes.

I. Bewegung der Elektricität auf einer Kugelfläche.

Herr Prof. Stefan leitete in seinen Vorlesungen über die Theorie des elektrischen Stromes aus dem selbstverständlichen Satze, dass bei einer Kugelfläche, die an den Endpunkten eines Durchmessers mit den Poldrähten einer Batterie berührt wird, die Curven gleicher Spannung Parallelkreise sein müssen, das merkwürdige Resultat ab, dass der Widerstand dieser Kugelfläche gleich ist dem einer unendlichen Ebene, in der die Elektroden in derselben Distanz sich befinden. Er veranlasste mich darauf hin, die Vertheilung der elektrischen Spannung auf einer Kugeloberfläche ganz allgemein zu untersuchen, wobei sich der erwähnte Satz auch für jede andere Lage des Ein- und Ausströmungspunktes bestätigte. Nachdem ich meine Rechnungen bereits beendigt hatte, erschien Beer's „Einleitung in die Elektrostatik, Lehre vom Magnetismus und Elektrodynamik", in welcher dieselbe Frage behandelt wird. Da jedoch die gegebene Lösung fehlerhaft ist, so glaube ich meine Untersuchungen hiermit der Öffentlichkeit übergeben zu sollen.

Nehmen wir also eine Kugelschale von durchaus gleichem Leitungsvermögen k, verschwindend kleiner ebenfalls gleichförmiger Dicke δ und einem Radius R. Dieselbe werde in zwei Punkten, A und B mit den Poldrähten einer elektrischen Stromquelle berührt. Als Coordinaten eines Punktes D der Kugelfläche wählen wir seinen Winkelabstand φ von dem Halbirungspunkte C des A und B verbindenden grössten Kreisbogens und den Winkel ϑ, den die Ebene des durch C und D gelegten grössten Kreises mit der Ebene ACB bildet. Den Winkel ϑ zählen wir vom Einströmungspunkt A zum Ausströmungspunkt B.

Lassen wir nun φ und ϑ um ihre Differentiale wachsen, so entsteht auf der Kugel ein rechteckiges Elementchen $DEGF$ und es ist die in der Verlängerung von CD liegende Seite desselben

$$DE = Rd\varphi$$

und die senkrecht darauf stehende Seite

$$DF = R \sin \varphi d\vartheta;$$

die Elektricitätsmenge aber, welche in der Zeiteinheit durch DE in der Richtung DF einströmt, findet man

$$s = -k\delta \frac{\Delta u}{DF} DE,$$

wo u die Spannung oder das Potential der Elektricität in D, Δu dessen Zuwachs beim Übergang von D nach F bedeuten. Die Substitution der Werthe für DE und DF ergibt:

$$s = -k\delta \left(\frac{du}{d\vartheta}\right) \frac{d\varphi}{\sin \varphi}.$$

Ebenso findet man als Werth der durch DF einströmenden Elektricitätsmenge

$$s' = -k\delta \frac{\Delta' u}{DE} . DF = -k\delta \left(\frac{du}{d\varphi}\right) \sin \varphi d\vartheta .$$

Die Elektricitätsmengen, welche durch die DE und DF gegenüberliegenden Seiten FG und EG ausströmen, werden um die Differentiale der Grössen s und s' nach ϑ und φ grösser sein; die Summe dieser Differentiale gibt also den Zuwachs der Spannung im Flächenelement, der bei stationärer Strömung in allen Punkten ausser A und B gleich der Nulle sein muss; die Spannung wird daher durch folgende Gleichung bestimmt:

$$-k\delta d\vartheta d\varphi \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi} \sin \varphi\right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right] = 0, \qquad (1)$$

wobei natürlich blos der eingeklammerte Factor verschwinden kann. Auch in dieser Gleichung findet sich bei Beer eine Unrichtigkeit.

Eine specielle Auflösung derselben ergibt sich, wenn man $\frac{du}{d\varphi}\sin\varphi$ gleich einer Constanten A setzt, woraus durch Integration folgt:

$$u = A \operatorname{logtang}\frac{\varphi}{2} + B.$$

Diese Function liefert jedoch für $\varphi = 0$, $u = -\infty$; für $\varphi = \pi$, $u = +\infty$; gilt also nur für den Fall, dass A und B Enden desselben Durchmessers sind. Um die allgemeine Lösung zu finden, wollen wir die Cosinus der Winkelabstände eines Punktes von A und B als neue Coordinaten einführen; sie sind, wenn wir den Winkel $COA = COB$ mit b, also den Winkelabstand der Elektroden mit $2b$ bezeichnen (O ist der Mittelpunkt der Kugel):

$$r = \cos b \cos\varphi + \sin b \sin\varphi \cos\vartheta$$
$$\rho = \cos b \cos\varphi - \sin b \sin\varphi \cos\vartheta.$$

Nach Einführung dieser neuen Variablen erhält die Differentialgleichung (1), nachdem die gehörigen Reductionen durchgeführt sind, folgende Gestalt:

$$(2)\quad \frac{d^2u}{dr^2}(1-r^2) - 2r\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{d\rho^2}(1-\rho^2) - 2\rho\frac{du}{d\rho} + 2\frac{d^2u}{dr\,d\rho}(1-r\rho) = 0$$

Man erkennt sogleich, dass man eine specielle Auflösung dieser Gleichung erhält, indem man $u = \chi(r) + \psi(\rho)$ setzt und $\chi(r)$ und $\psi(\rho)$ als solche Functionen von r und ρ wählt, dass sie die Gleichungen

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}(1-r^2) - 2r\frac{d\chi}{dr} = A$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\rho^2}(1-\rho^2) - 2\rho\frac{d\psi}{d\rho} = -A$$

erfüllen, aus denen sich

$$\chi(r) = \frac{-A+C}{2}\log(1+r) - \frac{A-C}{2}\log(1-r) + B'$$

$$\psi(\rho) = \frac{A+C'}{2}\log(1+\rho) + \frac{A-C'}{2}\log(1-\rho) + B''$$

$$u = \frac{-A+C}{2}\log(1+r) - \frac{A+C}{2}\log(1-r) + \frac{A+C'}{2}\log(1+\rho) + \\ + \frac{A-C'}{2}\log(1-\rho) + B$$

ergibt; A, B, B', B'', C und C' sind willkürliche Constanten.

Diese lassen sich so bestimmen, dass dieser Werth die Bedingungen der Aufgabe erfüllt; offenbar lässt er blos für die vier Punkte $r=1$, $r=-1$, $\rho=1$, $\rho=-1$ Discontinuität zu; es sind dies die Punkte A und B und die ihnen gegenüberliegenden Pole der Kugel; um ihn auch für letztere continuirlich zu machen, brauchen wir blos

$$C=A;\ C'=-A$$

zu setzen; der dadurch erhaltene neue Werth

$$u = A\log\frac{1-\rho}{1-r} + B \qquad (3)$$

erfüllt die Bedingungsgleichung (2) rücksichtlich der ganzen Kugelfläche, wenn nur A und B beständig bei unendlicher oder um sie mit sehr kleinen Radien beschriebene Kreise bei sehr grosser Spannung erhalten werden. Führt man, wie Beer, statt der Cosinus direct die Winkelabstände d' und d'' von A und B ein, so erhält man

$$u = 2A\log\frac{\sin\frac{d''}{2}}{\sin\frac{d'}{2}} + B \qquad (4)$$

und man sieht, dass die Formel Beer's nicht für zwei, sondern für vier Elektroden gilt, von denen die beiden positiven und die beiden negativen an je zwei entgegengesetzten Enden desselben Durchmessers liegen, wie denn auch klar ist, dass schon die ganze Ableitungsweise Beer's, die er uns freilich grösstentheils blos vermuthen lässt, vier in der besagten Weise gelegene Elektrodenpunkte voraussetzt.

Dasselbe Resultat könnte man auch mit Umgehung der Coordinatentransformation erhalten, indem man u gleich einer solchen Function von φ setzte, dass die linke Seite der Gleichung (1) einer Constanten multiplicirt mit der Grösse des Flächenelementes $R^2\sin\varphi d\varphi d\vartheta$ gleich würde; die Integration der resultirenden Differentialgleichung

ergäbe dann, nachdem die Constanten so bestimmt wurden, dass u nur für $\varphi = 0$ unendlich wird

$$u = 2A \log \sin \frac{\varphi}{2} + B;$$

φ kann hier den Winkelabstand von jedem beliebigen Punkte der Kugel vorstellen, den man als Elektrodenpunkt voraussetzt und es würde eine beliebige Summe von Gliedern von dieser Form die Differentialgleichung erfüllen, sobald nur die Summe der Constanten A gleich Null wäre; denn eben dieser Summe wäre der Zuwachs an Elektricität in der Flächeneinheit proportional.

Um die Curven gleicher Spannung zu finden, brauchen wir blos in Formel (3) die Grösse $\frac{1-\rho}{1-r}$ gleich einer Constanten m zu setzen, woraus nach Einsetzung der Werthe für r und ρ und geänderter Anordnung der Glieder folgt:

$$m(\cos b \cos \varphi + \sin b \sin \varphi \cos \vartheta) - (\cos b \cos \varphi - \sin b \sin \varphi \cos \vartheta) = m - 1$$

oder nach Einführung rechtwinkeliger Coordinaten

$$x = R \sin \varphi \cos \vartheta$$
$$y = R \sin \varphi \cos \vartheta$$
$$z = R \cos \varphi$$

und abermals veränderter Anordnung:

$$z + x \frac{m+1}{m-1} \operatorname{tang} b = R \sec b,$$

d. h. die Curven gleicher Spannung sind Kreise, deren Ebenen sich insgesammt in der Durchschnittslinie der an A und B gelegten Tangentialebenen schneiden.

Die Strömungslinien sind die senkrechten Transversallinien des Systems der Curven gleicher Spannung; bezeichnen wir ihre Coordinaten mit Θ und Φ, so erhellt aus geometrischen Betrachtungen, dass

$$\frac{\sin \Theta d\Phi}{d\Theta} = -\frac{d\vartheta}{\sin \vartheta d\varphi}$$

sein muss. Die Differentiation der Gleichung der Curven gleicher Spannung gibt

$$\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta d\varphi} = -\frac{\sin b \sin\vartheta \sin\varphi}{\cos b - \cos\vartheta},$$

daher für die Strömungslinien, indem wir sogleich die grossen Buchstaben wieder mit den kleinen vertauschen

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \sin b \frac{d\vartheta}{\cos b - \cos\vartheta}$$

und durch Integration

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = n \frac{\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} - \operatorname{tang}\frac{b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\vartheta}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}},$$

woraus zu ersehen ist, dass der durch A und B auf AOB senkrecht gelegte Parallelkreis auch eine Strömungscurve ist.

Um den Widerstand der Kugel zu finden, nennen wir die gegen den Radius der Kugel verschwindend klein vorausgesetzten Radien der Poldrähte a_1 und a_2 und die Spannungen an der Peripherie der Drähte u_1 und u_2, so wird in Formel (4) für die erste Elektrode

$$d'' = 2b,\ d' = \frac{a_1}{R},$$

daher wenn man den Sinus mit dem Bogen verwechselt

$$\sin\frac{d'}{2} = \frac{a_1}{2R}$$

$$u_1 = 2A \log\frac{2R\sin b}{a_1} + B.$$

Eben so liefert die Formel (4) für die zweite Elektrode:

$$u_2 = 2A \log\frac{a_2}{2R\sin b} + B,$$

daher

$$u_1 - u_2 = 2A \log\frac{4R^2 \sin^2 b}{a_1 a_2}\ ;\quad A = \frac{u_1 - u_2}{2\log\frac{4R^2\sin^2 b}{a_2 a_1}}.$$

Die durch den Umfang des positiven Poldrahtes und folglich durch die ganze Kugel in der Zeiteinheit strömende Elektricitätsmenge wird gefunden, indem man den Differentialquotienten von u_1 nach a_1 mit $-k\delta$ und dem Umfang des Drahtes multiplicirt; nennen wir sie s, so wird

$$s = 4\pi k\delta A = \frac{2\pi k\delta(u_1 - u_2)}{\log \frac{4R^2 \sin^2 b}{a_1 a_2}}.$$

Der Widerstand der Kugel ist also, weil $s = \frac{u_1 - u_2}{w}$ zu setzen ist:

$$w = \frac{1}{2\pi k\delta} \log \frac{4R^2 \sin^2 b}{a_1 a_2} = \frac{1}{2\pi k\delta} \log \frac{E^2}{a_1 a_2},$$

wo E die Entfernung der Elektroden, welche gleich $2R \sin b$ ist, bezeichnet. Da nun dieser Ausdruck den Radius der Kugel nicht enthält und der Widerstand der unendlichen Ebene durch eine vollkommen gleiche Formel gegeben wird, so lässt sich der bereits erwähnte von Prof. Stefan gefundene Satz dahin erweitern, dass der Widerstand einer Kugel unabhängig von ihrem Radius jedesmal gleich ist dem Widerstande einer unendlichen Ebene (Kugel von unendlichem Radius), auf der sich die Elektroden in derselben Distanz befinden.

II. Bewegung der Elektricität auf einer cylindrischen Fläche.

Wir wollen ferner noch die Vertheilung der elektrischen Spannung auf einer unendlichen cylindrischen Fläche berechnen, in die an zwei oder mehr Punkten Elektricität einströmt, z. B. in M und N. Zu diesem Zwecke beachten wir, dass die Elektricität von M und N nach allen Richtungen, wie in der unendlichen Ebene ausströmen wird, bis die nach der einen Seite fliessende Elektricität, nachdem sie die Hälfte des Umfangs durchlaufen hat, mit der nach der andern Seite strömenden, etwa in der Linie CD zusammentrifft. Allein nach dem Principe der Superposition wird sich jede, ohne von der andern gestört zu werden, über CD hinaus weiter verbreiten und bei der zweiten Ankunft in CD von Neuem u. s. w.

Wir finden daher die Spannung im Cylinder, indem wir eine nach allen Seiten unendliche Ebene mit entsprechenden Ein- und Ausströmungspunkten um ihn aufwickeln. Jeder Punkt erhält dann die Summe der Spannungen aller in ihm übereinanderfallenden Punkte der Ebene.

Bezeichnen wir daher den Umfang der Basis des Cylinders, deren Gestalt übrigens vollkommen willkürlich bleibt, mit a und zählen die Abscissen parallel der Axe des Cylinders, die Ordinaten aber in senkrechter Richtung um den Cylinder herum, so ist die Spannung irgend eines Punktes des Cylinders x, y gleich der Summe der Spannungen jener Punkte der Ebene, deren Abscissen x und deren Ordinaten $y, y+a, y+2a\ldots, y-a, y-2a\ldots$ sind; diese Summe ist aber, wenn ξ, η und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ die Coordinaten des Ein- und Ausströmungspunktes sind:

$$u = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A \log \frac{(x-\mathfrak{x})^2+(ak+y-\mathfrak{y})^2}{(x-\xi)^2+(ak+y-\eta)^2} + B =$$
$$= A \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{(x-\mathfrak{x})^2+(ak+y-\mathfrak{y})^2}{(x-\xi)^2+(ak+y-\eta)^2} + B.$$

Wo Π ein unendliches Product, A und B bekannte Constanten bezeichnen. Weitere Transformationen ergeben

$$u = A \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{[ak+y-\mathfrak{y}+(x-\mathfrak{x})i][ak+y-\mathfrak{y}-(x-\mathfrak{x})i]}{[ak+y-\eta+(x-\xi)i][ak+y-\eta-(x-\xi)i]} + B$$
$$= A \log \prod_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{\left[1+\frac{y-\mathfrak{y}+(x-\mathfrak{x})i}{ak}\right]\left[1+\frac{y-\mathfrak{y}-(x-\mathfrak{x})i}{ak}\right]}{\left[1+\frac{y-\eta+(x-\xi)i}{ak}\right]\left[1+\frac{y-\eta-(x-\xi)i}{ak}\right]} + B$$
$$= A \log \frac{\sin\frac{\pi}{a}[y-\mathfrak{y}+(x-\mathfrak{x})i] \cdot \sin\frac{\pi}{a}[y-\mathfrak{y}-(x-\mathfrak{x})i]}{\sin\frac{\pi}{a}[y-\eta+(x-\xi)i] \cdot \sin\frac{\pi}{a}[y-\eta-(x-\xi)i]} + B$$
$$= A \log \frac{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\mathfrak{x})} + e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\mathfrak{x})} - 2\cos\frac{2\pi}{a}(y-\mathfrak{y})}{e^{\frac{2\pi}{a}(x-\xi)} + e^{-\frac{2\pi}{a}(x-\xi)} - 2\cos\frac{2\pi}{a}(y-\eta)} + B.$$

Nachdem durch diese Formel die Spannung in jedem Punkte bestimmt ist, unterliegt es keiner Schwierigkeit mehr, nach den gewöhnlichen Methoden die Curven gleicher Spannung, die Strömungscurven und den Widerstand zu bestimmen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Spannung, falls der Cylinder nach beiden Seiten durch Curven begrenzt ist, deren Ebenen auf seine Axe senkrecht stehen, durch höhere Transcendente, und zwar die Jacobi'schen Θ-Functionen, ausgedrückt wird.

Über die Berührungsaufgabe für die Kugel.

Von **Dr. Johann Frischauf.**

Zu den berühmtesten Aufgaben der Geometrie gehört unstreitig das Problem von Apollonius: einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt. Dieses Problem wurde zuerst von Vieta, welcher das verlorene Werk von Apollonius *„de tactionibus"* wieder herstellte, in rein geometrischer Weise gelöst. Seit Vieta beschäftigten sich die berühmtesten Geometer mit dieser Aufgabe, aber erst in der letzteren Zeit gelang es nach den Methoden der neueren Geometrie Lösungen zu geben, die sowohl in theoretischer als praktischer Hinsicht einfacher und eleganter sind; unter diesen dürfte die bekannte, im Wesentlichen von Gergonne herrührende Lösung, durch die Lehre von Pol und Polare wohl die vorzüglichste sein.

Während auf diese Art die Berührung des Kreises einen schönen Abschluss fand, erfreute sich das analoge, gewiss eben so interessante Problem der räumlichen Geometrie: eine Kugel zu beschreiben, welche vier gegebene Kugeln berührt, nicht einer solchen sorgsamen Pflege. Dasselbe wurde allerdings bereits von Fermat auf ganz ähnliche Art, wie das Kreisproblem durch Vieta gelöst. Aber bis jetzt existirt, so viel uns bekannt ist, keine unmittelbare, rein geometrische Lösung dieses Problems, sondern man reducirt die Aufgabe, ähnlich wie man früher die Berührung des Kreises zu behandeln pflegte, auf immer einfachere Aufgaben. Die Ähnlichkeit gewisser Eigenschaften von Kugel und Kreis veranlasste uns zu untersuchen, ob sich für das Berührungsproblem im Raume eine, der Gergonne'schen Lösung des Kreisproblems ähnliche Lösung finden liesse; eine solche Auflösung wollen wir in den nachfolgenden Zeilen geben.

Bevor wir zur Auflösung des Berührungsproblems selbst übergehen, wollen wir einige Sätze, welche vielleicht weniger bekannt oder neu sein könnten, aber zur Auflösung selbst unentbehrlich sind, entwickeln. Mit Hilfe dieser Sätze werden wir für das Berührungsproblem im Raume eine Lösung geben, welche der bekannten für den

Kreis so analog ist, dass man in letzterer nur statt Kreis Kugel, statt Gerade Ebene zu sagen hat, um mit der Lösung des Kreisproblems die für das Kugelproblem zu erhalten.

Pol und Polare.

Ist P ein fixer Punkt in der Ebene eines Kreises um den Punkt O als Mittelpunkt, lässt man um diesen Punkt P eine Transversale drehen, welche dem Kreise in den Punkten M, M' begegnet, und sucht man für diese Punkte auf der Geraden MM' den zu P conjugirt harmonischen Punkt P'; so ist bekanntlich der geometrische Ort des Punktes P' eine Gerade $P'E$, welche auf der PO senkrecht steht. Diese Gerade heisst die Polare von P, und P ist der Pol der Geraden $P'E$. Ist P ein Punkt der Peripherie des Kreises, so ist die Tangente in diesem Punkte seine Polare. Denkt man sich die ganze Figur um PO als Axe gedreht, so beschreibt der Kreis eine Kugelfläche, die Polare des Punktes P eine auf der Geraden PO senkrechte Ebene. Diese Ebene besitzt die Eigenschaft, dass sie jede durch den Punkt P gezogene Transversale, welche der Kugel in den Punkten M und M' begegnet, in einem Punkte P' schneidet, welcher zu P conjugirt harmonisch ist für die Punkte M, M'. Diese Ebene heisst die Polare des Punktes P, und der Punkt P ist der Pol dieser Ebene. Fallen M und M' zusammen, so fällt mit diesen Punkten auch P' zusammen, hieraus folgt: Man erhält die Polare eines ausserhalb der Kugelfläche liegenden Punktes P, indem man von diesem Punkte einen Berührungskegel an die Kugel construirt; die Ebene durch die Berührungscurve ist die Polare des Punktes P. Für die Berührungsaufgabe sind folgende Sätze von Wichtigkeit:

a) Die Polaren der verschiedenen Punkte einer Ebene schneiden sich in einem Punkte, dem Pole der Ebene. Denn zieht man von einem Punkte dieser Ebene eine Gerade nach deren Pole, so schneidet diese die Kugel in zwei Punkten, welche conjugirt harmonisch sind zu den zwei obigen Punkten, folglich ist der Pol der Ebene ein Punkt der Polare des ersten Punktes.

Umgekehrt: Die Pole aller Ebenen, welche sich in einem Punkte schneiden, liegen in einer Ebene, welche die Polare dieses Punktes ist.

b) Die Polaren der verschiedenen Punkte einer Geraden schneiden sich in einer zweiten Geraden; denn die Punkte einer Geraden

können in jeder durch die Gerade gelegten Ebene gedacht werden, die Polaren derselben müssen sich daher in demselben Punkte schneiden; aber nach der Verschiedenheit der Ebene, in welcher die Gerade liegen soll, in immer anderen Punkten, was nur möglich ist, wenn sie sich in derselben Geraden durchschneiden.

Umgekehrt: Die Pole der Ebenen, welche sich in derselben Geraden durchschneiden, liegen in einer zweiten Geraden. Diese zwei Geraden heissen *polar reciproke* Gerade.

Um zu einer Geraden hinsichtlich einer gegebenen Kugel die Polarreciproke zu construiren, verfährt man folgendermassen. Schneidet die Gerade die Kugelfläche, so lege man an die beiden Durchschnittspunkte Berührungsebenen, der Durchschnitt derselben ist die Polarreciproke der ersten; liegt die Gerade ausserhalb der Kugel, so lege man durch sie die zwei Berührungsebenen, die Verbindungslinie der Berührungspunkte ist die Polarreciproke. Denn berührt eine Ebene die Kugel, so ist der Berührungspunkt der Pol der Ebene, und umgekehrt. Aus der Construction ist klar, dass die polarreciproken Geraden auf einander senkrecht stehen.

Eigenschaften bezüglich zweier und mehrerer Kugeln.

1. Zieht man von einem beliebigen Punkte P an eine Kugel eine Gerade, welche derselben in den zwei Punkten M und M' begegnet, so ist das Rechteck

$$PM \,.\, PM'$$

eine constante Grösse, für jede durch den Punkt P gezogene Transversale, wie man unmittelbar ersieht, wenn man durch die Transversale und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene legt. Dieses constante Product heisst die Potenz des Punktes P für die gegebene Kugel. Der geometrische Ort aller Punkte, deren Potenzen für zwei gegebene Kugeln einander gleich sind, ist eine auf der Centrale beider Kugeln senkrechte Ebene; diese wird erhalten, indem man durch die Centrale eine Ebene legt, welche die Kugeln in zwei grössten Kreisen schneidet; bestimmt man für diese Kreise die Potenzlinie, so wird die durch sie, auf die Centrale senkrecht gelegte Ebene der geometrische Ort der gleichen Potenzen für beide Kugeln sein. Diese Ebene heisst

Potenzebene der beiden Kugeln. Schneiden sich die Kugelflächen, so ist die Ebene durch die Durchschnittscurve die Potenzebene. In diesem Falle, so wie wenn die Kugeln ausserhalb einander liegen, sind die, von einem ausserhalb der beiden Kugeln liegenden Punkte, an dieselben gelegten Tangenten von gleicher Länge.

a) Die Potenzebenen dreier Kugeln schneiden sich in derselben Geraden. Durch

$$O_0, O_1, O_2$$

sollen drei Kugeln, und zugleich die Mittelpunkte derselben bezeichnet werden.

Es sei nun

$C_{0,1}$ die Potenzebene von O_0 und O_1
$C_{0,2}$ „ „ „ O_0 „ O_2
$C_{1,2}$ „ „ „ O_1 „ O_2.

Die Ebenen $C_{0,1}$ und $C_{0,2}$ scheiden sich in einer Geraden ε, die Potenzen eines jeden Punktes der Geraden ε für die Kugeln O_0 und O_1, O_0 und O_2 sind einander gleich, also jeder Punkt der Geraden ε ist ein Punkt der Potenzebene von O_1 und O_2, d. h. die drei Ebenen

$$C_{0,1}, C_{0,2}, C_{1,2}$$

schneiden sich in derselben Geraden ε.

b) Die sechs Potenzebenen von vier Kugeln schneiden sich in einem Punkte, dieser Punkt heisst Potenzcentrum der vier Kugeln.

Es seien

$$O_0, O_1, O_2, O_3$$

vier Kugeln,

$$C_{0,1}, C_{0,2}, C_{0,3}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,3}$$

die Potenzebenen von

$$O_0, O_1;\ O_0, O_2;\ O_0, O_3;\ O_1, O_2;\ O_1, O_3;\ O_2, O_3.$$

Die drei Ebenen

$$C_{0,1}, C_{0,2}, C_{1,2}$$

schneiden sich in derselben Geraden, etwa ε; eben so schneiden sich die drei Ebenen

$$C_{0,2}, C_{0,3}, C_{2,3}$$

in derselben Geraden, etwa ρ. Die Geraden ε und ρ liegen in der Ebene $C_{0,2}$, sie schneiden sich daher in einem Punkte C, welcher der Potenzpunkt der vier Kugeln ist; denn die Potenzen von C an

$$O_0,\ O_1,\ O_2$$

so wie an

$$O_0,\ O_2,\ O_3$$

sind einander gleich.

---

2. Zieht man von den Mittelpunkten O_0 und O_1 zweier Kugeln die Radien O_0M_0 und O_1M_1 in gleicher und paralleler Richtung, so trifft die Verbindungslinie der Punkte M_0 und M_1 die Centrale O_0O_1 in einem fixen Punkte $A_{0,1}$. Dieser Punkt heisst der äussere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln. Zieht man die Radien O_0M_0 und O_1M_1' in entgegengesetzter paralleler Richtung, so trifft die Gerade M_0M_1' die Centrale in einem zweiten fixen Punkte $J_{0,1}$. Dieser Punkt heisst der innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln.

Begegnet die Gerade M_0M_1 den beiden Kugeln noch in den Punkten N_0 und N_1, so ist

$$A_{0,1}M_0 \cdot A_{0,1}N_1 = A_{0,1}N_0 \cdot A_{0,1}M_1 = k^2$$

wo k^2 eine constante Grösse ist für alle durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt gezogenen Geraden, welche äussere Ähnlichkeitsstrahlen genannt werden.

Begegnet die Gerade M_0M_1' den beiden Kugeln noch in den Punkten N_0' und N_1', so ist

$$J_{0,1}M_0 \cdot J_{0,1}N_1' = J_{0,1}N_0' \cdot J_{0,1}M_1' = l^2,$$

wo wieder l^2 eine constante Grösse ist für alle durch $J_{0,1}$ gezogenen Strahlen, welche innere Ähnlichkeitsstrahlen genannt werden.

Zusätze zu 1. und 2. α) Werden die Radien der beiden Kugeln einander gleich, so liegt der äussere Ähnlichkeitspunkt im Unendlichen, der innere auf der Mitte der Distanz O_0O_1. Werden die Radien der beiden Kugeln Null, so folgt: Der äussere Ähnlichkeitspunkt zweier Punkte liegt auf der Verbindungslinie derselben im Unendlichen, der innere auf der Mitte derselben.

β) Die Potenzebene zweier Kugeln von gleichem Radius steht senkrecht auf der Mitte der Distanz O_0O_1; daraus folgt, dass die Potenzebene zweier Punkte die Ebene ist, welche in der Mitte der Verbindungslinie der beiden Punkte auf derselben senkrecht steht.

γ) Wird der Radius der einen Kugel Null, d. h. geht die Kugel in einen Punkt über, so ist dieser zugleich innerer und äusserer Ähnlichkeitspunkt von Punkt und Kugel. Sucht man die Polare dieses Punktes hinsichtlich der gegebenen Kugel, so wird eine von dieser und dem Punkte gleichweit abstehende Ebene die Potenzebene des Punktes und der Kugel sein. Denn ist P der gegebene Punkt, P' ein beliebiger Punkt seiner Polare, M und M' die Durchschnittspunkte der Geraden PP' mit der Kugel, Q der Halbirungspunkt von PP'; so ist, weil die vier Punkte

$$P, P', M, M'$$

harmonische Punkte sind, bekanntlich

$$\overline{QP}^2 = \overline{QP'}^2 = QM.QM'.$$

Da nun $\overline{QP}^2$ die Potenz des Punktes Q für den Punkt P (dieser als Kugel betrachtet) ist, so sind die Potenzen des Punktes Q für den Punkt und die Kugel einander gleich, d. h. der Punkt Q ist ein Punkt der Potenzebene des gegebenen Punktes und der Kugel. Alle Punkte Q liegen auf einer zur Polare parallelen Ebene, deren Abstand von Punkt und Polare gleich ist.

δ) Die Ähnlichkeitspunkte einer Ebene und einer Kugel sind die Endpunkte des auf der Ebene senkrecht stehenden Durchmessers der Kugel. Welchen von diesen Punkten man für den inneren oder äusseren Ähnlichkeitspunkt erklärt, ist willkürlich; man kann nämlich den Mittelpunkt der Ebene (diese als Kugelfläche betrachtet) auf beiden Seiten der Ebene im Unendlichen annehmen.

Der äussere und innere Ähnlichkeitspunkt eines Punktes und einer Ebene ist der Punkt selbst.

ε) Als Potenzebene einer Ebene und Kugel kann die Ebene selbst betrachtet werden.

3. Sind drei Kugeln O_0, O_1, O_2 gegeben, so erhält man für diese drei äusseren und drei inneren Ähnlichkeitspunkte, welche in der Ebene der Mittelpunkte der drei Kugeln liegen. Diese sechs Ähnlichkeitspunkte liegen bekanntlich folgendermassen auf vier Geraden, welche Symmetralen heissen:

$$A_{0,1},\ A_{0,2},\ A_{1,2}$$
$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ A_{1,2}$$
$$J_{0,1},\ A_{0,2},\ J_{1,2}$$
$$A_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{1,2}.$$

Die erste Gerade heisst äussere Symmetrale, die übrigen drei werden innere Symmetralen genannt

---

4. Bei vier Punkten erhält man sechs äussere und sechs innere Ähnlichkeitspunkte, diese Punkte liegen in folgender Anordnung auf acht Ebenen.

$$A_{0,1},\ A_{0,2},\ A_{0,3},\ A_{1,2},\ A_{1,3},\ A_{2,3}$$
$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{0,3},\ A_{1,2},\ A_{0,3},\ A_{2,3}$$
$$J_{0,1},\ J_{1,2},\ J_{1,3},\ A_{0,2},\ A_{0,3},\ A_{2,3}$$
$$J_{0,2},\ J_{1,2},\ J_{2,3},\ A_{0,1},\ A_{0,3},\ A_{1,3}$$
$$J_{0,3},\ J_{1,3},\ J_{2,3},\ A_{0,1},\ A_{0,2},\ A_{1,2}$$
$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{1,3},\ J_{2,3},\ A_{0,3},\ A_{1,2}$$
$$J_{0,1},\ J_{0,3},\ J_{1,2},\ J_{2,3},\ A_{0,2},\ A_{1,3}$$
$$J_{0,2},\ J_{0,3},\ J_{1,2},\ J_{1,3},\ A_{0,1},\ A_{2,3}$$

Die erste Ebene, welche die sechs äusseren Ähnlichkeitspunkte enthält, soll äussere Symmetralebene genannt werden, die vier folgenden Ebenen, welche drei äussere und drei innere Ähnlichkeitspunkte enthalten, sollen mittlere Symmetralebenen und endlich die drei letzten Ebenen, in welchen vier innere und zwei äussere Ähnlichkeitspunkte liegen, sollen innere Symmetralebenen genannt werden. Man beweiset die Richtigkeit dieser Lagen der Ähnlichkeitspunkte in den erwähnten acht Ebenen, indem man beachtet, dass immer je sechs solche Punkte auf drei oder vier Geraden liegen, von

denen jede die übrigen schneidet, z. B. von den vier äusseren Symmetrallinien:

$$A_{0,1},\ A_{0,2},\ A_{1,2}$$
$$A_{0,1},\ A_{0,3},\ A_{1,3}$$
$$A_{0,2},\ A_{0,3},\ A_{2,3}$$
$$A_{1,2},\ A_{1,3},\ A_{2,3}$$

schneidet jede die drei anderen, also müssen diese vier Geraden in einer Ebene liegen, daher sind die sechs äusseren Ähnlichkeitspunkte in einer Ebene enthalten.

Eben so schneiden sich die inneren Symmetralen:

$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ A_{1,2}$$
$$J_{0,1},\ J_{0,3},\ A_{1,3}$$
$$J_{0,2},\ J_{0,3},\ A_{2,3}$$

gegenseitig, folglich liegen die Punkte

$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{0,3},\ A_{1,2},\ A_{1,3},\ A_{2,3}$$

in einer Ebene.

Auf ähnliche Art wird der Beweis für die übrigen Ebenen geführt.

---

5. Werden zwei Kugeln O und O_1 von zwei Kugeln M und M_1 zugleich gleichartig oder ungleichartig berührt, so gehen die Geraden, welche die Berührungspunkte verbinden, durch denselben Ähnlichkeitspunkt, und dieser ist zugleich ein Punkt der Potenzebene von M und M_1. Eben so geht die Potenzebene von O und O_1 durch denselben Ähnlichkeitspunkt von M und M_1. Denn die Berührungspunkten von M mit O und O_1 sind Ähnlichkeitspunkte von M und O, und von M und O_1, und zwar der innere oder äussere je nachdem die Berührung eine äussere oder innere ist. Bei gleichartiger Berührung von M mit O und O_1 geht die Gerade durch die beiden Berührungspunkte durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt von O und O_1, bei ungleichartiger durch den inneren. Sind daher B, B_1 die Berührungspunkte von M mit O und O_1, eben so B', B_1' die Berührungs-

punkte von M_1 mit O und O_1, ferner X der Ähnlichkeitspunkt, durch welchen die Sehnen BB_1 und $B'B'_1$ gehen, so ist

$$XB.XB_1 = XB'.XB'_1,$$

also X ein Punkt der Potenzebene von M und M_1. Eben so wird bewiesen, dass die Potenzebene von O und O_1 durch denselben Ähnlichkeitspunkt von M und M_1 geht; denn die Geraden BB', $B_1B'_1$ gehen durch denselben Ähnlichkeitspunkt von O und O_1 etwa Y und für diesen ist wieder

$$YB.YB' = YB_1.YB'_1,$$

d. h. Y ein Punkt der Potenzebene von O und O_1.

Zusatz. Werden die Radien der Kugeln O und O_1 unendlich, d. h. gehen die Kugeln in Ebenen über, so enthält die Ebene, welche den Neigungswinkel der beiden ersteren halbirt, die Mittelpunkte aller Kugeln M, M_1, welche beide Ebenen berühren. Diese Ebene kann man gleichsam als Potenzebene der beiden gegebenen ansehen. Die Gerade, welche die Berührungspunkte einer Kugel mit den Ebenen verbindet, ist parallel mit der Halbirungsebene des zweiten (mit dem ersten suplementären) Winkels, welchen beide Ebenen bilden. In dieser Ebene kann man den Ähnlichkeitspunkt der beiden Ebenen liegend annehmen, durch welchen die Geraden durch die Berührungspunkte gehen. Wie man ersieht, kann man bei zwei Ebenen jede der beiden Halbirungsebenen des Winkels der beiden Ebenen als Potenzebene ansehen, die Ähnlichkeitspunkte können dann immer als in der zweiten Halbirungsebene liegend angesehen werden. Bei drei Ebenen kann man den Durchschnittspunkt derselben als Potenzcentrum ansehen, jeder die Neigungswinkel der Ebenen halbirende Ebenen als die drei Potenzebenen, die drei übrigen Ebenen, welche die den drei ersten suplementären Winkel halbiren, als durch dieselben Ähnlichkeitspunkte gehend.

Berührungsaufgabe.

Aufgabe: Eine Kugel zu beschreiben, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Analysis. Berührt die Kugel M die vier gegebenen Kugeln

$$O_0, O_1, O_2, O_3$$

von aussen, die Kugel M' dieselben von innen, und bezeichnet man die Berührungspunkte der Kugel M mit den gegebenen mit

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,$$

die Berührungspunkte von M' mit den gegebenen Kugeln mit

$$B_0',\ B_1',\ B_2',\ B_3',$$

so ergibt sich folgendes:

1. O_0, O_1, O_2, O_3 berühren M von aussen, M' von innen; also gehen die Sehnen

$$B_0B',\ B_1B_1',\ B_2B_2',\ B_3B_3'$$

durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von M und M'.

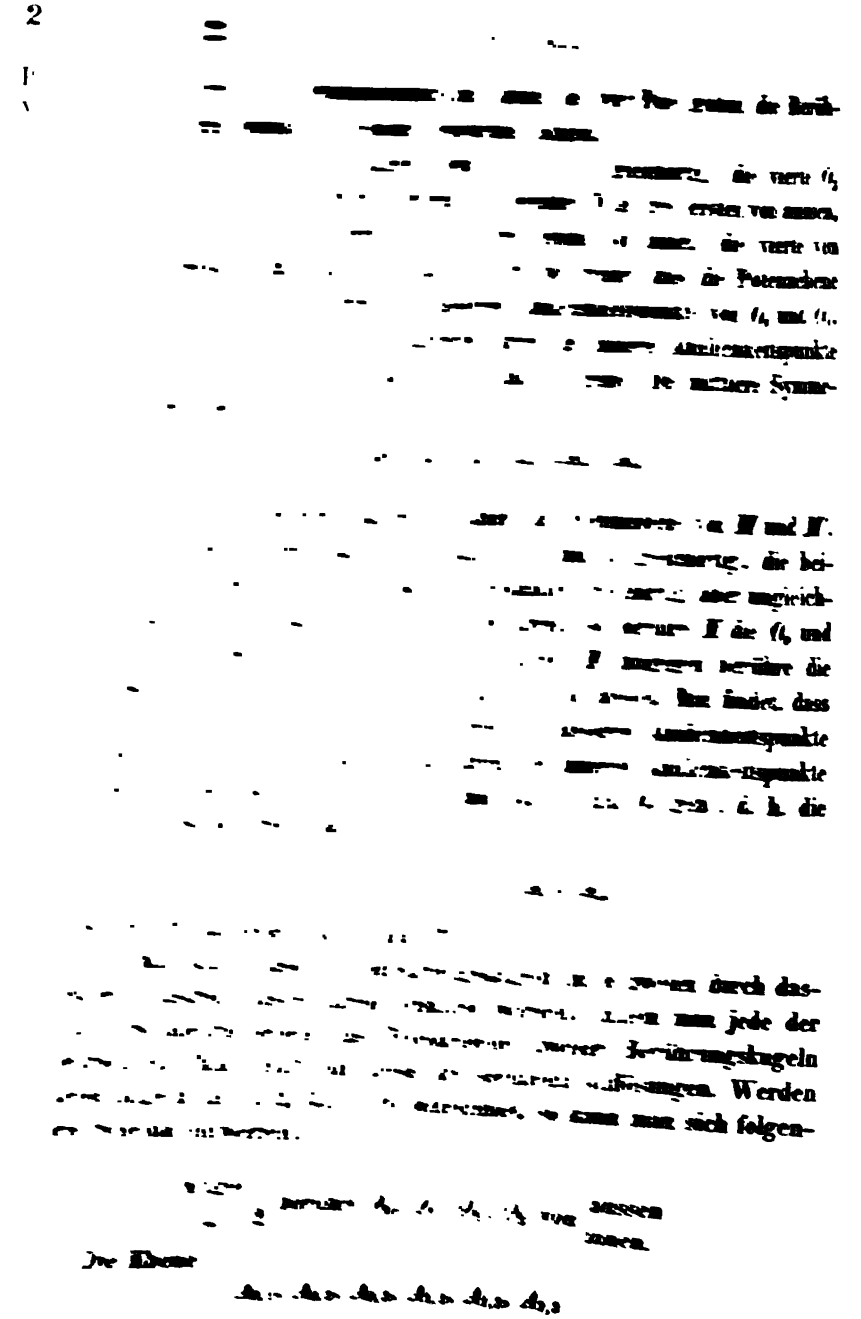
2. Die Potenzebenen von O_0 und O_1, O_0 und O_2, O_0 und O_3, O_1 und O_2, O_1 und O_3, O_2 und O_3 gehen durch den inneren Ähnlichkeitspunkt von M und M'; d. h. das Potenzcentrum der vier Kugeln O_0, O_1, O_2, O_3 ist der innere Ähnlichkeitspunkt von M und M'.

3. $\begin{matrix} M \\ M' \end{matrix}$ berührt O_0 von $\begin{matrix} \text{aussen} \\ \text{innen,} \end{matrix}$ O_1 von $\begin{matrix} \text{aussen} \\ \text{innen.} \end{matrix}$

Die Potenzebene von M und M' geht daher durch den äusseren Ähnlichkeitspunkt von O_0 und O_1. Eben so wird bewiesen, dass die Potenzebene von M und M' durch die äusseren Ähnlichkeitspunkte von O_0 und O_2, O_0 und O_3, O_1 und O_2, O_2 und O_3 geht; d. h. die äussere Symmetralebene der vier gegebenen Kugeln ist die Potenzebene der Kugel M und M'.

4. Die Berührungsebenen in B_0 und B_0' sind zugleich die Potenzebenen von O_0 und M, O_0 und M'. Die drei Potenzebenen von O_0, M und M' schneiden sich in einer Geraden, oder der Durchschnitt der Berührungsebenen von B_0 und B_0' liegt in der Potenzebene von M und M'. Diese Durchschnittslinie ist aber die polarreciproke Gerade zur Geraden $B_0\ B_0'$, letztere muss daher den Pol der Potenzebene von M und M' hinsichtlich der Kugel O_0 enthalten. Ähnliches gilt auch von den Sehnen B_1B_1', B_2B_2', B_3B_3'.

Wir erhalten daher für die Construction der Kugeln M und M' folgendes Verfahren: Um die Kugeln zu finden, welche vier gegebene Kugeln von aussen und innen berühren, bestimme man das Potenzcentrum der vier gegebenen Kugeln und die äussere Symmetralebene, suche zu dieser für jede der vier Kugeln den Pol. Die vier Geraden



ist Potenzebene der Kugeln 1 und 2.

Kugel 3 / „ 4 berührt O_0, O_1, O_2 von aussen / innen O_3 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,3},\ J_{1,3},\ J_{2,3},\ A_{0,1},\ A_{0,2},\ A_{1,2}$$

ist Potenzebene von 3 und 4.

Kugel 5 / „ 6 berührt O_0, O_1, O_3 von aussen / innen O_2 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,2},\ J_{1,2},\ J_{2,3},\ A_{0,1},\ A_{0,3},\ A_{1,3}$$

ist Potenzebene von 5 und 6.

Kugel 7 / „ 8 berührt O_0, O_2, O_3 von aussen / innen O_1 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,1},\ J_{1,2},\ J_{1,3},\ A_{0,2},\ A_{0,3},\ A_{2,3}$$

ist Potenzebene von 7 und 8.

Kugel 9 / „ 10 berührt O_1, O_2, O_3 von aussen / innen O_0 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{0,3},\ A_{1,2},\ A_{1,3},\ A_{2,3}$$

ist Potenzebene von 9 und 10.

Kugel 11 / „ 12 berührt O_0, O_1 von aussen / innen O_2, O_3 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,2},\ J_{0,3},\ J_{1,2},\ J_{1,3},\ A_{0,1},\ A_{2,3}$$

ist Potenzebene von 11 und 12.

Kugel 13, „ 14 berührt O_0, O_3 von aussen / innen O_1, O_2 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{1,2},\ J_{2,3},\ A_{0,2},\ A_{1,3}$$

ist Potenzebene von 13 und 14.

Kugel 15, „ 16 berührt O_0, O_3 von aussen / innen O_1, O_2 von innen / aussen.

Die Ebene

$$J_{0,1},\ J_{0,2},\ J_{1,3},\ J_{2,3},\ A_{0,3},\ A_{1,2}$$

ist Potenzebene der Kugeln 15 und 16.

Aus dem Ganzen ersieht man, dass diese Lösung der Berührungsaufgabe die Kugel auf den Punkt reducirt. Sind statt einer oder mehrerer Kugeln Punkte oder Ebenen gegeben, so werden die noch übrigen Kugeln durch ein ähnliches Verfahren auf Punkte reducirt.

1. Es seien drei Punkte P_0, P_1, P_2 und eine Kugel O_3 gegeben, man construire eine Kugel, welche durch die drei Punkte geht und die gegebene Kugel berührt. Die drei Punkte sind die inneren und äusseren Ähnlichkeitspunkte von P_0, O_3; P_1, O_3; P_2, O_3; die Ebene durch dieselben ist die einzig mögliche Symmetralebene. Man bestimme für die drei gegebenen Punkte und für die Kugel auf bekannte Weise das Potenzcentrum, hierauf den Pol der obigen Symmetralebene hinsichtlich der Kugel, so bestimmt die Gerade durch diesen und das Potenzcentrum auf der gegebenen Kugel die Berührungspunkte. Da nur eine Symmetralebene möglich ist, erhält man zwei Lösungen.

2. Es seien zwei Punkte P_0, P_1 und zwei Kugeln O_2, O_3 gegeben. P_0 ist äusserer und innerer Ähnlichkeitspunkt von P_0 und O_2, P_0 und O_3; P_1 ist äusserer und innerer Ähnlichkeitspunkt von P_1 und O_2, P_1 und O_3; die Mitte der Distanz P_0, P_1 ist innerer, der unendlich entfernte Punkt der Geraden P_0, P_1 ist äusserer Ähnlichkeitspunkt von P_0 und P_1. Man erhält folgende zwei verschiedene Symmetralebenen

$$P_0,\ P_1,\ A_{2,3}$$
$$P_0,\ P_1,\ J_{2,3}$$

die übrigen Symmetralebenen sind von diesen beiden Ebenen nicht verschieden.

Man bestimme nun das Potenzcentrum für die beiden Punkte und Kugeln, hierauf die Pole der beiden Symmetralebenen hinsichtlich der beiden Kugeln O_3 und O_4, diese mit dem Potenzcentrum verbunden geben auf jeder Kugel vier Berührungspunkte.

3. Gegeben ein Punkt P_0, und drei Kugeln O_1, O_2 und O_3. Da der Punkt P_0 äusserer und innerer Ähnlichkeitspunkt von P_0 und den drei gegebenen Kugeln ist, so erhält man folgende vier verschiedenen Symmetralebenen:

$$P_0,\ A_{1,2},\ A_{1,3},\ A_{2,3}$$
$$P_0,\ J_{1,2},\ J_{1,3},\ A_{2,3}$$
$$P_0,\ J_{1,2},\ J_{2,3},\ A_{1,3}$$
$$P_0,\ J_{1,3},\ J_{2,3},\ A_{1,2}.$$

Für jede dieser Symmetralebenen erhielt man auf jeder der drei gegeben Kugeln zwei Berührungspunkte, also im Ganzen acht Auflösungen.

4. Gegeben drei Ebenen E_0, E_1, E_2 und eine Kugel O_3. Zieht man vom Mittelpunkte der Kugel O_3 Senkrechte auf die drei Ebenen, so bilden die Endpunkte der Durchmesser, welche auf diesen Senkrechten liegen, die äusseren und inneren Ähnlichkeitspunkte der Kugel und der drei Ebenen.

Es seien

$$A_{0,3},\ A_{1,3},\ A_{2,3}$$
$$J_{0,3},\ J_{1,3},\ J_{2,3}$$

diese Ähnlichkeitspunkte, wobei $A_{0,3}$, $J_{0,3}$ die Endpunkte des Durchmessers sind, welcher auf der Ebene E_0 senkrecht steht.

Man erhält acht Symmetralebenen, diese bilden ein in die Kugel einbeschriebenes Oktaëder, je zwei gegenüber liegende Seitenflächen sind parallel; die in den Ähnlichkeitspunkten errichteten Berührungsebenen sind die Polaren derselben. Diese Polaren bilden ein um die Kugel beschriebenes Parallelepiped. Die acht Ecken dieser Figur sind wieder die Pole der acht Symmetralebenen. Die Ecken dieses Parallelepipedes mit dem Durchschnittspunkte der drei gegebenen Ebenen, welcher als Potenzcentrum angesehen werden kann, verbunden, geben die sechzehn Berührungspunkte der gesuchten Kugeln mit der Kugel

O_3. Liegt der Durchschnittspunkt der drei Ebenen im Innern der Kugel O_3, so sind alle sechzehn Lösungen möglich.

5. Gegeben sind zwei Ebenen, E_0, E_1 und zwei Kugeln O_2, O_3. Man suche die Ähnlichkeitspunkte der Kugeln mit einander und mit den Ebenen, wodurch man acht Symmetralebenen erhält.

Die Berührungspunkte der gesuchten Kugeln mit den beiden gegebenen werden auf ganz dieselbe Weise wie bei der allgemeinen Berührungsaufgabe erhalten.

6. Sind eine Ebene und drei Kugeln gegeben, so erhält man wieder die Berührungspunkte der gesuchten Kugeln mit den gegebenen, wie bei der allgemeinen Berührungsaufgabe.

Auf dieselbe Weise werden die Berührungspunkte der gegebenen Kugeln mit den gesuchten Kugeln bei folgenden Aufgaben bestimmt:

7. Gegeben sind zwei Punkte, eine Ebene und eine Kugel.

8. Ein Punkt, zwei Ebenen und eine Kugel.

9. Ein Punkt, eine Ebene und zwei Kugeln. Man sucht das Potenzcentrum der gegebenen Figuren, ihre Symmetralebenen, die Pole der Symmetralebenen hinsichtlich der gegebenen Kugeln; so bestimmen die Verbindungslinien dieser Punkte mit dem Potenzcentrum auf den gegebenen Kugeln die gesuchten Berührungspunkte. Die Bestimmung der Berührungspunkte einer Ebene, ist durch das allgemeine Constructionsverfahren nicht möglich. Der Grund liegt darin, weil es keinen construirbaren Pol einer Ebene hinsichtlich einer gegebenen Ebene (diese nämlich als Kugel mit unendlichem Radius betrachtet) gibt. Die Polaren der verschiedenen Punkte einer Ebene hinsichtlich einer gegebenen Ebene sind parallel zu dieser Ebene, der Durchschnittspunkt der Polaren, welcher der Pol der ersten Ebene ist, liegt daher im Unendlichen. Doch hat die Bestimmung der Berührungspunkte der gesuchten Kugeln mit den gegebenen Ebenen keine Schwierigkeit. Der Vollständigkeit halber wollen wir auch noch die hieher gehörigen Aufgaben lösen. Hat man bereits für die gegebenen Kugeln die Berührungspunkte ermittelt, so sind noch folgende Aufgaben zu lösen: Gegeben sind

1. Drei Punkte und eine Ebene.
2. Zwei Punkte und zwei Ebenen.
3. Ein Punkt und drei Ebenen.
4. Vier Ebenen.

Auflösung von 1. Durch die drei Punkte lege man einen Kreis, errichte im Mittelpunkte desselben eine Senkrechte, so liegt auf derselben der Mittelpunkt der gesuchten Kugel, durch diese senkrechte Gerade lege man eine auf der gegebenen Ebene senkrechte Ebene; so liegt im Durchschnitte der beiden Ebenen der gesuchte Berührungspunkt. Bestimmt man nun auf dieser Geraden den Berührungspunkt des Kreises, welcher durch die zwei Durchschnittspunkte des Kreises durch die gegebenen Punkte mit der senkrechten Ebene geht und obige Gerade berührt, so ist dieser Berührungspunkt der gesuchte Punkt.

Zu 2. Halbirt man den Neigungswinkel der beiden Ebenen und zieht man von einem der beiden gegebenen Punkte eine Senkrechte auf die Halbirungsebene, und verlängert dieselbe um die Entfernung des Punktes von der Halbirungsebene, so ist der Endpunkt dieser Senkrechten ein Punkt der gesuchten Kugel.

Zu 3. Wird auf ähnliche Art auf 2. reducirt.

Zu 4. Die Halbirungsebene der Neigungswinkeln der Ebenen enthalten den Mittelpunkt der gesuchten Kugel, dieser kann daher durch den Durchschnitt dreier Ebenen bestimmt werden.

Beiträge zur Kenntniss der Krystallformen organischer Verbindungen (III).

Von **J. Loschmidt.**

(Mit 1 Tafel.)

Bernsteinsaurer Harnstoff. $C_4H_6O_4 + 2CH_4N_2O$. Hlasiwetz.

Zwei- und eingliederig (monoclin). $a:b:c = 1{\cdot}483:1:1{\cdot}3646$. $0 = 83°28'$.

Die schönen glasglänzenden Krystalle bilden sechsseitige Säulen, bestehend aus dem ersten Paare p und der Hexaïdfläche a. Meist tritt noch sehr untergeordnet $\frac{1}{2}p$ hinzu, als schwache Abstumpfung der Kante ap.

An den Enden herrscht vor das hintere Augitpaar 20′. Hierzu kommt gewöhnlich die Schiefendfläche r', seltener und sehr untergeordnet, die Hexaïdfläche c und eine einzelne Fläche eines vorderen Augitpaares.

Die Flächen am Ende des Krystalles sind meist unvollzählig, und nie findet man beide Enden übereinstimmend ausgebildet.

Spaltbarkeit: unvollkommen nach 20′. (Fig. 1.)

Flächen:

$a =$	a	$: \infty b$	$: \infty c$	$= 100$
$c = \infty$	a	$: \infty b$	$: c$	$= 001$
$p =$	a	$: b$	$: \infty c$	$= 110$
$\frac{1}{2}p =$	$\frac{1}{2}a$	$: b$	$: \infty c$	$= 210$
$r' =$	a'	$: \infty b$	$: c$	$= \bar{1}01$
$20' =$	$2a'$	$: b$	$: c$	$= \bar{1}22$

	Berechnet	Beobachtet
$a : c$	=	96°32′*
$p : p$ an a	=	68°20′*
$a : r'$	=	129° 4′*
$p : \frac{1}{2}p$	= 160°33′	160°20′
$a : 20'$	= 101°38′	101°30′
$c : 20'$	= 123°31′	123°15′
$20' : 20'$	= 75°38′	75°30′

Fumarsaurer Harnstoff $C_4H_4O_4+2CH_4N_2O$.

Zwei- und eingliederig (monoclin). $a:b:c=1\cdot5877:1:1\cdot3688$. $0=71°46'$.

Flache sechsseitige glasglänzende Prismen, gebildet aus der vorherrschenden Hexaïdfläche a und dem ersten Paare p. Oft tritt noch untergeordnet $\frac{1}{2}p$ hinzu. An den Enden tritt ausschliesslich und vollzählig auf das zweite Paar q.

Spaltbarkeit: nicht deutlich vorhanden. (Fig. 2.)

Flächen: $a = a:\infty b:\infty c = 100$
$p = a: b:\infty c = 110$
$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a: b:\infty c = 210$
$q = \infty a: b: c = 011$

	Berechnet	Beobachtet
p: p an a =		67° 6'*
q: q an c =		75° 8'*
a: q =		101°*
$p:\frac{1}{2}p$ =	160°42'	160°40'
p: q =	140°	139°22'

Das Salz ward dargestellt durch Mischen von 1 Äquivalent Fumarsäure, erhalten durch Destillation von Äpfelsäure, und 2 Äquivalent Harnstoff.

	Berechnet	Gefunden
C	30·51 Pct.	30·46 Pct.
H	5·08 „	5·32 „

Maleïnsaurer Harnstoff (saurer). $C_4H_4O_4+CH_4N_2O$.

	Berechnet	Gefunden
C	= 34·10 Pct.	33·93 Pct.
H	= 4·54 „	4·70 „

Zwei- und eingliederig (monoclin). $a:b:c=0\cdot61988:1:0\cdot40948$.
$0=89°20'$.

Die kurzen dicken Säulen sind Combinationen der Hexaïdfläche b, des zweiten Paares q und der Schiefendfläche r^2. Eine Kante br^2 wird zuweilen abgestumpft durch eine Fläche des vorderen Augitpaares $6o^{12}$. Nur selten und untergeordnet erscheint das hintere Augitpaar o'.

Spaltbarkeit: parallel zu q. (Fig. 3.)

Flächen:	$b = \infty a$:	$b : \infty c = 010$	
	$q = \infty a$:	b : $c = 011$	
	$r^3 = a$:	∞b : $2c = 201$	
	$o' = a'$:	b : $c = \bar{1}11$	
	$6o^{12} = 6a$:	b : $12c = 2,12,1$	

	Berechnet	Beobachtet
$b : q$	=	112°16'*
$q : r^3$	=	124°20'*
$o' : o'$	=	142°20'*
$b : 6o^{12}$	= 161°16'	161°
$r : 6o^{12}$	= 108°44'	= 109°

Auffallend ist die nahe krystallographische Verwandtschaft dieses sauren Salzes mit dem neutralen oxalsauren Harnstoff.

Der neutrale „Maleïnsaure Harnstoff" — $C_4H_4O_4 + 2CH_4N_2O$ wird erhalten durch Zusammenbringen der Säure mit überschüssigem Harnstoff. Man erhält so etwas schwierig rectanguläre Säulen des monoclinen Systems, deren Kanten durch die Prismenflächen p schwach abgestumpft sind.

Die letzteren sind stark gestreift und gestatten keine genaue Messung. Ungefähr ergab sich $b : p = 109°$.

Das Ende bildete eine Schiefendfläche r, welche mit a einen Winkel von 120 macht. Parallel zu r findet vollkommene Spaltbarkeit statt.

Die Analyse gab: C 30·38 Pct., berechnet C 30·51 Pct.
H 5·35 „ „ H 5·08 „

Äpfelsaurer Harnstoff (saurer). $C_4H_6O_5 + CH_4N_2O$.

Berechnet	Gefunden
C 31·40 Pct.	31·02 Pct.
H 5·23 „	5·38 „

Zwei- und eingliederig (monoclin). $a : b : c = 1·7113 : 1 : 1·5632$.
$0 = 74°50'$.

Die schönen Krystalle sind sechsseitige Tafeln von diamantartigem Glasglanz. Sie sind Combinationen der vorherrschenden Hexaïdfläche a, des hinteren Augitpaares o', dessen vier Flächen die längeren Seiten des Sechseckes begrenzen, während die kürzeren Seiten

desselben oben und unten durch die Hexaïdfläche *c* gebildet werden. Die Kante *ac* wird durch die vordere Schiefendfläche *r* abgestumpft. Diese Fläche erlangt manchmal dieselbe Ausdehnung wie *a*, während *c* ganz wegfällt. Oft tritt sehr untergeordnet eine einzelne Fläche des ersten Paares $\frac{1}{2}p$ hinzu.

Spaltbarkeit: sehr vollkommen nach *r*. (Fig. 4.)

Flächen: $a = a : \infty b : \infty c = 100$
$c = \infty a : \infty b : c = 001$
$r = a : \infty b : c = 101$
$o' = a' : b : c = \bar{1}11$
$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a : b : \infty c = 210$

	Berechnet	Beobachtet
$a : o'$ =		70°*
$a : r$ =		141°20'*
$o' : o'$ über r' =		75°20'*
$a : c$ =	105°10'	105°20'
$a : \frac{1}{2}p$ =	140°27'	140°20'
$c : o'$ =	113°32'	113° 4'
$r : o'$ =	93°16'	93° 4'

Tartersaurer Harnstoff. $C_4H_6O_6 + 2CH_4N_2O$.

Berechnet	Gefunden
C 26·67 Pct.	26·98 Pct.
H 5·19 „	5·56 „

Zweigliederig (isoclin). $a : b : c = 1·409 : 1 : 0·9736$.

Sechsseitige Prismen, gebildet aus der vorherrschenden Hexaïdfläche *a* und dem ersten Paare *p*. Oft tritt noch untergeordnet die Hexaïdfläche *b* hinzu, als schwache Abstumpfung der stumpferen Kante *pp*. Das Ende wird gebildet durch die Flächen des zweiten Paares *q* und die des Rhombenoktaëders *o*. Letztere sind nie vollzählig.

Spaltbarkeit: unvollkommen nach *b*.

Flächen: $a = a : \infty b : \infty c = 100$
$b = \infty a : b : \infty c = 010$
$p = a : b : \infty c = 110$
$q = \infty a : b : c = 011$
$o = a : b : c = 111$

Berechnet	Beobachtet
$p:p$ an $a=$	70°44'*
$q:q$ an $c=$	91°32'*
$o:p=140°\ 3'$	140° 4'
$o:q=153°40'$	154°12'
$p:q=124°40'$	124°40'

Parabansaurer Harnstoff. $C_3H_2N_2O_3+CH_4N_2O$. (Hlasiwetz.)

Zweigliederig (isoclin). $a:b:c=0{\cdot}7888:1:0{\cdot}98613$.

Spröde vierseitige Tafeln, gebildet aus der vorherrschenden Hexaïdfläche b, den Flächen des ersten Paares p und des zweiten Paares q, welche die Seiten des Viereckes begrenzen.

Spaltbarkeit: nicht deutlich vorhanden.

Flächen: $b=\infty a:b\infty c=010$
$p=\ a:b\infty c=110$
$q=\infty a:b\ :\ c=011$

Berechnet	Beobachtet
$b:p=$	128°16'*
$b:q=$	134°36'*
$p:q=115°46'$	115°30'

Gallussaurer Harnstoff. $C_7H_6O_5+CH_4N_2O$. (Hlasiwetz.)

Zwei- und eingliederig (monoclin). $a:b:c=1{\cdot}0384:1:0{\cdot}9958$. $0=70°57'$.

Die bernsteingelben Krystalle sind spröde und bröcklich, meist unvollkommen ausgebildet. Sie bilden vierseitige, fast rechtwinkelige Säulen p, an den Enden begrenzt von der Hexaïdfläche c und dem zweiten Paare q.

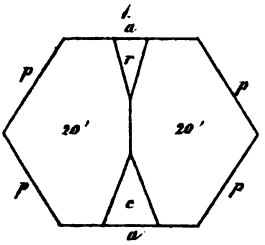
Ausserdem Spuren eines hinteren Augitpaares.

Ohne deutliche Spaltbarkeit. (Fig. 5.)

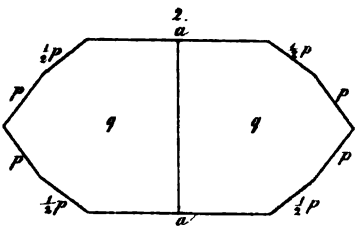
Flächen: $c=\infty a:\infty b:\ \ c=001$
$p=\ a:\ \ b:\infty c=110$
$q=\infty a:\ \ b:\ \ c=011$

Berechnet	Beobachtet
$p:p$ an $a=$	91° 4'*
$p:c\ \ =$	103°28'*
$q:q$ an $c=$	93°28'*
$p\,.\,q=130°31'$	130°14'
$q:c=136°44'$	136°40'

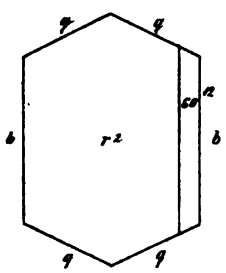
1.



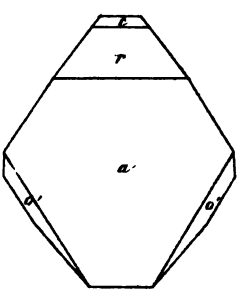
2.



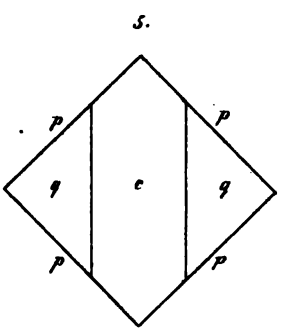
3.



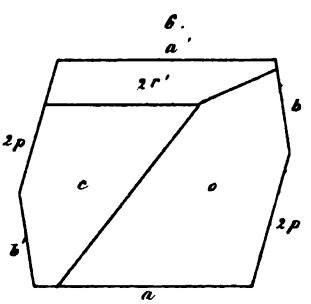
4.



5.



6.



A. a. d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei

Citronensaurer Harnstoff. $C_6H_8O_7+2CH_4N_2O$.

Berechnet	Gefunden
C 30·77 Pct.	30·50 Pct.
H 5·13 „	5·32 „

Eingliederig (triclin). $a:b:c=1\cdot0986:1:0\cdot94407$.

$ac=84°44'$
$ab=82°11'$
$bc=74°24'$

Die schönen glasglänzenden Krystalle sind sechsseitige Säulen, Combinationen der Hexaïdflächen a und b mit einem Flächenpaare des ersten Paares $2p$. Vorwaltend ist a. Am Ende herrscht vor die Hexaïdfläche c. Die Kante $a'c$ wird durch eine Fläche des dritten Paares $2r'$ abgestumpft. Dazu kommt noch eine Augitfläche o.

Spaltbarkeit: vollkommen nach c. (Fig. 6.)

Flächen:
$a=a:\infty b:\infty c=100$
$b=\infty a:b:\infty c=010$
$c=\infty a:\infty b:c=001$
$2p=2a:b:\infty c=120$
$2r'=2a':\infty b:c=\bar{1}02$
$o=a:b:c=111$

Winkel der Flächenträger.

Berechnet	Beobachtet
(100) (010) =	96°40'*
(100) (001) =	93°20'*
(010) (001) =	105° 4'*
(100) (111) =	60°20'*
(001) (111) =	58°34'*
(010) (111) = 63°57'	64°
(120) (010) = 24°44'	24°20'
($10\bar{2}$) (100) = 64°31'	65°

XX. SITZUNG VOM 27. JULI 1865.

Wegen Erkrankung des Präsidenten übernimmt Herr Prof. Redtenbacher als Alterspräsident den Vorsitz.

Das c. M., Herr Prof. Dr. A. Rollett in Graz, übersendet eine Abhandlung: „Versuche über thatsächliche und vermeintliche Beziehungen des Blutsauerstoffes".

Das c. M., Herr Prof. Dr. V. Ritter v. Zepharovich in Prag, übermittelt eine Abhandlung: „Krystallographische Mittheilungen aus den chemischen Laboratorien zu Graz und Prag".

Das c. M., Herr Director Dr. K. Jelinek, macht eine Mittheilung über die mit 15. Juni l. J. ins Leben getretene regelmässige meteorologisch-telegraphische Correspondenz für die Zwecke der Schifffahrt im Adriatischen Meere.

Das c. M., Herr Dr. Th. Kotschy, legt eine Abhandlung vor, betitelt: *„Plantae Arabiae in ditionibus Hedschas, Asyr et El Arysch a medico germanico nomine ignoto in El Arysch defuncto annis 1836—1838 collectae"*.

Herr Prof. Dr. J. Redtenbacher überreicht die in seinem Laboratorium ausgeführten Analysen zweier Mineralwässer, und zwar: *a)* die der Therme von Tobelbad bei Graz in Steiermark, von Herrn Dr. E. Ludwig, und *b)* jene der Frauenquelle in Baden, von den Herren k. k. Artillerie-Oberlieutenants Alex. Exner und Gust. Kotrtsch.

Der Secretär Schrötter legt eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der Indiums" vor.

Herr Dr. G. Tschermak übergibt eine vorläufige Mittheilung „Über das Auftreten von Olivin im Augitporphyr und Melaphyr".

Herr Dr. L. Ditscheiner überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Eine absolute Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen *D*-Linien".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

American Journal of Science and Arts. 2d Series. Vol. XXXIX, Nr. 116—117. New Haven 1865; 8o.

Astronomische Nachrichten, Nr. 1539—1540. Altona, 1865; 4o.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI, Nr. 2. Paris, 1865; 4o.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 31. Wien, 1865; 8o.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 21. Wien, 1865; 4o.

Kreil, Karl, Klimatologie von Böhmen. (Nach dem Tode des Verfassers mit Unterstützung der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien herausgegeben.) Wien, 1865; 8o.

Moniteur scientifique. 206e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4o.

Observatoire Impériale de Paris: Bulletin international. Juillet 1865. Fol.

Reader. Nr. 134, Vol. VI. London, 1865; Fol.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 58—59. Wien, 1865; 4o.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 19. Gratz, 1865; 4o.

Zeitschrift für Chemie etc. von H. Hübner. VIII. Jahrg. N. F. Band I, Hft. 14. Göttingen, 1865; 8o.

Versuche über thatsächliche und vermeintliche Beziehungen des Blutsauerstoffes.

Von Prof. **Alexander Rollett** in Gratz.

(Mit 1 Tafel.)

I. Zur Ermittlung der Verwandtschaften des Blutsauerstoffes.

Frisches aus den Halsgefässen eines Thieres gesammeltes Blut, aus welchem der Faserstoff sogleich ausgeschlagen wird, und welches dabei die bekannte hellrothe Farbe annimmt, verliert diese Farbe innerhalb wenigen Minuten wieder, wenn man es unter Luftabschluss in einer wohlverschlossenen Flasche mit reiner Eisenfeile schüttelt. Es wird dabei dunkel kirschroth. Wird das so behandelte Blut verdünnt, indem man ganz wenig davon in ein mit ausgekochtem Wasser gefülltes und über Quecksilber abgesperrtes geschliffenes viereckiges Glasfläschchen aufsteigen lässt und mit dem Wasser mischt, so sieht man, wenn man das in der Quecksilberwanne befindliche Fläschchen vor den Spalt des Spectroskopes bringt, immer nur den zuerst von Stockes beschriebenen Absorptionsstreifen des reducirten Blutfarbestoffes zwischen *D* und *E* Frauenhofer. Filtrirt man darauf, indem man die Blutlösung aus der Wanne nimmt auf gewöhnliche Weise bei freiem Luftzutritt, so verändert sich die Purpurfarbe des verdünnten Blutes in ein helles Roth und das Filtrat zeigt vor dem Spectroskope die von Hoppe-Seyler beschriebenen zwei Absorptionsstreifen des sauerstoffhaltigen Haemoglobin.

Das unverdünnte beim Schütteln mit Eisenfeile dunkel gewordene Blut wird, wenn man es von der Eisenfeile trennt und in einer flachen Schale an der Luft schwenkt, oder aber wenn man einen Strom von reinem Sauerstoff hindurchleitet, wieder deutlich heller roth. Man kann dem Blute nun neuerdings mit Eisenfeile seinen Sauerstoff entziehen, es durch Schütteln mit Luft wieder hellroth machen u. s. f.; nach mehrmaliger Wiederholung dieser Procedur wird aber das Blut nicht mehr ganz so hell, als es vor dem Schütteln

mit Eisenfeile war und das beruht darauf, dass auch bei langsamen Schütteln mit Eisenfeile etwelche Blutkörperchen mechanisch zerstört werden, so dass das Serum davon sich roth färbt.

Es wäre denkbar, dass die Zerstörung dieser Blutkörperchen nicht den mechanischen Einflüssen allein zuzuschreiben ist, sondern zugleich durch Entziehung des Sauerstoffes mitbedingt ist, weil ja Preyer (Über Bindung und Ausscheidung der Blutkohlensäure etc. d. Bericht, Bd. 49, p. 27) auch in Blut, dem er seinen Sauerstoff dadurch entzog, dass er die Blutgase gegen eine mehrmals gewechselte reine Kohlensäure-Atmosphäre diffundiren liess, oder in dem Blut erstickter Thiere den Zerfall eines Theiles der Blutkörperchen beobachtete.

Allein es ist leicht sich zu überzeugen, dass es in unserem Versuche hauptsächlich der mechanische Einfluss des Schüttelns mit Eisenfeile ist, welcher die Zerstörung einzelner Blutkörperchen bedingt, das Serum färbt sich um so mehr, je heftiger und länger man schüttelt, in demselben Masse färbt sich aber auch das so behandelte Blut beim darauffolgenden Durchleiten von *O* weniger hellroth und zweitens begegnet man constanten Unterschieden in Beziehung auf mechanische Zerstörbarkeit der Blutkörperchen bei dem Blute verschiedener Thiere. So sind die Blutkörperchen des Schweines am leichtesten zerstörbar, widerstandsfähiger die des Hundes, Kaninchens und Ochsen, endlich lässt sich der mechanische Einfluss des Schüttelns durch einen Gegenversuch erweisen, der darin besteht, dass man Blut unter Luftabschluss mit kurz abgebrochenen Asbestfäden, anstatt mit Eisenfeile schüttelt. Es gelingt auf diese Weise bei heftigem und anhaltendem Schütteln Blut vollständig lackfarbig zu machen.

Ich werde diese Veränderung des Blutes auf rein mechanische Einflüsse und die verschiedene Widerstandsfähigkeit der Blutkörperchen gegen dieselben an einem anderen Orte ausführlicher besprechen, hier sei nur noch erwähnt, dass durch Schütteln mit Asbest lackfarbig gemachtes arterielles Blut im auffallenden Lichte auch dunkler roth erscheint als unverändertes arterielles, es verhält sich in dieser Beziehung genau so, wie elektrisirtes oder gefrorenes und wieder aufgethautes oder mit Äther geschütteltes und auf diese Weise lackfarbig gewordenes Blut. Im durchfallenden Lichte erscheinen aber alle nach den angeführten Methoden durchsichtig gemachten

arteriellen Blutproben hellroth im Vergleich mit venösem Blute, dessen Körperchen man zerstört hat. Eine Farbenvergleichung kann nur zwischen lackfarbigem arteriellen und venösem Blute oder unverändertem arteriellen und venösem Blute vorgenommen werden, dann wird man sich überzeugen, dass auch nach der Zerstörung der Blutkörperchen die Farbenunterschiede beider Blutarten fortbestehen, obgleich in beiden die von den intacten Blutkörperchen abhängigen Reflexionserscheinungen fehlen.

Arterielles Blut mit Asbest unter Luftabschluss geschüttelt bis es lackfarbig wird, bleibt arteriell und zeigt die Absorptionsstreifen des *O*haltigen Haemoglobin, niemals wird bei diesem Versuche der Sauerstoff des Blutes aufgezehrt, wie beim Schütteln mit Eisenfeile, wobei, ob nun viele oder nur wenige Blutkörperchen zerstört werden, immer die oben beschriebenen Veränderungen der Farbe und der spectroskopischen Ercheinungen auftreten. Wie schon bemerkt, ist es, wenn möglichst viele Blutkörperchen beim Schütteln mit Eisenfeile intact erhalten werden sollen, nothwendig, das Schütteln langsam vorzunehmen. Bezüglich der Zusammenstellung eines solchen Versuches ist noch anzuführen, dass zuerst defibrinirtes Blut in eine Flasche gebracht wird, so dass eben noch der Raum für die Eisenfeile frei bleibt, diese wird dann langsam eingetragen, durch Umrühren und Aufstossen auf den Boden treibt man sodann die Luftblasen gegen die Mündung der Flasche zusammen, endlich füllt man durch ein in die Flüssigkeit eingeführtes Glasröhrchen mit Vermeidung von Luftblasen neues Blut nach, bis aller Schaum durch Überfliessen entfernt ist, die bis zum Überfliessen gefüllte Flasche wird dann luftdicht durch einen guten Kork oder besser mit einer Kautschukkappe geschlossen und das Schütteln vorgenommen. Die Farbenveränderung tritt um so schneller ein, je ausgedehnter die Berührung zwischen Metall und Blut ist, also je mehr man von der Eisenfeile anwendet, reicht dieselbe, am Boden der Flasche liegend, etwa bis zum achten Theil der Höhe des cylindrischen Gefässes, dann erfolgt bei mässig starkem Schütteln und gewöhnlicher Temperatur die Reduction in längstens 30 Minuten.

Für die Untersuchung der Veränderung der Absorptionsstreifen kann man sich auch sofort einer Blutlösung bedienen, die man erhält durch Verdünnen von Blut mit so viel Wasser, dass bei der Dicke der vor den Spalt des Spectroskopes zu bringenden Schichte

die Absorptionsstreifen des *O*haltigen Haemoglobin sowohl gegen den zwischen ihnen liegenden Abschnitt des Spectrums, als auch gegen das von *D* und *E* Frauenhofer nach beiden Enden des Spectrums hin liegende Licht deutlich sich hervorhebend auftreten.

Man kann die Blutlösung direct in vierseitigen geschliffenen Fläschchen auf die angegebene Weise mit Eisenfeile schütteln und nach dem Absetzen vor den Spalt stellen, oder aber man kann sie sofort filtriren. Das letztere muss unter Luftabschluss stattfinden. Ich benützte zu dem Zwecke das in Figur I abgebildete Heberfiltrum.

a b ist eine weite Glasröhre, über deren oberes Ende Leinewandstücke von verschiedener Dichte gespannt werden können. Mit diesem Ende steckt die Röhre in einem luftdichten dickwandigen Kautschukschlauch *e f g h* in dem anderen Ende des Schlauches steckt ein wohl verlackter, an der unteren Seite konisch ausgedrehter Holzpfropf *k*, durch dessen Axe ein dünnes Glasröhrchen *e* gesteckt ist; dieses Röhrchen steht mit einem langen, dickwandigen Kautschukschlauche *m n* von sehr engem Lumen in Verbindung. An dem Ende dieses Schlauches befindet sich das Fläschchen *o*, welches parallele geschliffene Wandungen besitzt, der Boden des Fläschchens mündet in das Glasröhrchen *p*, welches durch einen engen dickwandigen Kautschukschlauch in Verbindung mit dem ausgezogenen Röhrchen *q* steht. Alle Theile des Apparates müssen vollständig luftdicht und die Enden der Kautschukschläuche fest aufgebunden sein.

Die Röhre *a b* wird mit der Mündung *b* nach oben in eine Klemme gelegt und eben so das Fläschchen *o* mit dem Boden nach oben, so dass man zwei durch den *v*förmigen Kautschukschlauch *m n* communicirende Gefässe erhält, man fängt nun bei tiefen Stand von *o* an vorsichtig mittelst eines in das Fläschchen eingeführten ausgezogenen und mit enger Ausflussöffnung versehenen Trichters Quecksilber einzufüllen, ist das Fläschchen voll, dann wird es langsam gehoben bis das Quecksilber bei *a* anlangt, dann wird die Klemme *r* um den Schlauch *m n* geschlossen und neuerdings durch den Trichter so viel Quecksilber in das Fläschchen gelassen, als sich beim Heben daraus entleerte, endlich der mit Quecksilber gefüllte Schlauch mit dem Röhrchen *q* an *p* befestigt und um den Kautschukschlauch die Klemme *s* geschlossen. Die Röhre *a b* hat die Blutlösung aufzunehmen und die Substanz, mit welcher dieselbe geschüttelt werden soll. Hat man nach Entfernung aller Luftblasen *a b* bis zur Mündung vollge-

füllt und diese luftdicht verschlossen, dann schüttelt man, indem man *ab* anfasst und bald nach auf-, bald nach abwärts kehrt. Will man die Flüssigkeit aus *ab* nach *o* filtriren, dann bringt man die ganze Vorrichtung in die in Fig. I gezeichnete Lage, indem man die Röhre *ab* in ein Gefäss mit Quecksilber taucht, darunter wird die Röhre bei *b* geöffnet, dann die Klemme *r* entfernt. Öffnet man auch noch die Klemme *s*, so fliesst durch das Röhrchen *q* das Quecksilber tropfenweise aus und durch den Schlauch *mn* tritt die Flüssigkeit aus *ab* nach *o*, während *ab* sich mit Quecksilber füllt; hat man *o* hinreichend gefüllt, so bringt man dieses Gefäss, nachdem man die Klemmen *s* und *r* geschlossen hat, direct in einem passenden Halter vor den Spalt des Spectroskopes.

Um mir bei den einzelnen spectroskopischen Beobachtungen bessere Anhaltspunkte zur Beurtheilung der Absorptionsstreifen zu verschaffen, brachte ich an meinem sonst vortrefflichen Instrumente aus der Werkstätte des polytechnischen Institutes in Wien (Starke, Sohn), da dieses nur die Vergleichung zweier Spectren mit Hülfe eines, die Hälfte des Spaltes deckenden, kleinen, gleichseitigen Prismas, sonst aber keine messenden Versuche zulässt, an dem Ort des Bildes vor dem Ocular des Fernrohres ein Hartnack'sches Mikrometer an und zählte an dessen Theilstrichen ab.

Ich erhielt beispielsweise für die Frauenhofer'schen Linien

B. 19. *C.* 29, *D.* 57—57½, *E.* 95½—96

für arterielle Blutlösung vom Hund

einen Absorptionsstreifen . . . . . 59—69,

einen zweiten Absorptionsstreifen . . 78—94.

Nach Behandlung dieser Lösung mit Stockes reducirendem Gemisch (Eisenvitriol, Weinsteinsäure und Ammoniak)

einen Absorptionsstreifen . . . . . 57—91.

Nach dem Schütteln der Blutlösung mit Eisenfeile

einen Absorptionsstreifen . . . . . 54—93,

für arterielle Blutlösung von der Taube

einen Absorptionsstreifen . . . . . 59—68,

einen zweiten von . . . . . 78—92.

Nach Behandlung mit Stockes reducirtem Gemisch

einen Absorptionsstreifen . . . . . 57—90.

Nach dem Schütteln mit Eisenfeile

einen Absorptionstreifen . . . . . 57—90.

Solche Angaben werden aber immer etwas Schwankendes haben, die Frauenhofer'schen Linien lassen sich natürlich sehr scharf ablesen, dagegen scheitert, wenn man auch die Dicke der Blutschichte und die Concentration der Lösung in allen Fällen nach Möglichkeit gleichmässig herstellt, ein scharfes Ablesen der Absorptionsstreifen an der schlechten Begrenzung derselben, indem das mittlere dunkle Schattenband durch Halbschatten in die nebenliegenden leuchtenden Abschnitte des Spectrums übergeht, gegen die Grenzen der letzteren ändert sich aber, während einmaligen Ablesens, die Empfindlichkeit des Auges.

Man kann sich auch ohne Spectroskop von dem Verschwinden des Sauerstoffes aus dem mit Eisenfeile geschütteltem Blute überzeugen, wenn man die Gase des dunkel gewordenen Blutes gegen reines *CO* diffundiren lässt.

Man kann sich am einfachsten dazu eines ⌒förmigen Glasrohres bedienen, wie es Saintpierre und Estor angaben [1]). Dieses wird mit Quecksilber gefüllt in die Wanne gestellt, dann aus einem Gasometer in das Rohr *CO* gebracht, welches durch einen mit empfindlicher Lösung von pyrogallussaurem Kali gefüllten Liebig'schen Kaliapparat geleitet worden war. In den einen Schenkel des Rohres wird vorsichtig unter Quecksilber das mit Eisenfeile geschüttelte Blut gebracht und zwar ein Volumen, welches mit dem in der Röhre enthaltenen *CO* noch ordentlich geschüttelt werden kann, ohne dabei in den anderen Schenkel hinüberzuspritzen. Während des Schüttelns war der das Blut enthaltende Schenkel mit einem weiten Kautschukschlauche umgeben, der unten etwas oberhalb des Quecksilberniveaus um das Rohr festgebunden war, dann von oben mit Wasser von 37 Grad gefüllt und mittelst Blumendraht befestigt wurde, dieses Wasser konnte abgelassen und erneuert werden. Das ganze Schlauchstück musste natürlich gleich zu Anfang des Versuches über die Röhre geschoben werden, an der es vorerst über der Biegung hing. Hatte man nun das Blut in kurzen Intervallen bei etwas erhöhter Temperatur mit dem *CO* geschüttelt, so zeigte sich nach einiger Zeit in der unmittelbar über dem Quecksilber befindlichen Schichte die für das *CO*-Blut charakteristische, bläulich-rothe Farbe, dann blieb der Versuch noch einige Stunden, während welcher einige Male von

[1]) Comptes rendus Tom. LIX, Nr. 24 (Déc. 1864), p. 1014.

neuem geschüttelt wurde, stehen. Schliesslich führte ich durch den anderen Schenkel eine Lösung von Pyrogallussäure (2 Grm. auf 10 Cub. Cent. Wasser) ein, zu welcher nachträglich etwa das doppelte Volumen einer Kalilauge von 1·4 spec. Gewicht gebracht wurde.

Solche Versuche wurden mit Schweins-, Ochsen- und Hundeblut angestellt, welches vorher durch 30 Minuten mit Eisenfeile unter Luftabschluss anhaltend geschüttelt worden war. Es liess sich niemals gegen *CO* ausgetauschter *O* nachweisen.

Die Lösung von pyrogallussaurem Kali nahm zwar eine leichte schmutzig violette Farbe an, allein das geschah auch, wenn ich meine Reagentien in einer vorher ganz mit Quecksilber angefüllten Röhre zusammenbrachte. Es wurde endlich zu Ende eines jeden Versuches die Empfindlichkeit des Reagens dadurch geprüft, dass durch den Schenkel, welcher das Blut enthielt, nach einiger Zeit eine Luftblase eingelassen wurde, worauf sich das Reagens sehr bald braun färbte.

Blut, welches auf die beschriebene Weise durch Schütteln mit Eisenfeile seines Sauerstoffes entledigt wurde, sollte mir bei gleich später mitzutheilenden Versuchen, zu welchen ich in seiner Concentration möglichst unverändertes, defibrinirtes Blut, in welchem zugleich die Blutkörperchen möglichst erhalten wären, benützen wollte, die zwar nicht unausführbaren, aber sehr schwierigen und zeitraubenden Manipulationen mit Erstickungsblut ersparen, welches aus den Gefässen des Thieres unter Luftabschluss in andere Behälter übertragen, von Fibrin befreit und dann wieder unter Luftabschluss in die verschieden gestalteten Apparate der einzelnen Versuche in kleineren Portionen hätte übertragen werden müssen. Es bildeten die Versuche mit Eisenfeile aber auch den Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen [1]), die ich trotz eifrigen Bemühens bis jetzt nicht abschliessen konnte, warum ich dennoch diese Mittheilung schon jetzt mache, wird aus dem zweiten und dritten Abschnitt dieser Abhandlung sich

1) Ausser dem Eisen wurden andere Metalle benützt, theils mechanisch fein zertheilt, theils als Metallfällungen. Es reduciren Zinn, Blei, Antimon. Silber sehr langsam. Nicht reduciren Platin und Quecksilber. Magnesium bewirkt sofort Wasserzersetzung, während diese im vollen Gange, zeigen sich merkwürdiger Weise noch die Absorptionsstreifen des sauerstoffhaltigen Haemoglobin. Auch durch Schütteln mit Geweben und Gewebsbestandtheilen kann man Blut und Blutlösung bei gewöhnlicher Temperatur reduciren und so künstliches Erstickungsblut erhalten. Erst wenn ich in der Lage sein werde darüber zu berichten, wird sich die Überschrift des ersten Abschnittes völlig rechtfertigen.

ergeben, die eine Erweiterung und Sicherstellung der von mir früher publicirten Thatsachen über die Veränderung des Blutes durch Entladungschläge und beim Frieren enthalten sollen.

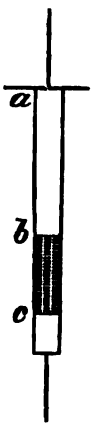
II. Zur Wirkung des Entladungsstromes und des constanten Stromes auf das Blut.

Von A. Schmidt wurde die Vermuthung ausgesprochen (Virchow's Archiv, 29. Bd., Berlin, 1864, p. 29), dass die von mir gefundene Aufhellung des Blutes durch den Entladungsstrom auf einer elektrischen Erregung des Blutsauerstoffes, — der doch wie ich anmerken will, bis auf ein im Serum einfach diffundirtes Minimum, als mit dem Blutfarbestoff chemisch verbunden angesehen wird — und Auflösung der Blutkörperchen durch das gebildete Ozon herrühre. Zur Prüfung dieser seiner Vermuthung stellte Schmidt Versuche mit dem constanten Strome am Blute an, welchen dieser um die Lehre vom Blut so verdiente Forscher eine wenigstens theilweise Bestätigung seiner Ansicht zu entnehmen scheint (l. c. und Haematologische Studien. Dorpat 1865, p. 116).

Man kann aber, vorausgesetzt, dass an die Möglichkeit der Erregung des chemisch gebundenen Blutsauerstoffes durch elektrische Schläge zu denken wäre, die Vermuthung Schmidt's auch unter Anwendung des Entladungsstromes einer Prüfung unterwerfen.

Es wurden zu dem Ende mit defibrinirtem Blute in dem in meiner Abhandlung über die successiven Veränderungen, welche elektrische Schläge an den Blutkörperchen hervorbringen, beschriebenen (d. Bericht, Bd. 50, p. 198) und (Fig. 7) abgebildeten Röhrchen die folgenden Versuche vorgenommen.

Das Glasröhrchen wurde mit Blut gefüllt, eine entsprechende Menge reiner Eisenfeile hinzugefügt, und nach Entfernung aller Luftbläschen der luftdicht schliessende Deckel aufgesetzt, endlich noch zur weiteren Sicherung der Winkel zwischen den Wandungen des Röhrchens und dem auf der Mündung sitzenden Deckel vorsichtig mit Talg ausgefüllt. Dann wurden die in der Axe des Apparates liegenden, zu den Elektroden führenden Drähte angefasst und der Apparat bei horizontal liegender Axe zwischen den Fingern beständig um diese Axe hin und hergedreht, die Eisenfeile rollte dabei an der Wand des Röhrchens hin und her und übte so ihre Wirkung auf das Blut aus, ist dieses Schütteln durch eine Zeit fortgesetzt, welche die durch



einen vorhergegangenen, mit demselben Blut und Eisenfeile zur vollständigen Aufhebung der Absorptionsstreifen des *O*haltigen Haemoglobin ermittelte Zeit weit übertrifft, dann wird der Apparat vertical gestellt, worauf sich die Eisenfeile in dem dunkel gewordenen Blute auf die untere Elektrode herabsenkt, wie aus dem neben gezeichneten Schema zu sehen ist. Die Drähte werden nun in die Klemmen des Schliessungsbogen aufgenommen. Der ganze zwischen der oberen Elektrode und der Eisenfeile befindliche Blutcylinder *a b* wird, wenn man nun die Entladungsschläge einer Leydnerflasche durch das Röhrchen schickt, lackfarbig, nur das in den Zwischenräumen der Eisentheilchen liegende Blut *b c* bleibt unaufgehellt.

Die letztere Erscheinung hat ihren Grund darin, dass der Entladungsstrom sich dort nur durch die gutleitenden Metalltheilchen fortpflanzt, diese bilden eine Fortsetzung der unteren Elektrode, das zwischen den Eisentheilchen befindliche Blut kann sich, weil es eben der Wirkung des Stromes nicht ausgesetzt ist, eben so wenig aufhellen, als dies Blut thut, welches neben drahtförmigen, in der Axe des Blutcylinders eingeschobenen Elektroden liegt, was sich aus den verschiedenen Leitungswiderständen von Metall und Blut sofort ergibt.

Bei obigem Versuche werden ferner die Erscheinungen nicht im mindesten geändert, ob man nun den innern oder äussern Beleg der Flasche mit der einen oder der andern Elektrode verbindet.

Durch die mikroskopische Untersuchung des so behandelten Blutes kann man sich von der vollständigen Veränderung der zwischen den Elektroden befindlichen Blutkörperchen überzeugen, ja man kann, und das zeichnet diesen Versuch vor Allem aus, wenn man das zwischen den Eisentheilchen unverändert liegen gebliebene Blut von der lackfarbig gewordenen Säule trennt, das durch den Entladungsstrom veränderte Blut direct mit solchem vergleichen, welches alle Proceduren bis auf das Elektrisiren eben so durchgemacht hat, wie das elektrisirte.

Will man das nicht, dann braucht man natürlich den Apparat nur aus den Klemmen des Schliessungsbogens zu nehmen und durch Hin- und Herneigen die Eisenfeile aufzuschütteln und so die früher unveränderten Blutkörperchen in die Säule *a b* zu deplaciren, um durch erneuerte Schläge und wiederholtes Aufschütteln auch den Rest der unveränderten Blutkörperchen zu verändern.

In diesen Versuchen, die mit Blut vom Hund und Ochsen angestellt wurden, kann, da der Sauerstoff auch das nur absorbirt gedachte Minimum mit eingerechnet, vollständig entfernt ist, von einer Wirkung des erregten Blutsauerstoffes nicht mehr die Rede sein.

Die Wasserzersetzung ist wie alle elektrolytischen Erscheinungen bei diesen Versuchen, wie ich schon früher (Wirkung des Entladungsstromes d. Bericht, Bd. 47, p. 488) zeigte, auf ein Minimum reducirt und der Gang der Aufhellung wie immer in gleichweiten Röhrchen in allen Querschnitten der Blutsäule ein durchaus gleicher. Wenn man Blut mit Muskelfleisch bis zum Verschwinden der Absorptionsstreifen des *o*haltigen Haemoglobin schüttelt und so gleichsam künstliches Erstickungsblut erhält, so erfolgen auch in diesem die Veränderungen der Blutkörperchen durch Entladungsschläge noch in der nämlichen Weise.

Das Ergebniss dieser Versuche ist mit der Annahme, dass beim Elektrisiren des Blutes elektrisch erregter Blutsauerstoff die Aufhellung bedinge, eben so wenig vereinbar, als die Thatsache, dass die Aufhellungsversuche auch mit Blut gelingen, welches mit einem reichlichen Strom von CO_2 oder CO vorher behandelt worden war. (Über die successiven Veränderung etc. d. Bericht, Bd 50, p. 199.)

Ich muss an diesem Orte auch noch einmal den gründlichen Unterschied hervorheben, der zwischen der Wirkung des Entladungsstromes und der Wirkung des constanten Stromes auf das Blut besteht, weil eine Nichtbeachtung dieses Unterschiedes, eben die Consequenz haben würde, dass man sich weder über die eine, noch über die andere Wirkung Klarheit verschaffen könnte.

Ich habe der Wirkung des constanten Stromes, gleich als ich meine Elektrisirungsversuche begann, meine Aufmerksamkeit geschenkt. Eingehender werden die interessanten Erscheinungen der Elektrolyse des Blutes von Schmidt (l. c. und haematol. Studien u. s. w.) beschrieben, der, weil er das leicht krystallisirende Hundeblut zu seinen Versuchen anwendete, auch die während und nach den verwickelten elektrolytischen Vorgängen stattfindende Blutkrystallbildung zuerst beobachtete.

Der constante Strom bewirkt am Blute immer nur Elektrolyse und alle Veränderungen des Blutes durch den constanten Strom, welche übrigens unläugbar die Ausgangspunkte mancher schöner Specialstudien in sich schliessen, hängen mit der Elektrolyse zusammen.

Die von mir beschriebene Aufhellung des Blutes durch den Entladungsstrom hat mit der Elektrolyse gar nichts zu thun.

Ich habe durch zahlreiche Versuche mit dem Entladungsstrom bewiesen, dass man die Wirkung des Entladungsstromes auf das Blut von den metallischen Elektroden vollständig unabhängig machen kann, beim constanten Strom ist das niemals der Fall. Es ist nicht möglich den Kirchhoff'schen Fall des Durchganges des Stromes durch eine kreisförmige Scheibe unter Anwendung des constanten Stromes durch Darstellung der Curven gleicher Dichtigkeit in einer kreisförmigen Blutschichte so zu demonstriren, wie dies unter Anwendung des Entladungsstromes leicht geschehen kann. Weder diese, noch irgend eine andere Stromvertheilungsfigur im Blute [1]) lässt sich durch den constanten Strom erhalten. Niemals gelingt es mit dem constanten Strome eine Blutsäule von wechselndem Querschnitte an der verengten Stelle zuerst, oder eine Blutsäule von durchaus gleichem Querschnitte in allen ihren Theilen gleichzeitig aufzuhellen, was bei Anwendung des Entladungsstromes immer eintritt.

Wie soll man so fundamentale Unterschiede übersehen?

Um allen ferneren Missverständnissen in dieser Beziehung zu begegnen, schlage ich den folgenden einfachen Versuch vor.

Man stelle sich ein Parallelopipedum aus Blut auf die folgende Weise her. Ein viereckiges Stück gleichmässig dicker Kautschukplatte wird in der, in Fig. II sichtbaren Weise ausgeschnitten. Um die Enden *a* und *b* werden dünne, biegsame Platinbleche *p* und *q* geschlagen, die mit Kupferdrähten verlöthet sind. Die Kautschukplatte sammt den Blechen wird nun mittelst kleiner Schraubenzwingen zwischen zwei Platten stärkeren Spiegelglases festgeklemmt. Man erhält auf diese Weise, wenn man mittelst eines, zwischen die Glasplatten eingeführten gleichbreiten Stäbchens den Abstand der Glasplatten während des Klemmens sorgfältig regulirt, einen Trog, der vorne und hinten von parallelen Spiegelgläsern, rechts und links von den Platinblechen begrenzt ist, dessen Boden von der Dicke der Kautschukplatte gebildet wird, der nach oben offen ist und auf den Schraubenzwingen, wie auf zwei Füssen steht. Der Raum zwischen den Glasplatten dient zur Aufnahme des Blutes, welches mittelst eines aus-

[1]) A. Rollett d. Berichte Bd. XLVII, p. 371, Taf. II, Fig. VIII, IX, X und XI.

gezogenen Glasröhrchens bis zur oberen Grenze der Platinplatten eingeführt wird.

Solche Tröge sind leicht bei gehöriger Auswahl an verschieden dicken Kautschukplatten in jeder verschiedenen Grösse, Länge und Breite herzustellen. Die Widerstände solcher Blutparallelopipeda sind leicht zu vergleichen, der Strom in denselben auf ein einfaches Schema zurückgeführt und alle Stromwirkungen sind, wenn man gegen eine der Glasplatten bald im auffallenden, bald im durchfallenden Lichte hinsieht, mit der grössten Deutlichkeit zu beobachten und zu verfolgen.

Man behandle nun solche Blutparallelopipeda einmal mit dem constanten Strom, ein anderes Mal mit Entladungsschlägen der Leydnerflasche, dann wird man, glaube ich, auch nicht im Entferntesten mehr an der gänzlichen Verschiedenheit der Blutelektrolyse und der von mir beschriebenen Aufhellung des Blutes durch den Entladungsstrom der Leydnerflasche zweifeln.

Die Erscheinungen am Hundeblut sind bei auf einander folgenden Entladungsschlägen ein in allen Querschnitten des Parallelopipedums gleichen Schritt haltendes, allmähliches Durchscheinendwerden, endlich wird das ganze Blut gleichzeitig lackfarbig durchsichtig. Aus dem so lackfarbig gewordenem Blute scheiden sich aber bei längerem Stehen die Blutkrystalle ab.

Beim constanten Strom sind die Erscheinungen am Hundeblut die folgenden:

An der negativen Elektrode tritt ein starkes Schäumen ein, das dünne Flüssigkeitshäutchen der Schaumblasen erscheint grün, mag man arterielles oder venöses Blut angewendet haben (Dichroismus alkalischer Blutfarbestofflösungen), an der Grenze des immer weiter vordringenden Schaumes, zwischen dieser und dem unveränderten Blute erscheint ein durchsichtig rother Streifen, in welchem die Blutkörperchen aufgelöst sind, wahrscheinlich entsprechend der sogenannten alkalinischen Welle Dutrochet's. Am positiven Pole liegen zunächst an der Elektrode einzelne und zwar grössere Gasblasen als an der negativen Elektrode (es ist nicht richtig, dass am positiven Pole die Gasentwicklung vollständig fehlt), dann kommt ein farbloses Gerinnsel, welches sich auch in die Zwischenräume der an der Platinelektrode der Länge nach aufgereihten Gasblasen erstreckt, dieses Gerinnsel geht durch verschiedene Nüancen von gelbbraunen Streifen (Blutfarbestoff in saurer Lösung) in eine dunkle, schwarze Masse über,

vor welcher wieder ein hell und durchsichtig rother Streifen liegt, der unmittelbar an das unveränderte Blut angrenzt. Zwischen dem hellen Streifen und der dunkelschwarzen Masse ist ein Band von Blutkrytsallen eingeschoben und zwar ist die Längenrichtung der Prismen im allgemeinen parallel der Stromrichtung, der in dieser Richtung schwingende Strahl der dichromatischen Krystalle der dunkelrothe, der senkrecht darauf schwingende der hellrothe. Dieser Krystallstreifen ist im auffallenden Lichte leicht an seinem Glanze zu erkennen und daran, dass die Enden der Prismen büschelförmig in den im Sinne des Stromes vor ihnen liegenden hellen Streifen hinausragen, bei geringer Breite des Troges kann der Krystallstreifen nach Unterbrechung des Versuches leicht zwischen den Glasplatten im gemeinen und polarisirtem Lichte mikroskopisch untersucht werden. Unter seiner sauren Welle hat Dutrochet das farblose Gerinnsel der Elektrode zunächst verstanden, denn er sagt von dieser Stelle, dass sie durchsichtig war und den rothen Farbestoff vor sich hertrieb.

Wird das Parallelopidedum sehr kurz genommen, dann treffen natürlich bei längerer Dauer des Stromes die von beiden Polen ausgehenden Veränderungen zusammen.

Die Erscheinungen an allen anderen Blutarten sind den Erscheinungen am Hundeblut analog.

Durch Versuche, wie die vorstehenden, wird sich aber leicht jeder überzeugen, dass man nicht die geringste Berechtigung dazu hat, aus Versuchen, welche man mit dem constanten Strome angestellt hat, auch Folgerungen in Bezug auf die Wirkung des Entladungstromes der Leydnerflasche auf das Blut abzuleiten. Bei dem letzteren hat man es mit einer von der Elektrolyse unabhängigen Stromwirkung zu thun, bei den Versuchen mit dem constanten Strom entstehen ausser den Producten der Elektrolyse auch noch durch die abgeschiedenen Jonen bedingte, secundäre Producte und Erscheinungen. Diese Annahme wird uns durch die directe Beobachtung und Analogie nahegelegt, ohne dass man bis heute im Stande wäre anzugeben, was Alles bei dem complicirten mechanisch-chemischen Gemenge: Blut als Jon, was als secundäres Product und secundäre Erscheinung anzusehen ist.

III. Variirte Frierversuche mit Blut.

Als ich meine ersten Frierversuche am Blute anstellte, bediente ich mich in Frostmischung aus Schnee oder zerstossenem Eis und

krystallisirtem Chlorcalcium eingestellter Platingefässe, in diesen wurde Blut „zum raschen Frieren gebracht, so dass sich nicht einzelne Eisnadeln nach und nach ausbilden konnten, sondern die ganze Masse zu einem dichten Kuchen mit matter, fein radienartig gestreifter Oberfläche zusammen fror". (Versuche und Beobachtungem am Blut der Berichte, Bd. 46, p. 71.) Auf diese mechanische Momente involvirenden Bedingungen kommt für erfolgreiche Frierversuche Alles an. Niemals hat mir irgend einer meiner oft und zahlreich angestellten Versuche auch nur den leisesten Verdacht nahe gelegt, dass es dringend nothwendig sei, zu untersuchen, ob die Frierversuche auch bei vollkommenen Luftabschluss eben so gelingen, wie wenn man in offenen Gefässen manipulirt.

Böttcher (Virchow's Archiv, Bd. 32 (1865), p. 372), sucht nun gerade geltend zu machen, dass bei der Aufhellung des Blutes durch Frieren und Wiederaufthauen der Sauerstoff [1]) eine wichtige, von mir übersehene Rolle spielt.

Dem ist jedoch nicht so, es lässt sich vielmehr durch sehr einfache Versuche zeigen, dass Böttcher's Angaben nur jene zahlreichen Fälle um Einen vermehren, in welchen man, seit Lavoisier das rührigste aller Elemente als Solches erkannte, den Sauerstoff ohne Grund zum Agitator stempeln wollte.

Diese Versuche bestehen darin, dass man Blut unter Quecksilber zum Frieren bringt.

Man stellt in ein grösseres mit in Wasser schwimmenden Eisstücken gefülltes Reservoir eine dickwandige Porcellanschale, in diese wird etwas Quecksilber gegossen, welches als Sperrflüssigkeit für den Blutbehälter dient. Der letztere ist für kleinere Blutproben eine abgesprengte Eprouvette, für grössere Blutproben ein Becherglas mit abgenommenen Rand.

Diese werden vorerst in der Quecksilberwanne mit Quecksilber vorsichtig gefüllt, dann lässt man unter Vermeidung aller Luftblasen das Blut in dieselben aufsteigen, hebt sie mittelst eines Uhrglases oder des tellerförmigen Deckels eines Platintiegels aus der Wanne und bringt sie auf diese Weise in das Quecksilber der dickwandigen Schale. Sind sie dort hineingestellt, dann fülle man den übrigen Raum der Schale mit der Frostmischung aus zerstossenem

[1]) Vielleicht Gefrorener??

Eis und Chlorcalcium vorsichtig aus, so dass das sperrende Quecksilber und der Blutbehälter vollständig damit überdeckt werden.

Wenn das Blut 30 Minuten und länger in der Frostmischung gestanden hat, wird diese vorsichtig, um ein Umfallen des Blutbehälters hintanzuhalten, wieder entfernt.

Am besten ist es sich mit einer Pincette zuerst die Kuppe des Blutbehälters bloss zu legen, diese dann, indem man gegen den Boden hin drückt, festzuhalten und das übrige aus der Schale zu räumen.

Darauf saugt man die über dem Quecksilber angesammelte Flüssigkeit mit einer Pipette aus und wäscht die äussere Oberfläche des Blutbehälters und das Quecksilber wiederholt und sorgfältig mit destillirtem Wasser, welches wieder mit der Pipette abgesaugt wird, schliesslich, wenn alles Chlorcalcium enfernt ist, trocknet man das Glasgefäss und das Quecksilber mit Filtrirpapier, welches den letzten Rest des Wassers ansaugt.

Ich habe auf diese Weise arterielles und venöses Blut, mit *CO* gesättigtes und mit Eisenfeile oder Geweben geschütteltes Blut vom Hund, vom Meerschweinchen und Kaninchen frieren lassen.

Das Blut war immer zu einem dichten Kuchen zusammengefroren. Es entsteht bei diesen, bis auf den Luftabschluss meinen früheren Versuchen vollständig analogen Frierversuchen keine blosse Grütze oder ein noch flüssiges Blut einschliessender Krystallkeller, wie dies bei schlechten Frierversuchen und ungenügender Abkühlung grosser Blutmassen der Fall ist.

Das auf diese Weise in einen dichten Frierkuchen verwandelte Blut ist nach dem Wiederaufthauen, und dieses erfolgt alsbald nach der Wegräumung der Frostmischung und Bespülen mit destillirtem Wasser von gewöhnlicher Temperatur, immer lackfarbig durchsichtig, ob es arteriell, venös, mit *CO* gesättigt, oder mit Eisenfeile oder Gewebe geschüttelt angewendet wird.

Wenn aber Blut einmal durch Frieren lackfarbig geworden ist, dann scheiden sich unter geeigneten Bedingungen auch Blutkrystalle aus demselben aus, wobei, wie ich schon früher (l. c.) zeigte, für viele Blutarten noch eine vorgängige Concentration durch Verdunstung nothwendig ist.

Diese letztere begünstigt die Krystallbildung in flachausgebreiteten, durch Frieren und Wiederaufthauen durchsichtig gemachten

Blutschichten, nicht aber der vermehrte Zutritt des atmosphärischen Sauerstoffes.

Um die Concentration lackfarbigen Blutes bei Abschluss des Sauerstoffes vorzunehmen, bringe ich das unter Quecksilber durch Frieren und Wiederaufthauen lackfarbig gewordene Blut in eine mit Chlorcalcium trocken erhaltene Atmosphäre von CO_2 oder CO und zwar in der folgenden Weise.

Der das lackfarbige Blut enthaltende Behälter wird, nachdem das Quecksilber in der Schale eben zu diesem Zwecke vollständig gewaschen und getrocknet ist, mittelst eines Uhrglases aus der Schale gehoben und in das Gefäss gebracht, in welchem die Concentration und Krystallisation stattfinden soll. Ich benützte dazu Uhrgläser oder flache Porcellanschalen, in diese gibt man anfangs so viel Quecksilber, dass der Blutbehälter bequem hinein gestellt werden kann, ohne dass Luftblasen zum Blute aufsteigen. So wird das Ganze auf einen Dreifuss gestellt, der auf einem an Boden durchbohrten Metallteller nach Art der gewöhnlichen Luftpumpenteller steht. Über den Blutbehälter schiebt man dann einen aus Korkplatte gestochenen, festanschliessenden Ring, an dem ein langer Faden befestigt ist; sind diese Operationen ausgeführt, dann schöpft man aus der flachen Schale oder dem Uhrglase mittelst eines Löffelchens so viel Quecksilber vorsichtig aus, dass nur eine eben noch schliessende Menge Sperrflüssigkeit zurückbleibt.

Dann wird über die Öffnung im Metallteller unter dem Dreifuss ein auf drei an dem Metallteller aufgeklebten Pflöckchen ruhender kleiner, mit Löchern am Boden und an den Seiten versehener Tiegel gestellt, der mit Chlorcalciumstücken angefüllt ist und sogleich über das Ganze eine an der Kuppe tubulirte Glasglocke gestülpt, nachdem man vorerst nur noch den mit dem Blutbehälter verbundenen langen Faden durch den Tubulus der Glocke vorsichtig nach aussen geschoben hat, der gefettete Rand der Glocke wird endlich luftdicht und fest auf den Metallteller aufgedrückt.

Steht der Versuch in dieser Weise beisammen, dann werden durch die Öffnung des Metalltellers CO_2 oder CO, welche mit pyrogallussaurem Kali gewaschen, durch mit SO_3, HO getränkte Bimssteinstücke und Chlorcalcium getrocknet wurden, eingeleitet und so lange durch die Glocke geleitet, bis das aus dem Tubulus der Glocke tretende Gas keine Bräunung von pyrogallussaurem Kali mehr hervor-

bringt. Ist alle Luft aus der Glocke verdrängt, dann wird durch den über den Tubulus der Glocke gestülpten und einen Bunsen'schen Kautschukhahn in seinem Verlaufe enthaltenden Schlauch, der schon früher nach aussen geleitete mit dem Blutbehälter verbundene Faden rasch emporgezogen, der Kautschukhahn sogleich geschlossen und eben so der, zum Boden des Metalltellers leitende Schlauch abgeklemmt.

Das aus dem emporgezogenen Blutbehälter ausfliessende Blut breitet sich im flachen Gefässe neben und über dem Quecksilber aus und gibt nun sein Wasser an die trockene CO_2 oder CO Atmosphäre ab.

Dabei concentrirt es sich und krystallisirt auf das Schönste.

Ich habe auf diese Weise grosse und gut ausgebildete Krystalle erhalten. Aus Meerschweinchenblut dadurch, dass die anfänglich ausgeschiedenen Krystalle bei der Concentration der lackfarbigen Flüssigkeit allmählich anwuchsen, so grosse mit freiem Auge in ihrer Form deutlich erkennbare rhombische Tetraëder mit abgestumpften gegenüberliegenden Kanten, wie ich sie zuvor niemals gesehen habe und zwar unter Anwendung einer CO_2 Atmosphäre über venösem Blute.

Eben so schön bilden sich die Krystalle aus dem Hundeblut aus. Hat man mit CO imprägnirtes Hundeblut durch Frieren lackfarbig gemacht und in einer CO Atmosphäre krystallisiren lassen, so erhält man die schönen Prismen in der Farbe des Kohlenoxydblutes. Dasselbe ist bei gleicher Behandlung mit den Tetraëdern des Meerschweinchenblutes der Fall. Solche Krystalle zeigen, wenn man sie nachträglich mit einem Nicol über dem Ocular unter dem Mikroskope untersucht ausgezeichnete, von den gewöhnlichen verschiedene Farben.

Das parallel der Längsrichtung der Prismen aus Hundeblut schwingende Licht ist dunkel rosenroth, das senkrecht zu dieser Richtung schwingende Licht farblos, ins lichtrosenrothe, während bei den auf gewöhnlichem Wege erhaltenen Krystallen dieselben Strahlen dunkelroth und farblos ins Grünliche erscheinen.

Ähnliche Farben nimmt man an den Krystallen des Meerschweinchenblutes nach der Behandlung mit CO wahr, nur darf man sich dazu nicht allzu dicker Exemplare bedienen.

Dass man aus mit CO gesättigtem, also ofreiem Blute noch Blutkrystalle gewinnen kann, ist, obwohl nicht unter Anwendung des Frierens und Wiederaufthauens, bekanntlich schon von Lothar Meyer gezeigt worden.

Fig. 1.

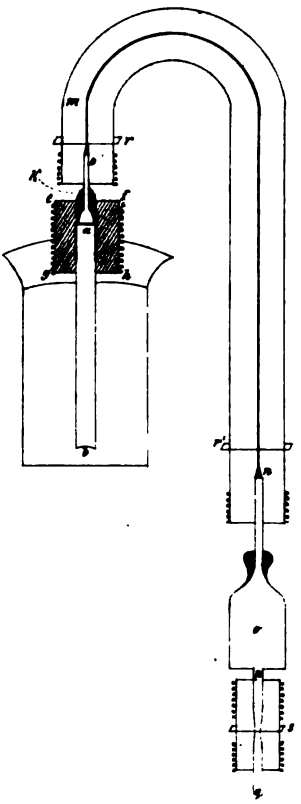
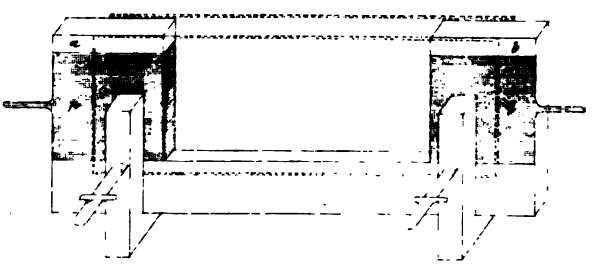


Fig. 2.



Nach den früher mitgetheilten Versuchen ist es also für die Veränderungen des Blutes durch Frieren und Wiederaufthauen und die darauffolgende Krystallbildung vollkommen gleichgültig, ob man sich dabei das indifferente Danebenstehen des Sauerstoffes gefallen lässt, oder aber denselben sorgsam aus dem Bereich der Versuche entfernt. Die Versuche gelingen, wenn sie überhaupt gut angestellt werden, das eine wie das andere Mal immer und führen genau zu den nämlichen Resultaten, zu jenen, welche ich schon ausführlich in meiner citirten Abhandlung beschrieben habe. Böttcher wurde durch Versuche, die nichts beweisen, zu dem sonderbaren Irrthume geführt, dass der Sauerstoff bei der von mir beschriebenen Aufhellung des Blutes durch Frieren und Wiederaufthauen und bei der im lackfarbigen Blute erfolgenden Krystallbildung eine wesentliche, von mir übersehene Rolle spielt.

Chemische Analyse der Therme von Tobelbad bei Graz in Steiermark.

Von Dr. E. Ludwig.

(Ausgeführt im chemischen Laboratorium des Professors Redtenbacher.)

Etwa 1 1/2 Meilen von Graz entfernt, liegt in einem lang gedehnten Thalkessel, welcher sich gegen Süden hin in das grosse Kainachthal öffnet, der Curort Tobelbad. An den beiden Längsseiten begrenzen das Thal zwei mässig hohe Bergketten, welche dicht mit Nadelhölzern bewachsen sind, ein kleines Bächlein, der Tobelbach genannt, bewässert das herrlich gelegene Thal.

Im Thale und den angrenzenden Hügeln findet sich an Gestein Mergel, Sand, Sandstein und Kalkstein, welch' letzterer als devonischer Kalk zu bezeichnen ist; aus Spalten dieses Kalksteines kommen zwei Quellen zu Tage, die etwa 40 Klafter von einander entfernt sind.

Schon frühzeitig war die heilkräftige Wirkung dieser Quellen bekannt, und es ist historisch erwiesen, dass dieselben schon vor mehr als 300 Jahren zu Bädern verwendet wurden; es war damals Tobelbad im Besitze des Landesfürsten, der es 1548 der steiermärkischen Landschaft schenkte.

Gegenstand der chemischen Analyse war die südlich gelegene Ludwigsquelle; diese entspringt im Curbadhause und ihr Wasser wird von einem grossen hölzernen Bassin aufgenommen, das bei einer Tiefe von 4 Fuss einen quadratischen Boden von 5 1/2 Fuss Seitenlänge hat; das Bassin füllt sich mit dem Wasser der Quelle in drei Stunden.

Aus dem Quellbassin wird das Wasser in das Vollbad und in die Wannenbäder durch Röhren geleitet.

Die Temperatur der Quelle wurde am 6. Mai 1865 bei einer Lufttemperatur von 14 1/2° R. = 23° R. gefunden, sie ist nach den

sorgfältigen und oft wiederholten Beobachtungen des jetzigen Badedirectors Dr. von Kottowitz sehr constant.

Vom Boden des Quellbassins steigen beständig Gasblasen in bedeutender Menge empor; es wurden einige Röhren mit diesen Gasen gefüllt, zugeschmolzen und im Laboratorium nach den gasanalytischen Methoden von Bunsen untersucht; als Resultat der Untersuchung ergab sich, dass diese Gase aus Stickstoff und Kohlensäure bestehen und dem Volumen nach in 100 Theilen 96·85 Vol. Stickstoff und 3·15 Vol. Kohlensäure enthalten.

Das Wasser der Therme ist vollkommen klar, ohne auffallenden Geruch und Geschmack, nach längerem Stehen im Bassin wird es etwas trübe und am Boden scheiden sich feine Flöckchen von rostbrauner Farbe aus; in gut verkorkten Flaschen bleibt es lange Zeit klar und unverändert. Auf Lackmusfarbstoff reagirt es kaum merklich alkalisch, beim Kochen scheidet sich ein reichlicher Niederschlag aus.

Der durch Eindampfen des Wassers erhaltene Rückstand ist weiss, beim starken Erhitzen bräunt er sich vorübergehend.

Die qualitative Analyse des Wassers ergab an gelösten Bestandtheilen:

Kohlensäure, Kieselsäure, Schwefelsäure, Chlor, Phosphorsäure, Eisenoxydul, Manganoxydul, Thonerde, Kalk, Strontian, Magnesia, Kali, Natron und Lithion.

Nach Ammoniak, Salpetersäure, Jod und anderen in Wässern häufig vorkommenden Körpern wurde selbst unter Anwendung von grossen Wassermengen vergebens gesucht.

Zur quantitativen Analyse wurden gewichts- und massanalytische Methoden in Anwendung gebracht.

Die Kohlensäure wurde an der Quelle bestimmt, indem gemessene Wassermengen in Kolben gebracht wurden, welche Kalkhydrat und Chlorcalcium enthielten; der Niederschlag wurde dann mit Salzsäure zerlegt und die Kohlensäure im Mulder'schen Absorptionsapparate aufgefangen.

Kieselsäure, Schwefelsäure und Chlor wurden nach den bekannten Methoden bestimmt, die Niederschläge nach dem Wägen sorgfältig auf ihre Reinheit geprüft.

Das Eisen wurde mit Schwefelammonium gefällt und theils als Eisenoxyd, theils als Eisensulfür gewogen, zur Controle in Eisenchlorid verwandelt und mit Jodlösung titrirt.

Mangan wurde als Mangansulfür gefällt, als Manganoxyduloxyd gewogen.

Der Kalk wurde nach Entfernung von Eisenoxyd, Thonerde und Phosphorsäure mit überschüssigem oxalsaurem Ammoniak gefällt, der Niederschlag mit Salzsäure in Lösung gebracht und nach Zusatz von etwas oxalsaurem Ammon neuerdings mit Ammoniak gefällt, um die kleine Menge der Magnesia, die bei der ersten Fällung herausgefallen sein konnte, zu lösen.

Zur Bestimmung des Strontians wurde der kohlensaure Kalk und der durch Kalkmilch erhaltene Magnesianiederschlag im Platintiegel vor dem Gebläse anhaltend und stark geglüht, die erkaltete Masse mit Wasser wiederholt ausgekocht, das Filtrat mit Salpetersäure neutralisirt und vorsichtig zur Trockene gebracht, die trockene Salzmasse mit absolutem Alkohol und Äther ausgezogen, das ungelöst gebliebene salpetersaure Strontiumoxyd im Wasser gelöst und mit Schwefelsäure gefällt; der Niederschlag zeigte, nachdem er aufgeschlossen war, vor dem Spectralapparate nur die Strontianlinien, war also frei von Kalk und Baryt.

Die Trennung der Magnesia von den Alkalien wurde mit phosphorsaurem Ammoniak ausgeführt, die Magnesia als pyrophosphorsaures Salz gewogen, die Alkalien, nachdem sie zusammen als Chloride gewogen waren, mit Platinchlorid unter Beobachtung der nöthigen Vorsichtsmassregeln getrennt.

Zur Bestimmung des Lithions wurden alle Basen von den Alkalien getrennt, diese in Chloride verwandelt, und nachdem sich gezeigt hatte, dass kohlensaures Ammoniak in ihrer Lösung keinen Niederschlag erzeugt, mit Alkohol und Äther ausgezogen, die klare Lösung verdampft, der Rückstand in wenig Wasser gelöst und als phosphorsaures Lithion bestimmt.

Zur Controle für die Richtigkeit der einzelnen Bestimmungen wurden gewogene Wassermengen vorsichtig eingedampft, der Rückstand bei 180° C. getrocknet und gewogen, hierauf durch Zusatz von Chlorwasserstoffsäure und Schwefelsäure in schwefelsaure Salze verwandelt, eingedampft und zur Vertreibung der überschüssigen Säure gelinde geglüht.

Die vorhandenen kleinen Mengen von Phosphorsäure und Thonerde wurden zusammen als phosphorsaure Thonerde ($Al_2P\Theta_4$) bestimmt; es zeigte sich zwar, dass von der Phosphorsäure mehr vor-

handen war, als zur Bildung dieser Verbindung nöthig ist, indem nach Abscheidung derselben im Filtrate mit schwefelsaurer Magnesia und Chlorammonium noch eine Spur eines krystallinischen Niederschlages entstand, doch war derselbe nicht wägbar.

Das specifische Gewicht des Wassers wurde mittelst des Picnometers bestimmt und in zwei Versuchen 1·00059 und 1·00061, also im Mittel 1·0006 gefunden.

Aus der folgenden Zusammenstellung werden die Resultate der einzelnen analytischen Operationen ersichtlich:

Kohlensäure

Wassermenge in Grammen	Kohlensäure	für 10000 Theile	
		nach den Einzelbestimmungen	im Mittel
270·35	0.082	3·033	3·039
270·35	0·082	3·033	
270·35	0·0825	3·051	

Kieselsäure

Wassermenge in Grammen	Kieselsäure	für 10000 Theile	
		nach den Einzelbestimmungen	im Mittel
4002·4	0·0565	0·141	0·143
6303·8	0·092	0·146	

Schwefelsäure

Wassermenge in Grammen	schwefelsaurer Baryt	entspricht Schwefelsäure	für 10000 Theile	
			Einzelbestimmungen	im Mittel
999·8	0·320	0·1098	1·098	1·097
999·8	0·319	0·1097	1·097	

Chlor

Wassermenge in Grammen	Chlorsilber	entspricht Chlor	für 10000 Theile	
			Einzelbestimmungen	im Mittel
2999·3	0·035	0·0086	0·029	0·030
4002·4	0·050	0·012	0·031	

Eisenoxyd

Wassermenge in Grammen	Eisensulfür	entspricht Eisenoxyd	für 10000 Theile	
			Einzelbestimmungen	im Mittel
4002·4	—	0·002	0·005	0·005
6303·8	—	0·0032	0·005	
22013·2	0·015	0·0136	0·006	

Maganoxydul

Wassermenge in Grammen	Mangan-oxyduloxyd.	entspricht Maganoxydul	für 10000 Theile
22013·2	0·005	0·0046	0·002

Phosphorsaure Thonerde

Wassermenge in Grammen	phosphorsaure Thonerde	für 10000 Theile
22013·2	0·011	0·005

Kalk

Wassermenge in Grammen	kohlensaurer Kalk	entspricht Kalk	für 10000 Theile	
			Einzelbestimmungen	im Mittel
4002·4	1·0655	0·5967	1·491	1·486
6303·8	1·666	0·933	1·480	

Kalk, welcher beim Kochen des Wassers gelöst bleibt

Wassermenge in Grammen	kohlensaurer Kalk	entspricht Kalk	für 10000 Theile	
			Einzelbestimmungen	im Mittel
1000·46	0·0325	0·0182	0·1819	0·179
1000·48	0·0316	0·0177	0·1769	

Strontian

Wassermenge in Grammen	schwefelsaures Strontian	entspricht Strontian	für 10000 Theile
22013·2	0·041	0·023	0·010

Magnesia

Wassermenge in Grammen	pyrophosphorsaure Magnesia	entspricht Magnesia	für 10000 Theile	
			Einzelbestimmungen	im Mittel
4002·4	0·677	0·244	0·610	0·610
6303·8	1·0695	0·385	0·611	

Kali und Natron

Wassermenge in Grammen	KCl + NaCl	$KCl, PtCl_2$	entspricht		für 10000 Theile	
			KCl	NaCl	Kali	Natron
6303·8	0·197	0·1305	0·0398	0·1572	0·040	0·128
9005·4	0·304	0·190	0·0579	0·2461		

Lithion

Wassermenge in Grammen	phosphorsaures Lithion	entspricht Lithion	für 10000 Theile
22013·2	0·002	0·0008	0·0004

Organische Substanz

Wassermenge in Grammen	Glühverlust des getrockneten Rückstandes	für 10000 Theile	
		Einzelbestimmungen	im Mittel
2001·2	0·004	0·020	0·020
2001·2	0·004	0·020	

Summe der fixen Bestandtheile

Wassermenge in Grammen	Rückstand		für 10000 Theile			
	I	II	I.	Mittel von I.	II.	Mittel von II.
	bei 180° C. getrocknet	in schwefelsaure Salze verwandelt				
499·31	0·246	0·297	4·927	4·9265	5·948	5·963
513·55	0·253	0·307	4·926		5·977	

Es ergeben demnach die Mittelwerthe von den einzelnen Bestimmungen folgende Zusammenstellung für 10000 Theile des Wassers:

Kieselsäure	0·143
Schwefelsäure	1·097
Phosphorsäure	0·0029
Eisenoxydul	0·005
Manganoxydul	0·002
Thonerde	0·0021
Kalk	1·486
Strontian	0·010
Magnesia	0·610
Kali	0·040
Natron	0·138
Lithion	0·0004
Organische Substanz	0·020
Kohlensäure, gebunden	1·338
Kohlensäure, halbgebunden	1·338
Kohlensäure, frei	0·363
Summe der fixen Bestandtheile berechnet	4·917

Die folgenden Tabellen enthalten die Zusammensetzung des Wassers, wenn man die Bestandtheile nach ihren nähern Verwandtschaften zu Salzen gruppirt und auf die Menge der beim Kochen des Wassers sich ausscheidenden Salze Rücksicht nimmt.

I. In 10000 Theilen sind enthalten:

Schwefelsaures Kali	0·074
Schwefelsaures Natron	0·316
Schwefelsaures Lithion	0·0014
Schwefelsaurer Strontian	0·018
Schwefelsaurer Kalk	0·435
Schwefelsaure Magnesia	0·930
Chlormagnesium	0·040
Kohlensaurer Kalk	2·334
Kohlensaure Magnesia	0·594
Kohlensaures Eisenoxydul	0·008
Kohlensaures Manganoxydul	0·003
Phosphorsaure Thonerde	0·005
Kieselsäure	0·143
Organische Substanz	0·020
Halbgebundene Kohlensäure	1·338
Freie Kohlensäure	0·363
Freie Kohlensäure dem Volumen nach bei normalem Luftdruck und Temp. der Quelle — Kubik-Centimt.	204·2
Summe der fixen Bestandtheile, berechnet	4·917
„ „ „ „ gefunden	4·926
Summe der fixen Bestandtheile als schwefelsaure Salze, berechnet	6·005
„ „ „ „ „ „ „ gefunden	5·963

II. In einem Wiener Pfunde (7680 Granen) sind enthalten in Granen:

Schwefelsaures Kali	0·0568
Schwefelsaures Natron	0·2427
Schwefelsaures Lithion	0·0011
Schwefelsaurer Strontian	0·0138
Schwefelsaurer Kalk	0·3341
Schwefelsaure Magnesia	0·7142
Chlormagnesium	0·0307
Kohlensaurer Kalk	1·7925
Kohlensaure Magnesia	0·4562
Kohlensaures Eisenoxydul	0·0060
Kohlensaures Manganoxydul	0·0025
Phosphorsaure Thonerde	0·0038

Kieselsäure		0·1098
Organische Substanz		0·0154
Halbgebundene Kohlensäure		1·0276
Freie Kohlensäure		0·2787
Freie Kohlensäure dem Volumen nach bei normalem Luftdruck und Quellentemperatur	Cubik Zolle	0·624
Summe der fixen Bestandtheile, berechnet		3·7766
„ „ „ „ gefunden		3·7835
Summe der fixen Bestandtheile als schwefelsaure Salze berechnet		4·6118
„ „ „ „ „ „ „ gefunden		4·5796

Eine von Herrn Professor Schrötter vor vielen Jahren vorgenommene Analyse der Tobelbader Therme stimmt mit der vorliegenden in den wesentlichen Bestandtheilen sehr gut überein, woraus hervorgeht, dass die Natur der Therme seit dieser Zeit sich nicht geändert hat.

Chemische Analyse der Frauenquelle in Baden.

Von **Alex. Exner** und **Gust. Kotrtsch**,
k. k. Artillerie-Oberlieutenants.

Ausgeführt im chemischen Laboratorium des Herrn Professor Redtenbacher.

Baden liegt am Eingange des Helenenthales auf angeschwemmtem Boden und Diluvialgerölle. Unter diesem Boden zieht sich der Tegel des Wiener Beckens hin. Die Gebirge, welche Baden zunächst umgeben, sind der Hauptmasse nach Alpenkalk mit Dolomit. Conglomerate bilden einzelne hohe Wände. Die Höhen des Thaleinganges bestehen aus Leithakalk.

Die Schwechat tritt hier aus dem Helenenthale in die Ebene. Nahe am linken Ufer dieses Flusses und in der Stadt selbst befindet sich das Frauenbad mit dem Josephsbade auf Einem Platze und mit dem Carolinenbade in demselben Gebäude.

Historisch ist die Quelle des Frauenbades für Baden dadurch interessant, weil es diese Quelle ist, deren erfolgreicher Gebrauch durch die Kaiserin Eleonore deren Gemahl Kaiser Friedrich IV. bewog Baden 1480 zur Stadt zu erheben.

Nach dem Abzuge der Türken, welche Baden 1529 zerstörten, schenkte Kaiser Ferdinand I. der Stadt die zwei sogenannten „Wildbäder“ (das heutige Frauenbad und das Carolinenbad).

Den Namen führt das Bad von der, noch 1787 bestandenen Frauenkirche zu Maria Geburt, deren Hochaltar über dieser Quelle stand. Diese Kirche wurde unter Kaiser Joseph II. aufgelassen und 1806 abgetragen.

Im Jahre 1821 liess die Stadt jenes Gebäude aufführen, welches gegenwärtig die Frauenquelle mit dem Carolinenbade unter Einem Dache vereint.

Das Frauenbad befindet sich im rückwärtigen Theile dieses Gebäudes. Der Badesaal ist bei 6 Klafter lang und 4 Klafter breit, und wird durch zwei halbrunde Fenster erleuchtet.

Das Bassin nimmt die ganze Längen- und Breitenausdehnung dieses Saales ein, ist rings herum mit Holz bekleidet und mit Sitzen versehen. Der Boden ist ebenfalls aus Holz, — durchlöchert.

In der südöstlichen Ecke dieses Bassins sprudelt die Quelle unter den Bodenbrettern hervor und füllt das Bassin in ungefähr 3 Stunden.

Mit dem Wasser steigen Gasblasen auf.

Das Wasser der Quelle ist — frisch geschöpft — ganz klar, riecht deutlich nach Schwefelwasserstoff, schmeckt fade, etwas salzig, und es ist, bei einiger Aufmerksamkeit, ein Gehalt an Kohlensäure schon durch den Geschmack zu erkennen. Bei längerem Stehen an der Luft trübt es sich durch ausgeschiedenen Schwefel.

Die Reaction des frisch geschöpften Wassers ist neutral; — nach längerem Liegen zeigt das eingetauchte Lackmuspapier schwach alkalische Reaction. Die Reaction des gekochten Wassers ist schwach aber deutlich alkalisch.

Die Temperatur der Quelle ist constant 35° Celsius oder 28° Réaumur. Wenn die Quelle nicht auf vulcanischem Wege erwärmt wird, müsste sie nach dieser Temperatur aus einer Tiefe von beiläufig 500 Klafter oder darüber emporsteigen.

Der übliche Weg der qualitativen chemischen Analyse ergab an mineralischen Bestandtheilen:

Schwefelsäure,	Lithion,
Chlor,	Kalk,
Kohlensäure,	Magnesia,
Schwefelwasserstoff,	Strontian,
Kieselsäure,	Eisenoxyd,
Kali,	Thonerde,
Natron,	Ammoniak.

Die quantitative Bestimmung dieser Körper geschah theils auf gewichtsanalytischem Wege, theils massanalytisch.

Das specifische Gewicht des Mineralwassers wurde mit dem Piknometer bestimmt (die Resultate sämmtlicher Bestimmungen folgen weiter unten).

Zur Bestimmung der Summe der fixen Bestandtheile wurden 500 Kubikcentimeter Wasser in einem vorher gewogenen Platintiegel eingedampft, bei 180° Cels. getrocknet und gewogen, — hierauf in wenig verdünnter Salzsäure gelöst, nach Zusatz einer genügenden Menge von Schwefelsäure abermals zur Trockene gebracht und geglüht, dann die schwefelsauren Salze gewogen.

Zur Bestimmung der Gesammtkohlensäure wurden vier, mit reinem, von Kohlensäure freien Kalkhydrat und Chlorcalcium versehene, wohl verschliessbare Flaschen an der Quelle mit je 271 CC. Wasser gefüllt. Aus dem Niederschlage wurde im Laboratorium durch Kochen mit Salzsäure die Kohlensäure frei gemacht, über Chlorcalcium, wasserfreiem Kupfervitriol und Schwefelsäure getrocknet und in einer mit Natronkalk gefüllten, vorher gewogenen Glasröhre gebunden. Die Gewichtszunahme dieser Röhre gab die Kohlensäure.

Die Schwefelsäure wurde aus 1 Liter Wasser wie gewöhnlich durch Ansäuern mit Salzsäure und Fällung mit Chlorbarium als schwefelsaurer Baryt bestimmt.

Zur Bestimmung des Chlors wurde 1 Liter Wasser bis zur Vertreibung des sämmtlichen Schwefelwasserstoffes gekocht, hierauf filtrirt und aus dem mit Salpetersäure angesäuerten Filtrate als Chlorsilber gefällt und gewogen.

Schwefelwasserstoff wurde an der Quelle sowohl mit als ohne Zusatz von Essigsäure, mit ungefähr $\frac{1}{100}$ Normal-Jodlösung titrirt und gab übereinstimmende Resultate. Zur gewichtsanalytischen Controle dieser Bestimmung wurden vier mit Chlorkadmium versehene Flaschen an der Quelle mit je 622·5 CC. Wasser gefüllt. Der abfiltrirte und ausgewaschene Niederschlag wurde mit rauchender Salpetersäure oxydirt und daraus die Schwefelsäure als schwefelsaurer Baryt bestimmt.

Zur Bestimmung von Kieselsäure, Kalk, Magnesia, Kali und Natron wurden 3 Liter Mineralwasser mit Chlorwasserstoffsäure angesäuert in einer Platinschale im Wasserbade eingedampft, — der trockene Rückstand mit Salzsäure befeuchtet, ein wenig Wasser hinzugefügt und nochmals im Wasserbade zur Trockene gebracht; — hierauf der vorher mit Salzsäure befeuchtete Rückstand im Wasser gelöst, die Kieselsäure abfiltrirt und gewogen.

Das Filtrat, mit Ammoniak versetzt und bis zur Vertreibung des überschüssigen Ammoniaks gekocht, zeigte nur eine kleine Spur schwach rostbraun gefärbten Thonerdeniederschlages, welcher abfiltrirt als unbestimmbar beseitigt wurde.

Aus dem Filtrate wurde mit Ammoniak und Oxalsäure der Kalk gefällt und sowohl als kohlensaurer wie auch als schwefelsaurer Kalk gewogen.

Die im Filtrate noch vorhandene Schwefelsäure wurde nach Ansäuerung mit Salzsäure durch Chlorbarium entfernt, — hierauf das überschüssige Barytsalz aus dem ammoniakalischen Filtrate mit kohlensaurem Ammon gefällt, — das Filtrat hievon zur Trockene gebracht und die Ammonsalze vertrieben. Nun fügte man eine solche Menge Oxalsäure hinzu, als wäre die vierfache Menge eines dem Rückstande gleichen Gewichtes von Ätzkali zu sättigen. Das Ganze wurde der innigen Mengung wegen in ein wenig Wasser gelöst, zur Trockene gebracht und so lange geglüht, bis Alles wieder möglichst weiss ward. Die erkaltete Masse wurde mit Wasser digerirt, filtrirt und gut ausgewaschen. Der aus reiner Magnesia bestehende Niederschlag wurde in Salzsäure gelöst, mit phosphorsaurem Natron gefällt und als pyrophosphorsaure Magnesia gewogen.

Das die Alkalien enthaltende Filtrat wurde mit Chlorwasserstoffsäure versetzt und in einem gewogenen Platintiegel zur Trockene gebracht, geglüht und so durch Wägung die Summe der Chloralkalien bestimmt.

Die mit wenig Wasser gelösten Chloralkalien wurden mit einem Überschusse von Platinchlorid versetzt, bis nahe zur Trockene eingeengt, — mit einem Gemenge von Alkohol und Äther auf ein gewogenes Filter gebracht, mit demselben Gemenge gut ausgewaschen, bei 100° C. getrocknet und das Kalium als Kaliumplatinchlorid gewogen.

Ammoniumoxyd wurde nach Boussingault bestimmt. Ein mit Kalilauge versehener Glasballon, mit einem Liebig'schen Kühler in Verbindung, wurde durch längeres Kochen der Lauge vollständig gereinigt, — hierauf in die Vorlage 20 CC. Normalsalzsäure und in den Ballon 4 Liter Mineralwasser gebracht, $^2/_3$ des letzteren in die Vorlage überdestillirt und das Destillat mit Normalkali zurücktitrirt.

Zur Bestimmung des beim Kochen gelöst bleibenden Kalkes wurden zwei Liter Mineralwasser durch drei bis vier Stunden gekocht, wobei das verdampfte Wasser stets durch destillirtes ersetzt wurde. Aus dem Filtrate dieses Wassers wurde der Kalk in der bereits oben, bei Bestimmung des Gesammtkalkes angeführten Weise bestimmt.

Sämmtliche bis hierher angeführten Bestimmungen wurden je zweimal ausgeführt.

Nachdem bereits an der Quelle ein Versuch mit Nitroprussidnatrium constatirte, dass keine Schwefelalkalien vorhanden sind, wurde zum Zwecke der Bestimmung unterschwefeligsaurer Alkalien eine Flasche vollständig mit Mineralwasser gefüllt und mit einem Kautschukpfropfen dicht verschlossen in's Laboratorium mitgebracht.

Durch ein Liter dieses Wassers leitete man an einem kühlen Orte so lange (durch Quecksilberchlorid und Kalilauge gereinigtes) Wasserstoffgas, bis eine schwach blaue Stärkelösung nicht mehr entfärbt wurde, worauf die unterschwefelige Säure mit Jod titrirt wurde.

Thonerde, Eisen, Strontian und Lithion wurden aus 15 Liter Wasser bestimmt.

Eisenoxyd und Thonerde wurden mittelst Ammoniak gefällt, zusammen gewogen, hierauf das Eisen mit chromsaurem Kali titrirt.

Zur Bestimmung des Strontians wurden die als kohlensaurer Kalk, kohlensaurer Strontian und reine Magnèsia gemengt erhaltenen Erdalkalien vor dem Gebläse heftig geglüht, mit Wasser sorgfältig ausgezogen, das Filtrat mit Salpetersäure angesäuert, zur Trockene gebracht, durch eine Mischung von Alkohol und Äther der salpetersaure Kalk gelöst, und der salpetersaure Strontian in schwefelsaures Salz umgewandelt als solches gewogen.

Die von den Erden abgeschiedene Lösung der Alkalien wurde eingeengt, nach Ansäuern mit Salzsäure die Schwefelsäure durch Chlorbarium entfernt, das überschüssige Barytsalz durch kohlensaures Ammon gefällt, das Filtrat nahe zur Trockene gebracht, mit einer Mischung von Alkohol und Äther digerirt, filtrirt, — das Filtrat zur Trockene gebracht, mit Wasser aufgenommen und daraus Lithion als basisch phosphorsaures Lithion gefällt, zur Trockene gebracht, mit einer Mischung von gleichen Volumtheilen Wasser und Ammoniakflüssigkeit 12 Stunden stehen gelassen, filtrirt, mit einer gleichen Mischung von Ammon und Wasser ausgewaschen und als basisch-phosphorsaures Lithion gewogen.

Zur Bestimmung der organischen Substanz wurde ein Liter Mineralwasser mit kohlensaurem Natron gekocht, filtrirt, in einem gewogenen Platintiegel eingedampft, bei 140° Cels. getrocknet und nach darauf folgendem Ausglühen und Behandlung mit kohlensaurem Ammon aus dem Gewichtsverluste die organische Substanz gefunden.

Gase. Die mit dem Quellwasser aufsteigenden Gasblasen wurden in Glasröhren aufgefangen, eingeschmolzen und im Laboratorium untersucht.

In eine Absorptionsröhre überfüllt, wurde das Gas feucht gemessen und eine Kalikugel zur Absorption von Kohlensäure und Schwefelwasserstoff eingeführt.

Nach dem Herausnehmen wurde die Kalikugel in mit Essigsäure angesäuertem, vorher aber ausgekochtem, destillirtem Wasser gelöst und Schwefelwasserstoff mit Jod titrirt.

Dieser auf sein Volumen bei 0° Cels. und einem Meter Druck überrechnet und von dem absorbirten Gasvolumen abgezogen, gab als Rest die Kohlensäure.

Durch Phosphor wurde hierauf Sauerstoff absorbirt und die entstandene phosphorige Säure durch Kali entfernt.

Der Rest des Gases wurde theilweise in einen Eudiometer überfüllt, mit Sauerstoff und Knallgas versetzt, verbrannt und die Contraction bestimmt. Da eine hierauf eingeführte Kalikugel das Volum blos der Tension des Wasserdampfes entsprechend verminderte, so ist die Abwesenheit von Kohlensäure (bei der Verbrennung entstandener) und hiermit Kohlensäure als die einzige im Quellgase vorhandene Kohlenstoffverbindung constatirt. Die Contraction entsprach blos freiem Wasserstoffgase.

Der verbleibende Gasrest war Stickstoff. Zur Bestimmung der im Wasser absorbirten Gase wurden an der Quelle Ballons von 800—900 CCt. Inhalt mit Wasser gefüllt, hermetisch verschlossen und im Laboratorium ganz nach Bunsen's Vorschrift ausgekocht. Zu bemerken ist hiebei, dass trotz dreistündigem Kochen das Wasser noch ziemlich deutlich nach Schwefelwasserstoff roch; — es wurden daher in dem erhaltenen Gasgemenge Schwefelwasserstoff und Kohlensäure nicht bestimmt, da die Mengen dieser beiden Gase sich andererseits ohnehin aus der Berechnung der Gewichtsanalyse hinreichend genau ergeben. Sauerstoff, Wasserstoff und Stickgas mussten vollständig entwichen sein, da Wasser für dieselben eine geringere Absorptionsfähigkeit hat.

Sauerstoff wurde hier durch pyrogallussaures Kali absorbirt; — Wasserstoff und Stickstoff wie oben bestimmt.

Versuche.

Specifisches Gewicht.

Eine das Piknometer bei 0° Cels. bis zu einer bestimmten Marke füllende Menge wog von:

Mineralwasser	beim 1. Versuch	Grm.	35·4005
	„ 2. „	„	35·3865
destillirtem Wasser	beim 1. Versuch	„	35·3345
	„ 2. „	„	35·3230
daher im Mittel das specifische Gewicht		„	1·0018

			Im Mittel sind enthalten in 10.000 Theilen	
Summe der fixen Bestandtheile.				
Aus 500 CC. bei 180° Cels. getrocknet:				
1. Bestimmung	Grm.	0·967	19·329	—
2. „	„	0·965		
Die Summe der schwefelsauren Salze.				
1. Bestimmung	Grm.	1·037	20·770	—
2. „	„	1·040		
Kohlensäure.				
Aus 271 CC. 1. Bestimmung CO_2	Grm.	0·0715	2·630	CO_2
2. „ „ „	„	0·0710		
Schwefelsäure.				
Aus 1 Liter. 1. Bestimmung $BaOSO_3$	Grm.	1·8945	6·506	SO_3
2. „ „ „	„	1·8950		
Chlor.				
Aus 1 Liter. 1. Bestimmung AgCl	Grm.	1·444	3·595	Cl
2. „ „ „	„	1·442		

				Im Mittel sind enthalten in 10.000 Theilen	
Schwefelwasserstoff.					
Aus 500 CC.	1. Bestimmung	56·6 CC.	Jodlösung vom Gehalte 1 CC. = 0·001 Grm. Jod		
	2. „	57·0 „			
Mit Anwendung von Essigsäure	3. „	57·0 „			
	4. „	57·3 „			
Im Mittel auf 1 Liter		114·0 „			
Die unterschwefelige Säure erfordert auf 1 Liter		8·0 „			
Demnach entfallen auf Schwefelwasserstoff		106·0 „			
Diese entsprechen			SH Grm. 0·0142	0·143	SH
Controle. Aus 622·5 CC.					
1. Bestimmung			$BaOSO_3$ Grm. 0·0612		
2. „			„ „ 0·0607		
Kieselsäure.					
Aus 3 Liter. 1. Bestimmung			SiO_2 Grm. 0·0675	0·226	SiO_2
2. „			„ „ 0·068		
Kalk.					
Aus 3 Liter. 1. Bestimmung			$CaOCO_3 + SrOCO_3$ Grm. 2·2140		
			$CaOSO_3 + SrOSO_3$ „ 3·0110		
2. „			$CaOCO_3 + SrOCO_3$ „ 2·2065		
			$CaOSO_3 + SrOSO_3$ „ 3·0010		
Mittel auf 10 Liter . .			$CaOCO_3 + SrOCO_3$ „ 7·3675		
			$CaOSO_3 + SrOSO_3$ „ 10·0200		
Hievon 0·034 Grm. Strontian entsprechend . .			$SrOCO_3$ „ 0·0484		
			$SrOSO_3$ „ 0·0603		
Rest			$CaOCO_3$ „ 7·3191	4·100	CaO
			$CaOSO_3$ „ 9·9597		
Magnesia.					
Aus 3 Liter. 1. Bestimmung. . .			$2MgOPO_5$ Grm. 1·114	1·331	MgO
2. „ . .			„ „ 1·103		
Kali.					
Aus 3 Liter. 1. Bestimmung . .			$KClPtCl_2$ Grm. 0·3025	0·196	KO
2. „ . .			„ „ 0·307		

	Im Mittel sind enthalten in 10.000 Theilen	
Natron.		
Aus 3 Liter. Summe der Chloralkalien { 1. Bestimmung . . Grm. 1·620 / 2. „ . . „ 1·617		
Im Mittel in 10.000 Theilen . . . . . 5·395		
Hievon { 0·196 KO entsprechend . . . KCl 0·3100 / 0·005 LiO „ . . . LiCl 0·0141		
Rest . . . . . NaCl 5·0709	2·6956	NaO
Ammoniumoxyd.		
Aus 4 Liter. ClH vorgelegt . 20 CC. Zurücktitrirt bei der { 1. Bestimmung 19·5 „ / 2. „ 19·6 „ } { 1 CC. der Normalflüssigkeiten = 0·026 NH_4O }	0·029	NH_4O
Beim Kochen gelöst bleibender Kalk.		
Aus 2 Liter. 1. Bestimmung . . . $CaOCO_2$ Grm. 1·587		
$CaOSO_3$ „ 2·158		
2. „ . . . $CaOCO_2$ „ 1·589	2·957	CaO
$CaOSO_3$ „ 2·141		
Unterschwefelige Säure.		
Aus 1 Liter. An Jodlösung (vom Gehalte 1 CC. = 0·001 Grm. Jod) verbraucht . . . . . 8 CC	0·0605	S_2O_2
Eisenoxyd und Thonerde.		
Aus 15 Liter. . . . . $Fe_2O_3 + Al_2O_3$ Grm. 0·0107		
Titrirt: 0·0008 Fe, entsprechend . Fe_2O_3 „ 0·0011	0·0007	Fe_2O_3
Rest . . . . . Al_2O_3 „ 0·0096	0·0064	Al_2O_3
Strontian.		
Aus 15 Liter. . . . . $SrOSO_3$ Grm. 0·051	0·034	SrO
Lithion.		
Aus 15 Liter. . . . . $3LiO.PO_5$ Grm. 0·020	0·005	LiO
Organische Substanz.		
Aus 1 Liter. . . . . Glühverlust Grm. 0·0415	0·415	—

Verbindet man diese Bestandtheile nach ihren Verwandtschaftsverhältnissen, so ergibt sich als Gehalt des Wassers:

	In 10.000 Theilen	In 1 Wiener Pfd. Grane
Fixe Bestandtheile.		
Schwefelsaurer Kalk	7·181	5·505
„ Strontian	0·060	0·046
Schwefelsaures Kali	0·362	0·278
„ Natron	3·710	2·844
Unterschwefeligsaures Natron	0·100	0·077
Chlornatrium	1·958	1·501
„ Lithium	0·014	0·011
„ Ammonium	0·060	0·046
„ Magesium	3·151	2·416
Einfach-kohlensaurer Kalk	2·041	1·565
„ kohlensaure Magnesia	0·020	0·015
Kieselsäure	0·226	0·173
Eisenoxyd und Thonerde	0·006	0·005
Organische Substanz	0·415	0·318
Zusammen	19·304	14·800
(Direct bestimmte Summe der fixen Bestandtheile)	19·329	
Flüchtige Bestandtheile.		
Halbgebundene Kohlensäure	0·909	0·697
Freie Kohlensäure	0·813	0·623
Schwefelwasserstoff	0·143	0·110
Zusammen	1·865	1·430

Gase.

Mit der Quelle frei aufsteigende Gase.

	Volumen	Druck in Meter	Temperatur in Cels. °	Volumen bei 0° C. und 1 Meter Druck	Die Differenz ist	
In der Absorptionsröhre.						
Angewandtes Gasvolum . . .	93·1	0·6659	19·0	56·73		
Nach Absorption von CO_2 und					1·23	CO_2+SH
und SH	87·9	0·6777	19·5	55·50		
Nach Absorption von O . .	80·2	0·6682	20·3	49·57	5·93	O
Übertragung in den Eudiometer.						
Anfangsvolum	88·3	0·2337	20·6	19·18		
Nach Hinzugabe von O . . .	401·0	0·5221	20·3	194·9		$\frac{1}{3}O+$
„ Verbrennung mit Knall-					1·1	
gas	400·2	0·5217	21·1	193·8		$\frac{2}{3}H$
Nach Absorption der Wasser-					0·0	CO_2
dämpfe	387·0	0·5367	19·7	193·8		

Titrirung des Schwefelwasserstoffes.

Verbraucht wurde 1 CC. Jodlösung vom Gehalte 1 CC. = 0·001 Grm. Jod;

1 CC. Schwefelwasserstoffgas wiegt bei 0° C. und 1 Meter Druck 0·0019991 Grm.;

1 Einheit der rectificirten Absorptionsröhre hält 0·217:

Demnach ist vorhanden . . . . . 0·47 SH Gas

Auf 100 Volumen des ursprünglichen Gasgemenges berechnet ergibt sich daher:

Kohlensäure	1·4	Volumtheile,
Schwefelwasserstoff	0·8	„
Sauerstoffgas	10·4	„
Wasserstoffgas	3·9	„
Stickgas	83·5	„
Zusammen .	100·0	Volumtheile.

Vom Wasser absorbirte Gase.

	Volumen	Druck in Meter	Temperatur in Cels. °	Volum bei 0° C. und 1 Meter Druck	Die Differenz ist	
Im Eudiometer.						
Aus 850 CC. Mineralwasser.						
Nach Beseitigung von CO_2 und SH	320·5	0·4521	21·1	133·8	11·7	0
Nach Absorption von O . . .	301·5	0·4367	21·5	122·1		
„ Hinzugabe von O . . .	451·4	0·5749	22·1	240·0	1·8	½ O
„ Verbrennung mit Knallgas	447·7	0·5746	21·7	238·2		⅔ H

1 Einheit des rectificirten Eudiometers = 0·2150 CC.; obige 11·7 O sind demnach 2·52 CC. bei 0° C. und 1 Meter Druck

„ $\frac{2}{3}$. 1·8 H „ „ 0·26 „ „ „ „ „ „ „ „

Die Gewichtsanalyse gab an halbgebundener und freier Kohlensäure in 10.000 Theilen Wasser 1·722 Grm.

Da nun 1 Liter Kohlensäure bei 0° C. und 760 Millim. Druck 1·9659 Grm. wiegt, so sind 1·722 Grm. = 875·9 CC. CO_2.

Eben so sind, da 1 Liter Schwefelwasserstoffgas unter denselben Verhältnissen 1·5193 Grm. wiegt, 0·143 Grm. Schwefelwasserstoff = 94·1 CC. SH.

1 Liter Mineralwasser hat demnach absorbirt:

Kohlensäure	66·57 CC.	von 0° C. unter 1 Meter Druck.
Schwefelwasserstoff . . .	7·15 „	
Sauerstoff	2·96 „	
Wasserstoff	0·31 „	
Stickstoff	30·43 „	
Zusammen	171·79 CC.	

Im Jahre 1863 wurde von den beiden Herrn Artillerie-Oberlieutenants Ferd. Podzimek und Jos. Travniczek die Quelle im Sauerhofe in Baden untersucht. Ein Vergleich der Resultate dieser

Analyse mit der hier dargelegten der Frauenquelle dürfte nicht unstatthaft sein. Zu diesem Zwecke sollen hier die Resultate dieser beiden Analysen neben einander gestellt werden.

Direct gefunden wurden:

	In 10.000 Theilen des Wassers der	
	Quelle im Sauerhofe	Frauenquelle
Kohlensäure	2·130	2·630
Schwefelsäure	6·634	6·506
Chlor	3·800	3·595
Schwefelwasserstoff	0·125	0·143
Unterschwefelige Säure	—	0·061
Kieselsäure	0·357	0·226
Kali	0·242	0·196
Natron	2·736	2·696
Lithion	0·011	0·005
Ammoniumoxyd	—	0·029
Kalk	4·413	4·100
Strontian	0·086	0·034
Magnesia	1·080	1·331
Eisenoxyd	0·0195	0·0007
Thonerde	0·0105	0·0064
Organische Substanz	0·392	0·415

Man sieht hieraus, dass die beiden Quellen nicht wesentlich verschieden sind. Der wesentlichste Unterschied besteht in dem Vorhandensein von unterschwefeliger Säure und Ammoniak in der Frauenquelle, — doch sind diese beiden Körper hier in einem Masse vorhanden, in welchem sie medicinisch kaum von praktischer Bedeutung sein werden.

Die wahrscheinliche Combination dieser Bestandtheile zu Salzen ist die folgende:

	In 10.000 Theilen des Wassers der	
	Quelle im Sauerhofe	Frauenquelle
Schwefelsaurer Kalk	9·322	7·181
„ Strontian	0·153	0·060
Schwefelsaures Kali	0·447	0·362
„ Natron	1·559	3·710
Untersehwefeligsaures Natron	—	0·100
Chlornatrium	3·539	1·958
„ Lithium	0·029	0·014
„ Ammonium	—	0·060
„ Magnesium	2·146	3·151
Kohlensaurer Kalk	1·026	2·041
Kohlensaure Magnesia	0·456	0·020
Kohlensaures Natron	0·306	—
Kieselsäure	0·357	0·226
Eisenoxyd und Thonerde	0·029	0·006
Phosphorsäure	Spur	—
Organische Substanz	0·392	0·415
Zusammen	19·761	19·304
Direct bestimmte Summe der fixen Bestandtheile	19·800	19·329

Die grösseren Verschiedenheiten, welche sich hier zeigen, haben wohl mehr in der bis jetzt üblichen Methode der Berechnung ihren Grund. Direct durch den Versuch festgestellt ist nur die Menge des kohlensauren Kalkes, von welchem die Frauenquelle das Doppelte der Sauerhofquelle enthält; — von den übrigen Verbindungen kann man nur sagen, dass sie wahrscheinlich in dem Verhältnisse vorhanden sind, in dem sie hier erscheinen. So ist die grössere Menge schwefelsauren Natrons in der Frauenquelle blos durch die kleinere Menge des beim Kochen gelöst bleibenden Kalkes durch den geringeren Gehalt an Strontian und Kali indirect gerechtfertiget, da nur angenommen wird, dass diese Körper sich vor Allem der Schwefelsäure bemächtigen, deren Rest erst an Natron gebunden ist. Hiedurch

ist dann ferners in der Frauenquelle der geringere Gehalt an Chlornatrium und der gänzliche Mangel an kohlensaurem Natron erklärlich.

Im Allgemeinen ist die Frauenquelle etwas ärmer an fixen Bestandtheilen, doch ist dies sehr unbedeutend.

Ein etwas bedeutenderer Unterschied besteht zwischen den frei aufsteigenden Gasen. In 100 Volumtheilen dieser Gase sind enthalten:

	In der	
	Sauerhofquelle	Frauenquelle
Kohlensäure	1·03	1·4
Schwefelwasserstoff	0·69	0·8
Sauerstoff	—	10·4
Wasserstoff	2·44	3·9
Stickstoff	95·84	83·5

Die Gase des Frauenbades haben eine nicht unbedeutende Menge Sauerstoff, während dieser in der Sauerhofquelle gänzlich fehlt.

Berechnet man auch in der Analyse der Sauerhofquelle den absorbirten Schwefelwasserstoff und die Kohlensäure aus der Gewichtsanalyse (denn auch den Herren Podzimek und Travniczek gelang die völlige Absonderung des absorbirten Schwefelwasserstoffes nicht), so erhält man beiderseits aus 1000 CC. Mineralwasser.

	Der Sauerhofquelle	Der Frauenquelle
	CC. Gas bei 0° Cels. und 1 Meter Quecksilberdruck	
Kohlensäure	50·76	66·57
Schwefelwasserstoff	6·25	7·15
Sauerstoff	3·32	2·95
Wasserstoff	0·26	0·31
Stickgas	43·05	30·43
Zusammen	103·64	107·41

Die Summe der absorbirten Gase ist nahezu gleich. Von Bedeutung könnte nur der höhere Gehalt der Frauenquelle an Kohlensäure sein, — denn die die Summe wieder gleichstellende Differenz im Stickstoffgehalt kömmt ganz ausser Betracht, da Stickstoff ein höchst indifferentes Gas ist.

Was die Temperatur betrifft, ist die Frauenquelle um beiläufig 1·5° Cels. höher als die der Sauerhofquelle. Diese hat blos 33·6°, jene 35° Cels.

Eine absolute Bestimmung der Wellenlängen der Fraunhofer'schen D-*Linien.*

Ausgeführt im k. k. physikalischen Institute.

Von **L. Ditscheiner.**

Nachdem ich im October v. J. meine „Bestimmungen der Wellenlängen der Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspectrums“ [1]) der hohen Classe vorzulegen die Ehre hatte, war mir aus dem Novemberhefte von Pogg. Ann. (123, 489) eine früher schon in der Oefversigt af k. Vet. Akad. Förh. 1863, Nr. 2 erschienene Abhandlung von Ångström bekannt geworden, in der beinahe von einer eben so grossen Anzahl Fraunhofer'scher Linien die Wellenlängen angegeben werden, und der noch der Vorzug zukam, dass darin ihre absolute Grösse bestimmt worden war, da Ångström die Spaltenbreite seines Gitters, nach den Angaben des Verfertigers Herrn Nobert, kannte, während ich damals nicht in der Lage, diese Spaltenbreite für mein Gitter bestimmen zu können, und diese selbst nicht angegeben war. Da das Gitter von Fraunhofer selbst verfertigt, so lag es nahe, um die Wellenlänge einer grösseren Anzahl von dunklen Linien als Fraunhofer sie bestimmt hatte, kennen zu lernen, eine der von ihm gemessenen Linien als Ausgangspunkt zu benützen. Die Ångström'schen Angaben weichen aber etwas von jenen Fraunhofer's ab, so dass in mir der Wunsch rege wurde, die Spaltenbreite meines Gitters so genau als möglich zu bestimmen, um auch meinen Messungen eine absolute Bestimmung zu Grunde legen zu können. Ich bin nun mit Gegenwärtigem in der angenehmen Lage, diese von Fraunhofer unabhängige Wellenlängenbestimmung seiner beiden *D*-Linien vorlegen zu können.

Zu dieser Bestimmung war es nothwendig, erstens die Anzahl der Linien des Gitters und zweitens die Entfernung der ersten von der letzten zu kennen. Um die Anzahl der Linien zu erfahren, gibt es

---

[1]) Sitzb. 50. Bd. S. 296.

wohl nur eine Methode, die, so einfach sie auch zu sein scheint, doch nicht geringe Schwierigkeiten darbietet, nämlich sie unmittelbar zu zählen. Zu diesem Behufe wurde das Gitter unter einem Plössl'schen Mikroskope, bei 172maliger Vergrösserung, mit Hilfe der Mikrometerschraube durchgezogen und die Anzahl der so vorbeigewanderten Linien gezählt. Da das Gitter zu breit war, um alle Linien auf einmal durchlaufen lassen zu können, so musste das Gitter selbst in Theile getheilt werden, so dass man dort, nach einer Verschiebung des Gitters und nach Zurückdrehen der Mikrometerschraube, wieder zu zählen beginnen konnte, wo man aufgehört hatte. Es geschah diese Theilung durch Punkte, welche mit Tinte etwa auf dem Gitter bemerkbar gemacht wurden, Punkte die sich unter dem Mikroskope wohl nicht als solche, sondern vielmehr als grosse Flecken darstellten, in denen jedoch noch sehr gut die einzelnen Linien des Gitters sich zeigten. In diesem Flecken war, da ihre Form nach aussen begreiflicher Weise eine sehr verschiedene war, leicht eine solche Gitterlinie zu fixiren und es so möglich, einen Anhaltspunkt für die Zählung im andern Theile des Gitters zu gewinnen. Die Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Anzahl dieser Linien liegt nur im Zählen selbst, und es verlangt diese eine nicht geringe Übung und eine ganz besondere Aufmerksamkeit, da nichts leichter ist als das Verzählen, namentlich desshalb, weil die Mikroskope keineswegs so eisenfest gebaut sind, dass nicht unbedeutende Veränderungen in der Umgebung desselben einen merklichen und hindernden Einfluss hätten. Zur Erleichterung des ganzen Zählens war das Gitter, das etwa 6 Linien breit war, durch solche Punkte in zwölf Theile getheilt worden. Allen diesen Schwierigkeiten entgeht man natürlicher Weise, wenn die Anzahl der Linien bei Verfertigung des Gitters gezählt worden sind, oder, wenn dies die Theilmaschine selbst verrichtet. Dass diese Linien mehrmals gezählt wurden, von den verunglückten unzähligen Versuchen abgesehen, dürfte wohl kaum zu erwähnen sein.

Die Bestimmung der Entfernung der ersten von der letzten Linie des Gitters ist wegen der Genauigkeit mit der dieselbe gemacht werden muss, auch eine ziemlich schwierige. Die Möglichkeit dieser Ausführung verdanke ich der besonderen liebenswürdigen und aufopfernden Unterstützung seitens des Herrn Professors Dr. J. Herr, unter dessen Leitung die mathematische Sammlung des k. k. polytechnischen Institutes sich befindet, welche im Besitze des vom

Professor Stampfer bis auf das genaueste untersuchten Comparators (s. Jahrbuch des polyt. Institutes Bd. 18, S. 149) ist. Auf demselben ist die Orginal-Wiener Klafter aufgetragen, dieselbe welche Prof. Stampfer mit dem Meter verglichen hatte, so dass über die Richtigkeit der zu Grunde gelegten Maasseinheit kein Zweifel sein kann. Man ist mit diesem Instrumente im Stande bis auf 0·001", bei grösserer Übung selbst bis auf 0·0002" wahrscheinlicher Unsicherheit die Länge einer Linie anzugeben. Wenn diese Genauigkeit im gegenwärtigen Falle trotz Berücksichtigung der Temperatur u. s. w. auch nicht erreicht worden, so hat dies seinen leicht begreiflichen Grund in der Pointirung, die bei so wenig tief eingerissenen Linien keine so präcise sein kann, wie sie bei anderen Längenmessungen möglich ist. Da der Comparator nur grössere Längen, wegen der Dimensionen der Mikrometer, unmittelbar angeben kann, so musste, nachdem das Gitter auf einem dicken Glaslineale befestiget worden, auf letzterem noch ein Hilfspunkt in derselben Höhe wie die Gitterfläche angebracht werden, so dass die Differenz der Entfernung der beiden Enden des Gitters von dem Hilfspunkte die Gitterbreite selbst lieferte. Es war dieser Hilfspunkt von dem ihm näher gelegenen Gitterrande um nahe 4 Zoll entfernt, so dass noch in jenem Theile des Comparators gemessen werden konnte (von 69"—73"6"), in welchem die Theilungsfehler von Linie zu Linie bestimmt wurden.

Am Fraunhofer'schen Gitter wurden zehn Messungen gemacht, welchen zur Folge die Gitterbreite, d. i. die Entfernung der ersten und der letzten Linie, nach Correction bezüglich der Temperatur und der Theilungsfehler am Comparator, ist

6·3203	6·3216
6·3202	6·3218
6·3195	6·3223
6·3192	6·3227
6·3203	6·3233

sonach im Mittel

= 6·3213 Wiener Linien[1])
= 13·8765 Millim.

„eine Zahl, die auf 0·001 W. Linien = 0·0022 Millim. wohl sicher sein dürfte."

---

[1]) 1 W. Zoll = 26·342439 Millim

Für das von mir ebenfalls zu einer Messung benützte Plössl'sche Gitter, ergab sich die Entfernung der zweiten Linie von der vorletzten (wegen des sicheren Pointirens wurden nämlich in diesem Falle nicht wie beim Fraunhofer'schen die erste und letzte genommen, da man bei dem Plössl'schen bei etwa 40maliger Vergrösserung der Mikrometer schon die einzelnen Gitterlinien unterscheiden konnte, während bei der Fraunhofer'schen nur die Grenze zwischen der glatten Glasfläche und der eigentlichen Gitterfläche scharf gesehen werden konnte), aus folgenden corrigirten Messungen

8·07561	8·07469
8·07471	8·07511
8·07497	8·07646

im Mittel als

8·0753 Wiener Linien

= 17·7269 Millim.

mit einem mittleren Fehler von 0·0003‴.

Da für das Fraunhofer'sche Gitter die Zahl der eingerissenen Linien 2997 ist, so ist die Spaltenbreite desselben

0·0046317 Millim.,

wonach die Wellenlängen der beiden *D*-Linien 1002·8 und 1006·8, welche ich früher als 589·44 und 588·80 Millionteln des Millimeters angenommen, die etwas grösseren Werthe

590·53 und 589·89

Millionteln des Millimeters erhalten.

Bei der Prüfung des Gitters unter dem Mikroskope zeigten sich alle einzelnen Linien gleichweit von einander entfernt und von gleicher Dicke, auch waren die erste und letzte Linie nicht tiefer eingerissen als die dazwischen liegenden, wie dies Fraunhofer bei den von ihm benützten angibt.

Für die Spaltenbreite des Plössl'schen Gitters, welches im Ganzen 1610 Linien enthält, so dass zwischen der zweiten und vorletzten Linie, deren Distanz oben angegeben, 1607 Spaltenbreiten sich befinden, erhält man den Werth

$b + c = 0 \cdot 0110305$ Millim.

In dem zweiten Spectrum ist bei senkrecht einfallendem Lichte für die eine *D*-Linie (1006·8) die Deviation 6°9'40", es ergibt sich also als Werth für die Wellenlänge dieser Linie

591·92

eine Zahl, die von der oben angegebenen um ein bedeutendes abweicht. Aber schon die mikroskopische Untersuchung liess eine solche Abweichung erwarten, denn es zeigten sich die einzelnen Gitterlinien nicht sehr genau gleichweit, und namentlich gegen die Enden des Gitters waren die Linien viel weiter von einander entfernt als in der Mitte, wenn auch die Zahl der letzteren weit bedeutender ist als jene der ersteren. Aber noch mehr gaben diese ungleichen Distanzen der Linien ihren Einfluss bei Beobachtung der Spectra selbst kund. Schon im zweiten Spectrum zeigten sich zwei schwächere *D*-Linien mit geringerer Deviation als die starken, im dritten aber liessen sich ausser zwei Paaren von *D*-Linien noch drei Gruppen, wie sie bei *b* sich im Spectrum zeigen, deutlich erkennen, selbst so, dass man sich über die grössere oder geringere Schwärze von zweien dieser Gruppen im Zweifel befinden konnte. Die Messungen, welche ich in diesen Spectren gemacht, lassen es vermuthen, dass hier drei, vielleicht auch noch mehr Spectra über einander gelagert sind, die den neben einander liegenden Gruppen verschieden weit entfernter Gitterlinien ihre Entstehung verdanken. Eine dieser Messungen, die bei senkrecht auffallendem Lichte gemacht worden ist, will ich hier anführen. Die Fraunhofer'schen Linien sind mit ihren gebräuchlichen Buchstaben neben der ihnen entsprechenden Deviation angeführt, in jedem Spectrum sind die stärksten derselben ohne Striche, die schwächeren mit Strichen und die schwächsten mit zwei solchen angeführt. Auch sind die Wellenlängen beigefügt, wie sie der gefundenen Spaltenbreite und der Deviation entsprechen.

II. Spectrum.

F	5°	5'	3"	488·76
b	5	25	20	521·16
D	6	9	40	591·92
	6	10	1	592·48
D'	6	15	16	600·85
	6	15	35	601·26
C	6	52	0	659·40
C'	6	58	23	669·57

III. Spectrum.

F'		7°	42'	46"	493·46
F		7	38	14	488·66
b''	(1634)	8	4	0	515·96
b'		8	8	51	521·09
b		8	13	51	526·39
D'		9	15	53	600·60
		9	16	26	601·21
D		9	24	35	591·98
		9	25	12	592·56

Es ergibt sich aus diesen Messungen, dass die Linien D im zweiten Spectrum jenen D' im dritten und D' im zweiten jenen D im dritten, dass also die stärkeren im zweiten den schwächeren im dritten entsprechen, wenngleich von vorneherein zu erwarten war, dass die stärkeren Gruppen des zweiten zu den starken des dritten Spectrums gehören. Aber auch dies scheint mir erklärlich, wenn man die Intensitätsformeln berücksichtiget. Die Dicke der eingerissenen Linien ist bei diesem Gitter nicht merklich verschieden, c ist also an allen Stellen des Gitters gleich, nur b ist verschieden. Für die Intensität besteht aber für das n^{te} Spectrum die Formel

$$J = a^2 b^2 z^2 . \left(\frac{\sin \frac{n\pi b}{b+c}}{\frac{n\pi b}{b+c}} \right)^2$$

für die eine Gruppe gleichweiter Linien des Gitters, und für eine andere Gruppe von anderer gegenseitiger Entfernung der Linien

$$J' = a_1^2 b_1^2 z_1^2 . \left(\frac{\sin \frac{n\pi b_1}{b_1+c}}{\frac{n\pi b_1}{b_1+c}} \right)^2,$$

so dass das Verhältniss dieser beiden Intensitäten für die einander entsprechenden Gruppen in den verschiedenen Spectren auch ein anderes sein kann. Für den Fall etwa, dass $\frac{b}{b+c} = \frac{1}{2}$ und $\frac{b_1}{b_1+c} = \frac{1}{3}$ ist, werden im zweiten und dritten Spectrum nur immer eine Gruppe erscheinen, die aber nicht zusammengehörig sind, der im zweiten Spectrum würde $J = 0$ entsprechen und J' hätte einen bestimmten Werth, während im dritten J einen bestimmten Werth hätte und $J' = 0$ wäre, in dem einen Falle wäre $\frac{J_1}{J} = \infty$ in dem andern $\frac{J}{J_1} = \infty$.

Es wäre interessant gewesen solche Spectra ungenau gearbeiteter Gitter näher zu untersuchen, aber die Schwierigkeiten, die sich bei solchen Untersuchungen darbieten, sind zu schwer zu überwinden, wenn dieses überhaupt möglich ist, als dass ich in der Lage wäre genauere Resultate mittheilen zu können.

Ich gebe zum Schlusse nur noch eine Zusammenstellung der Wellenlängen, wie sie sich nach Umrechnung bezüglich der neuen Spaltenbreite des Fraunhofer'schen Gitters ergeben und will hier nur bemerken, dass ihre relativen Werthe (bei Annahme einer gleichen Wellenlänge irgend einer Linie) mit den von Ångström angegebenen in so hohem Grade übereinstimmen, wie dies nur immer gewünscht werden kann. Auch mit den von Mascart gegebenen Werthen (Compt. rend. vom 13. Juni 1864, S. 1111) ist die Übereinstimmung eine so ziemlich vollkommene. Es wäre nur zu wünschen, dass Mascart auch eine absolute Bestimmung der *D*-Linien mit seinem Gitter durchführte. Eine Differenz mit den Ångström'schen Wellenlängen hat sich nur bei den Linien 831, 850, 860, 864, 874·5, 877, 885, 895 ergeben, obwohl die Stärke dieser keinen Zweifel darüber aufkommen lassen, dass Ångström dieselben Linien gemessen habe. Eine wiederholte Messung, die ich vorgenommen hatte, ergab mir dieselben Resultate, wie die früheren.

B.	593	688·33	1174·4	566·76
C.	694	657·11	1200·4	563·39
	711·5	652·58	1207·5	562·40
	719·5	650·54	1218	561·19
	783·5	634·72	1231·6	559·55
	831	624·07	1242·5	558·19
	850	620·09	1280	553·68
	860	617·96	1303·7	551·54
	864	617·19	1307	551·11
	874·5	615·20	1324·8	548·54
	877	614·70	1337	547·19
	885	613·22	1343·5	546·46
	895	611·28	1351·3	545·49
	959	598·59	1367	543·82
Db.	1002·8	590·53	1389·6	541·32
Da.	1006·8	589·89	1410·5	539·19
	1029·4	586·70	1421·6	537·92
	1096·1	577·16	1451	534·91
	1103	576·21	1463	533·69
	1135	571·93	1492·5	530·62

	1155·7	569·13		1506·5	529·19
	1515·5	528·41		2309	467·42
E.	1523·5	527·83		2416	460·97
	1542	526·38		2436·5	459·01
	1569·8	524·13		2457·5	457·14
	1577·5	523·49		2467·4	456·06
	1589·1	522·36		2489·4	454·09
	1601·6	521·71		2537·1	450·89
	1622·4	520·06		2547·2	450·46
	1634	519·12		2566·3	448·80
b.	1648·8	518·09		2606	446·33
	1655·6	517·54		2627	444·98
	1693·8	515·03		2638·6	444·18
	1737·6	511·80		2670	442·22
	1750·4	510·68		2686·6	441·21
	1777·4	508·79		2721·6	439·08
	1799	507·29		2734·9	438·13
	1834	504·93		2775·6	436·00
	1854·5	503·63		2797	434·66
	1867	502·64		2822·8	433·14
	1873·5	502·05	*G.*	2854·7	431·70
	1885·8	501·45		2869·7	430·70
	1908·5	500·10		α	429·53
	1920	499·14		A	427·89
	1961	496·53		γ	426·68
	1975·6	495·41		ς	425·98
	1983	494·71		δ	425·55
	1989·5	494·12		ε, ω	424·25
	2005	492·69		B	423·25
	2018	491·78		ϛ	422·38
	3041·4	489·90		θ	420·69
	2058	488·54		ι	419·48
	2067	487·91		κ	417·92
F.	2080·1	486·87		μ	416·26
	2103·3	484·99		ν	414·98
	2119·8	483·17		Γ	413·92
	2148·9	480·92		E	410·77
	2157·4	479·91		ο	408·76
	2160·6	479·59		π	408·29
	2187·1	477·17		σ	406·85
	2201·9	476·26		Z	405·06
	2221·7	474·70		τ	403·92
	2233·7	473·71		φ	401·17
	2250	471·61		H	397·42
	2264·3	471·06		H′	394·05

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1865. — October.

(Mit 5 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1866.

INHALT.

Seite

XXI. Sitzung vom 5. October 1865: Übersicht 299

Mach, Über die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtreizes auf die Netzhaut. (Mit 3 Tafeln.) 303

Unferdinger, Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreieckes verbinden; darauf bezügliche Lehrsätze und Probleme. (Mit 2 Tafeln.) 323

Schmerzer, Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gemäss regelmässiger Kreisvielecke. 365

XXII. Sitzung vom 12. October 1865: Übersicht 379

Stricker, Studien über den Bau und das Leben der capillaren Blutgefässe 379

Loschmidt, Zur Grösse der Luftmolecüle 395

XXIII. Sitzung vom 19. October 1865: Übersicht 414

Schmidt, Über die Atomwärme 417

Allé, Über die Entwicklung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten 453

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

8.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

XXI. SITZUNG VOM 5. OCTOBER 1865.

Der Alterspräsident, Herr Hofrath W. Ritter von Haidinger gedenkt in warmer Ansprache des schweren Verlustes, den die Akademie durch das am 30. Juli l. J. erfolgte Hinscheiden ihres langjährigen und hochverdienten Präsidenten, Sr. Excellenz des Freiherrn Andreas von Baumgartner erlitten hat.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Der Secretär gibt Nachricht von dem am 26. August erfolgten Ableben des berühmten auswärtigen correspondirenden Mitgliedes der Classe, des Herrn Dr. Johann Franz Encke, Directors der Berliner Sternwarte.

Ferner theilt der Secretär ein Schreiben Sr. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Stephan, vom 5. August l. J. mit, worin Höchstderselbe in der für die Akademie schmeichelhaftesten Weise den Dank für Seine Wahl zum inländischen Ehrenmitgliede ausspricht.

Die k. k. n.-ö. Statthalterei bringt mit Note vom 20. August folgende testamentarische Bestimmung weiland Sr. Excellenz des Freiherrn von Baumgartner zur Kenntniss der Akademie:

„H. Die *sub A. 3* reservirten zehn couvertirten Staatsschuldver-„schreibungen (à 1000 fl. Ö. W.) vermache ich der mathematisch-„naturwissenschaftlichen Classe der kais. Akademie der Wissenschaf-„ten zu dem Behufe, dass die Zinsen derselben, jedoch von nicht „weniger als zwei Jahren zu einem Preis bestimmt sein sollen, den „die Classe über einen von ihr gewählten Gegenstand ausschreibt. „Wird keine der eingegangenen Preisschriften für preiswürdig erkannt, „so kann von der Classe die bestimmte Preissumme dem Verfasser „des im Laufe der Preisausschreibung erschienenen, die Physik am „meisten fördernden Werkes zugewendet werden.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Ein *Pancreas accessorium* und *Pancreas divisum*“, ferner „Eine quere Schleimhautfalte in der Kehlkopfhöhle“, beide vom Herrn Hofrathe, Prof. J. Hyrtl;

„Revision der Prothelminthen, Abtheilung: Mastigophoren von Herrn Dr. K. Diesing;

„Eine alte chinesische Abhandlung über die Schädlichkeiten der Nahrungsmittel" von Herrn Dr. Aug. Pfizmaier;

„Über die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtreizes auf die Netzhaut", von Herrn Prof. E. Mach in Graz;

„Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger Kreisvielecke", von Herrn Dr. Aug. Schwarzer, Lehrer am Realgymnasium zu Tabor;

„Theorie eines elektromagnetischen Voltameters", von Herrn Alex. Lamberg, k. k. Telegraphen-Amtsleiter zu Wels; und

„Eine Atomen-Theorie", von Herrn A. Pichler in Wien.

Die Herren Professor J. Boehm und J. Kadecka hinterlegen versiegelte Schreiben zur Sicherung ihrer Priorität.

Herr Hofrath W. Ritter v. Haidinger macht eine Mittheilung über einen „basaltsäulenförmigen Dopplerit von Aussee".

Herr Prof. K. Peters bespricht die Ergebnisse seiner Bearbeitung der Versteinerungen aus den tertiären und secundären Schichten der Dobrudscha.

Die betreffende Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

Herr F. Unferdinger überreicht eine Abhandlung: „Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreieckes verbinden etc."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Impériale de Médecine: Mémoires. Tome XXVIe, 1re & 2e Parties. Paris, 1863; 4°. — Bulletin. Tomes XXVIII et XXIX. Paris, 1862—1864; 8°.

Annales des mines. VIe Série. Tome VI., 6e Livraison. 1864; Tome VII., 1re—2e Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 15—18. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten, Nr. 1541—1548. Altona, 1865; 4°.

Bericht des k. k. Krankenhauses Wieden vom Solar-Jahre 1864. Wien, 1865; 4°.

Commission hydrométrique de Lyon: Résumé des observations recueillies dans les Bassins de la Saône, du Rhône et quelques autres régions. 1864. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI, Nrs. 3—12. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 3e—13e Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Gesellschaft, Oberhessische, für Natur- und Heilkunde: XI. Bericht. Giessen, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 31—40. Wien, 1865; 8°.

Heidelberg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften. 1864—1865. 4° & 8°.

Institut National Genevois: Bulletin, Nr. 25. 1865: 8°.

Jena, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften. 1865. 4° & 8°.

Kiel, Universität: Schriften aus dem Jahre 1864. Band XI. Kiel, 1865; 4°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 22—28. Wien, 1865; 4°.

Leyden, Universität: *Annales Academici. 1861—1862. Lugduni-Batavorum, 1864;* 4°.

Löwen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften. 1864. 8° & 12°.

Lotos. XV. Jahrg. Juli—August 1865. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrgang 1865, 5.—6. Heft. Wien, 1865; 8°.

— des k. k. Génie-Comité. Jahrg. 1865, 6.—7. Heft. Wien, 1865; 8°.

— aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. VII.—VIII. Heft. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 207e—210e Livraisons, Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Observatoire Impériale de Paris: Bulletin international, Août 1865. Paris; Folio.

Osservatorio del R. Istituto tecnico di Ancona: Bullettino meteorologico, Nr. 6—7. Folio.

— Reale di Palermo: Bullettino meteorologico, Nr. 6—8. Folio.

Pest, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften. 1864—1865. 4° & 8°.

Reader. Nr. 135—144, Vol. VI. London, 1865, Folio.

Reichsforstverein, österr.: Monatschrift. XV. Band. Jahrg. 1865. Juni- und Juli-Heft. Wien, 1865; 8°.

Reise der österr. Fregatte Novara. Zoologischer Theil I. Band: Vögel, bearbeitet von August v. Pelzeln. — II. Band. 3. Abthlg. Crustaceen, beschrieben von Dr. Camil Heller. Wien, 1865; 4°.

Rostock, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften. 1864—1865. Fol, 4°. & 8°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1865. Tome XXXVIII. Nr. 2. Moscou, 1865; 8°.

Tübingen, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften. 1863—1864. 4° & 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 60—79. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 20—24. Gratz. 1865; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XVII. Jahrg. 6. & 7. Heft. Wien, 1865; 4°.

Über die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtreizes auf die Netzhaut.

Von **Ernst Mach.**

(Mit 3 Tafeln.)

Ich habe zufällig an rotirenden, mit schwarzen und weissen Sectoren versehenen Scheiben eine Erscheinung bemerkt, deren weitere Verfolgung mich zu einem allgemeineren Gesetze der physiologischen Optik geführt hat.

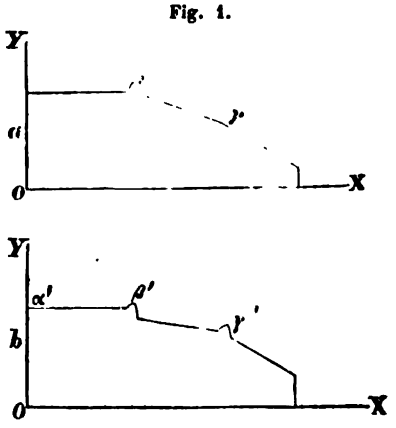
Ich will zunächst die hieher gehörigen Erscheinungen beschreiben.

Wenn man die Scheibe 1 *a* oder 1 *b*, Taf. I, um ihren Mittelpunkt in rasche Rotation versetzt, so gibt sie das Bild 1 *c*. Sie zeigt ein gegen den Rand an Dunkelheit zunehmendes Grau, welches jedoch an den Stellen, wo die schwarzen Sectoren in Spitzen endigen oder Knickungen zeigen, durch schmale, hellere, etwas verwaschene Ringe unterbrochen ist. Die Erscheinung der helleren Ringe muss jeden überraschen, der sie theoretisch zu erklären versucht. Man bemerkt leicht, dass die beiden Scheiben 1 *a* und 1 *b*, in Rotation versetzt, nach dem Talbot-Plateau'schen Gesetze [1]) dieselben Helligkeitsverhältnisse darbieten müssen. Vom Centrum α bis zu dem durch β gehenden Ring sollen sie gleichförmig weiss erscheinen. Bei β setzen die schwarzen Sectoren ein und bedingen ein bis γ an Dunkelheit gleichförmig zunehmendes Grau. Von γ an, wo der Sector geknickt ist, beziehungsweise ein neuer einsetzt, soll die Dunkelheit rascher wachsen. Man würde a priori die Ringe β, γ nicht heller vermuthen als die Umgebung. Sie sollten vielmehr der Helligkeit nach zwischen den nächst äussern und nächst innern Ringen liegen. Sie würden demnach die Continuität der Beleuchtung nicht aufheben.

---

1) Talbot, Philosophical Magazine. Ser. III. Vol. V. p. 321. — Plateau, Bulletin de l'acad. roy. des sciences de Bruxelles. 1835. Nr. 2. p. 52 — Nr. 3, p. 89.

Fig. 1.



Der wirkliche Anblick der rotirenden Scheibe ist wie gesagt ein anderer. Fig. 1 *a* (im Text) gibt die Helligkeit der rotirenden Scheibe nach dem Talbot-Plateau'schen Gesetze, wobei der Radius als Abscisse (x), die Lichtintensität als Ordinate (y) aufgetragen ist. Fig. 1 *b* macht in gleicher Weise den wirklichen Anblick der rotirenden Scheibe anschaulich. Zu bemerken ist noch, dass bei der Rotation der innerste Kreis nicht weiss, sondern graulich und der zwischen den beiden hellen Ringen liegende Theil fast gleichförmig grau (am äusseren Rande nur wenig dunkler) erscheint.

Die Scheiben 2 *a*, 2 *b* auf Taf. I sind die negativen Bilder von 1 *a*, 1 *b* und geben auch in Rotation versetzt die Fig. 2 *c*, welche das negative Bild von 1 *c* ist. Diese Scheiben zeigen also dunkle Ringe an jenen Stellen, wo die früheren helle zeigten. Construirt man wieder, wie vorher, die Curve der Lichtintensität, so findet man, dass den dunklen Ringen wieder Knickungen der Lichtcurve entsprechen, aber solche, welche gegen die Abscissenaxe convex sind.

Man kann auf rotirenden Scheiben und auf der Mantelfläche eines rotirenden Cylinders die Lichtintensität mit Hülfe schwarzer und weisser Sectoren von verschiedener Form nach jedem beliebigen Gesetze von Stelle zu Stelle variiren lassen und sich so von der Allgemeinheit der erwähnten Erscheinung überzeugen. Überall wo die Lichtcurve einen Knick hat, erscheint die Stelle heller oder dunkler als die Umgebung. Heller ist die Stelle, wenn die Knickung gegen die Abscissenaxe concav, dunkler ist sie, wenn die Knickung gegen die Abscissenaxe convex ist.

Fig 3 *a* auf Taf. II stellt die abgewickelte Mantelfläche eines Cylinders vor, dessen Axe man sich parallel zu $\alpha\beta$ zu denken hat. Fig. 3 *b* gibt die Ansicht der rotirenden Fläche. Der Knickung γ entspricht ein heller Streif.

Fig. 4 *a* verwandelt sich durch Rotation in 4 *b*. — Man wird nun sofort errathen, wie die Fig. 7, 8, 9 auf Taf. III als Mantel-

flächen von rotirenden Cylindern aussehen werden. Alle bestätigen das eben aufgestellte Gesetz.

Man kann nun leicht zeigen, dass die Erscheinung nicht den rotirenden Scheiben und dem intermittirenden Lichte eigenthümlich ist, sondern überall auftritt, wo sich die entsprechenden Helligkeitsverhältnisse finden.

Ich trachtete mir ruhende und mit continuirlichem Lichte beleuchtete Flächen von denselben Lichtabstufungen wie die rotirenden Scheiben zu verschaffen. Zu diesem Ende versuchte ich zunächst meine Scheiben während der Rotation zu photographiren, indem ich annahm, dass sich das photographische Papier wie die Netzhaut nach dem Talbot-Plateau'schen Gesetze verhalten würde. Wurde nun diese Vermuthung schon dadurch bestätigt, dass diese Photographien vollkommen den rotirenden Scheiben glichen, so gelang es mir zudem dieselbe durch einige Experimente noch strenger zu beweisen. Ich habe dabei immer die Methode im Auge, nach welcher zuerst eine negative Matrice und von dieser das positive Bild abgenommen wird.

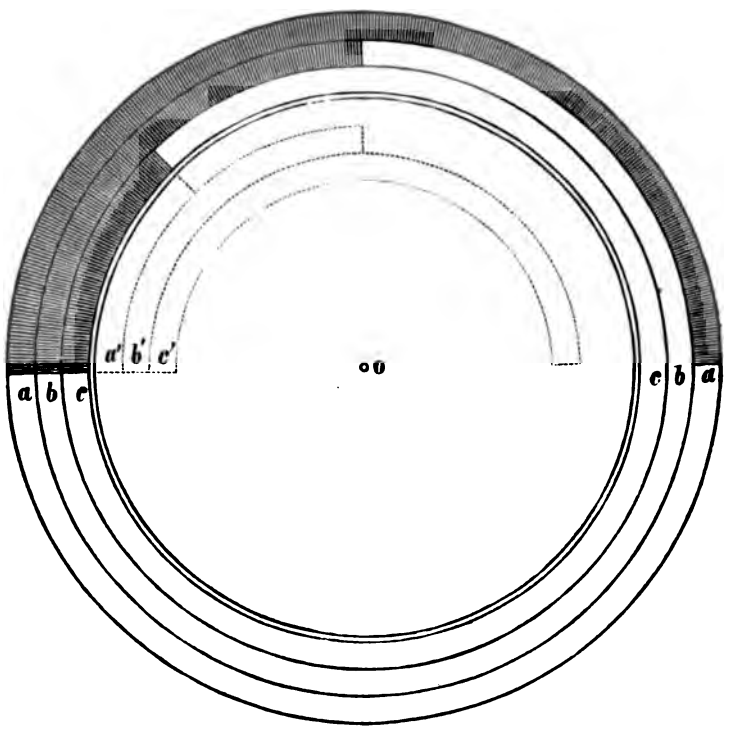
Fragen wir zunächst, in wiefern überhaupt Photographie und Original dieselben Helligkeitsverhältnisse darbieten. Das Original sei ein rechteckiger Streifen, dessen Helligkeit der Länge nach variirt. Nennen wir y die Lichtintensität einer Stelle und x deren Abstand von einem Ende des Streifens, so haben wir $y = f(x)$. Schreitet nun z. B. bis zur vollständigen Auswerthung des photographischen Papieres die Schwärzung jeder Stelle proportional der Expositionszeit und proportional der Bestrahlungsintensität vor, so haben wir für das Bild $y_1 = p + q.f(x)$. Hiebei hängt die Constante q von der Expositionszeit ab und die Constante p müssen wir hinzufügen, weil die Helligkeit des ungeschwärzten Papieres sehr verschieden sein kann, ferner weil selbst die dunkelsten Stellen der Matrice noch Licht durchlassen und demnach auch solche Stellen des positiven Bildes noch geschwärzt werden, welche eigentlich ganz weiss bleiben sollten. Die Lichtcurve des Bildes wird also nach den gemachten Voraussetzungen aus der Lichtcurve des Originals abgeleitet, indem man sämmtliche Ordinaten der letzteren mit derselben Grösse multiplicirt und dann die ganze Curve parallel zur Ordinate verschiebt. Die neue Curve ist der alten affin. Da nun hiebei

$$\frac{dy_1}{dx} = q.\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y_1}{dx^2} = q.\frac{d^2y}{dx^2} \text{ u. s. w.}$$

so sieht man, dass die Lichtcurve des Bildes dieselben Steigungs- und Krümmungsverhältnisse haben wird, wie jene des Originales. Auch die Knickungen müssen bleiben, indem diese blos specielle Fälle der Krümmungen sind.

Übergehen wir nun zum Photographiren der rotirenden Scheiben. Ich photographirte zunächst eine Scheibe, wie sie Helmholtz[1]) und Brücke[2]) zu ihren Untersuchungen über intermittirende Lichtreize verwendet haben. Sie war in sechs concentrische Ringe getheilt. Jeder Ring war zur Hälfte schwarz, zur Hälfte weiss. Der innerste Ring hatte 1, der folgende 2, der nächste 4 schwarze Sectoren u. s. f. bis zu 32. Ich exponirte diese Scheibe eine bis fünfzehn Secunden

Fig. 2.



[1]) Helmholtz, physiolog. Optik.

[2]) Brücke, über den Nutzeffect intermittirender Netzhautreizungen. Sitzb. der Wiener Akademie. 49. Band.

und liess sie eine bis dreissig Umdrehungen in der Secunde machen. In allen diesen Fällen wurde das Bild der Scheibe gleichförmig grau. Im Bilde konnten die concentrischen Ringe nicht unterschieden werden. Gibt es also für das photographische Papier ein Anklingen oder Abklingen wie für die Netzhaut, was nach Bequerel's Versuchen über Fluorescenz kaum zu bezweifeln ist, so muss dies in ausserordentlich kleinen Zeiten erfolgen. Es hängt also der photographische Effect bei übrigens gleicher Lichtintensität nur von der Bestrahlungszeit ab, gleichgiltig in welchen Unterbrechungen die Bestrahlung erfolgt.

Es handelt sich nun noch um den Einfluss der Helligkeit. Eine weisse Scheibe (Fig. 2 im Text) war mit drei concentrischen Ringen a, b, c versehen. Der äusserste a war zur Hälfte schwarz. Vom zweiten b war ein Viertheil, vom dritten c ein Achttheil geschwärzt. Der centrale Theil der Scheibe blieb weiss. Die Scheibe wurde in der Rotation photographirt. Es entstanden drei ungleich helle Ringe. Dieselben wurden von der Photographie abgeschnitten. Aus denselben wurden Ringe geformt, die auf den centralen weissen Theil der Photographie aufgeklebt wurden. Der aus a geschnittene Ring a' bedeckte ein Achttheil der Peripherie, der aus b gebildete Ring b' ein Viertheil und der aus c geformte c' die Hälfte. Wurde nun die Photographie gedreht, so erschienen a', b', c' gleich hell.

Dieses Experiment beweist folgenden Satz. Wenn eine rotirende Scheibe nach dem Talbot-Plateau'schen Gesetze die Helligkeitscurve $y=f(x)$ darbietet, so gibt die in der Rotation aufgenommene Photographie derselben die Helligkeitscurve $y=p+q.f(x)$. Diese Curve bietet also dieselben Steigungs-, Krümmungs- und Knickungsverhältnisse, wie jene des Originales.

Für unsere Zwecke ist übrigens die genaue Erfüllung dieser Bedingung gar nicht nöthig. Wir brauchen blos anzunehmen, dass die Lichtintensität in der Photographie irgend eine stetige Function der Bestrahlungsintensität und Expositionszeit sei und dass auch der Differentialquotient dieser Function stetig sei. Hat man nun für die Lichtcurve des Originales $y=f(x)$, so hat man für jene der Photographie $y_1=F(y)$ und es folgt $\frac{dy_1}{dx}=\frac{dF(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$. Wird für irgend ein x, $\frac{dy}{dx}$ discontinuirlich, so muss es auch $\frac{dy_1}{dx}$ werden, d. h. auch

dann noch müssen den Knickungen in der Lichtcurve des Originales Knickungen in der Lichtcurve der Photographie entsprechen.

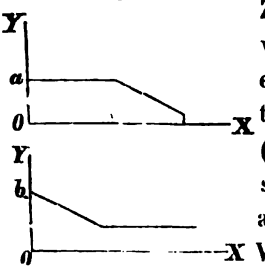
Die Photographien meiner rotirenden Scheiben erscheinen genau so wie die rotirenden Scheiben selbst. Nehme ich die Scheibe 1 *a* Taf. I auf, so gibt mir die Matrice das Bild 2 *c* und das hievon abgenommene positive Bild ist 1 *c*. Natürlich, denn die Matrice gibt das negative Bild, also die rotirende Scheibe 2 *a*. Man darf daraus, dass die hellen und dunklen Ringe auch in der Photographie erscheinen, nicht auf die Objectivität derselben schliessen. Im Gegentheile, da ich gezeigt habe, dass sich die Photographie objectiv nach dem Talbot-Plateau'schen Gesetze verhält und da die Ringe aus diesem Gesetze nicht erklärbar sind, ist deren Subjectivität bewiesen. Wenn die Photographie objectiv nur dieselben Helligkeitsverhältnisse gibt wie die rotirende Scheibe, muss sie auch subjectiv gleich erscheinen. Beide müssen ja unser Auge passiren. Ich würde dies nicht besonders erwähnen, wenn ich nicht sehr oft diese Einwendung hätte hören müssen.

Die Photographien zeigen die hellen und dunklen Ringe sehr schön und deutlich. Dieselben treten aber noch viel schärfer hervor, wenn man die Photographien in ganz gleicher Weise wie die Originale in Rotation versetzt. Der einfache Grund hievon ist der, dass hiebei die kleinen störenden Ungleichmässigkeiten verschwinden. Ich habe überhaupt noch nie so schöne gleichmässige Flächen gesehen wie an rotirenden Scheiben. Die Rotation ist eine wahre Ausgleichungsmethode der Fehler. — Man macht umgekehrt an den rotirenden Originalscheiben die Ringe undeutlicher, wenn man sie mit einem ungleichmässigen Fensterglase beschattet.

Ausser den Photographien lassen sich noch andere ruhende und continuirlich beleuchtete Flächen herstellen, welche bei analogen Helligkeitsverhältnissen analoge Erscheinungen aufweisen. Fig. 5, Taf. II, ist ein System von feinen verticalen, nahe an einander liegenden, parallelen schwarzen Linien. Dieselben bleiben von $\alpha\beta$ an nach abwärts gleich dick. Von $\alpha\beta$ an nach aufwärts aber verdicken sie sich allmählich. Wenn man nun dies System durch eine cylindrische Linse mit verticaler Cylinderaxe betrachtet, welche blos in horizontaler Richtung zerstreuend wirkt, so erscheint bei $\alpha\beta$ eine hellere horizontale Linie. Dasselbe geschieht auch schon, wenn man die Zeichnung nur in etwas grössere Entfernung bringt, so dass die Striche undeut-

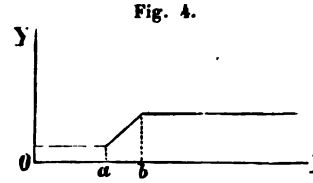
lich werden und das Blatt grau erscheint. Die Umstände, welche die Erscheinung bedingen, sind offenbar dieselben, wie bei den rotirenden Scheiben und bei den Photographien. Bilden wir die Lichtcurve des Streifens Fig. 5 unter dem Einflusse der Zerstreuungslinse, indem wir die Abstände vom unteren Ende als Abscissen (x), die entsprechenden Lichtintensitäten als Ordinaten (y) auftragen, so erhalten wir Fig. 3 *a* (im Text). An der Stelle des Knicks erscheint die helle Linie. — Der Streifen Fig. 6 auf Taf. II zeigt bei $\alpha\beta$ eine dunkle Linie. Von $\alpha\beta$ an nach abwärts verdünnen sich nämlich allmählich seine schwarzen Linien. Die Lichtcurve dieses Streifens gibt Fig. 3 *b* (im Text).

Fig. 3.



Kennt man einmal die Erscheinung der hellen und dunklen Linien, so findet man sie leicht unter den gewöhnlichsten Umständen. Man kann sie z. B. fast an jedem Schatten beobachten, welcher von einer ausgedehnten und hellen Lichtquelle geworfen wird. Construiren wir die Lichtcurve eines Schattens. Von 0 bis *a* (Fig. 4 im Text) reiche der Kernschatten. Wir haben also daselbst eine kleine constante Ordinate aufzutragen. Von *a* bis *b* finden wir den Halbschatten, dessen Lichtintensität gegen *b* hin wächst. Bei *b* beginnt der vollständig erleuchtete Raum. An der Grenze von Kernschatten und Halbschatten muss also eine dunkle Linie auftreten, welche schwärzer ist als der Kernschatten selbst. Die Grenze des Halbschattens nach aussen aber wird durch eine helle Linie gebildet, die selbst den vollkommen erleuchteten Raum an Lichtintensität übertrifft. Man findet die Erscheinung wirklich so wie ich sie theoretisch construire, wenn man den Schatten der Kante eines Hauses bei unbewölktem Himmel mit einem glatten weissen Papier auffängt. Der Grund, auf welchen der Schatten zufällig geworfen wird, ist meist zu ungleichmässig, um die Linien deutlich zu zeigen. Dieselben werden noch schärfer, wenn man den Schatten mit einer weissen rotirenden Scheibe auffängt.

Fig. 4.



Man kann mit Hilfe von Schatten leicht Beleuchtungen erzeugen, welche einen ganz ähnlichen Anblick bieten, wie Fig. 1 *c* und 2 *c*

auf Taf. I. Wirft man z. B. mit Hilfe einer Moderateurlampe von einer kreisförmigen kleinen Pappscheibe einen Schatten auf ein glattes Papier, so hat man einen kreisförmigen, von einer schwarzen Linie umschlossenen Kernschatten, an welchen sich ein grauer Ring schliesst, der in einer hellen Kreislinie endigt. Statt der Moderateurlampe mit einer Kugel kann man auch einen Pappschirm vor eine Kerzenflamme stellen, wenn man denselben zuvor mit einer kreisförmigen Öffnung versehen und diese mit Ölpapier verklebt hat.

Da sich nun die Erscheinung unter den verschiedensten Umständen gezeigt hat, können wir unbedenklich folgenden Satz feststellen. Überall wo die Lichtintensitätscurve einer beleuchteten Fläche (deren Lichtintensität nur nach einer Richtung variirt) einen gegen die Abscissenaxe concaven oder convexen Knick hat, erscheint die betreffende Stelle heller, beziehungsweise dunkler als die Umgebung.

Eine bereits lange bekannte Erscheinung lässt sich als specieller Fall dieses Gesetzes betrachten. Fig. 11 *a* auf Taf. III als Mantelfläche eines rotirenden Cylinders, gibt nämlich den Anblick 11 *b*. Jeder Streifen erscheint, wo er an den dunklern grenzt, heller. Dies rührt einfach daher, dass hier die Lichtcurve an derselben Stelle immer zugleich einen convexen und concaven Knick hat. Es stossen hier die dunklen Linien, welche in Fig. 7 auf Taf. III abwechselnd und getrennt auftreten, unmittelbar an einander. Auch dieses Bild wird von der Photographie wiedergegeben.

Knickungen sind nichts weiter als sehr starke Krümmungen. Ich kann mir also die Frage stellen, ob die Erscheinung nicht auch schon im geringeren Grade durch Krümmungen der Lichtcurve bedingt werde? Das Experiment antwortet mit ja. Sectoren, welche statt Knickungen an den betreffenden Stellen blos Krümmungen haben, geben auf rotirenden Scheiben die Erscheinung, nur treten jetzt die hellen und dunklen Linien in Gestalt schwacher, verwaschener Schatten auf. Concavitäten gegen die Abscissenaxe bedingen Vermehrung, Convexitäten Verminderung der Helligkeit. Was wird nun an einem Wendepunkte zu sehen sein? Einerseits eine Concavität, andererseits eine Convexität, im Wendepunkt selbst gar keine Krümmung. Der Wendepunkt muss also eine scharfe Grenze zwischen Licht und Schatten geben. Und in der That ist es so, wenn er zwischen zwei ziemlich starken Krümmungen liegt, welche plötzlich in einander umschlagen.

Versetzen wir Fig. 10 auf Taf. III auf einem Cylinder in Rotation, so sehen wir bei $\alpha\beta$ eine Grenze zwischen hell und dunkel. Der obere Theil erscheint sehr wenig heller als der untere, obgleich er objectiv sogar dunkler ist. Erst gegen den Rand zu macht sich die objective Helligkeit geltend. Deutlicher sieht man die Erscheinung an Fig. 13, wo die Krümmung stärker ist, noch deutlicher an Fig. 12, wo die objective Helligkeit in demselben Sinne wirkt. Die Fig. 14 und 15 sind so construirt, dass die objective Helligkeit von oben nach unten continuirlich zunimmt. Nichts desto weniger zeigen sich horizontale schattenartige, abwechselnd hellere und dunklere Streifen, welche ziemlich scharf an einander grenzen. In den Wendepunkten schlagen nämlich convexe Kreisbögen plötzlich in concave um [1]).

Für die Schule lassen sich sämmtliche Phänomene sehr schön an den rotirenden Cylindern Fig. 7, 11, 15 auf Taf. III demonstriren. Die Sectorencurven sind hier zugleich die Lichtcurven und bieten alle Arten von Knickungen, Krümmungen und Wendepunkten dar.

Unser Satz gestaltet sich also gegenwärtig so. Gegen die Abscissenaxe concave Krümmungen der Lichtcurve bedingen für diese Stelle nach Massgabe der Krümmung eine Vermehrung der Lichtempfindung, convexe Krümmungen eine Verminderung.

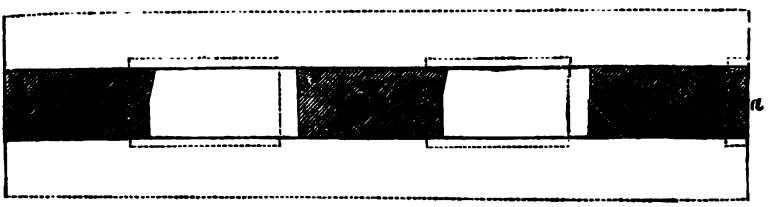
Es wäre nun wünschenswerth die Thatsachen noch quantitativ festzustellen. Dies hat aber seine Schwierigkeit. Messungen an blos gekrümmten Sectoren auf rotirenden Scheiben erwiesen sich als unausführbar. Die Aufhellung und Verdunklung ist hier zu gering, um sich exact messen zu lassen. Die Störung durch Nebenumstände ist zu bedeutend. Die quantitativen Schlüsse aber von Knickungen auf Krümmungen werden unsicher.

Ich muss mich demnach darauf beschränken, drei leicht constatirbare Facta in Betracht zu ziehen, welche glücklicher Weise eine hinreichende Basis für quantitative Schlüsse abgeben, so lange eigentliche Messungen nicht vorliegen. — 1. Zunächst bemerkte ich, dass die hellen und dunklen Ringe, so wie die Schattenstreifen auf meinen rotirenden Scheiben in allen Beleuchtungsintensitäten, bei welchen überhaupt noch gesehen werden konnte, gleich deutlich waren. Ich habe im hellen Sonnenschein, in der Dämmerung und bei Kerzen-

[1]) Der Übergangspunkt verschieden starker Krümmungen in einander, wirkt natürlich wie ein Wendepunkt.

licht experimentirt. Die Ringe heben sich also immer gleich gut von dem an objectiver Intensität ihnen gleichen umgebenden Grunde ab. Nennen wir die Intensität des Grundes i und stellen wir uns einen Zuwachs objectiver Helligkeit Δ vor, so dass i und $i+\Delta$ eben so deutlich zu unterscheiden wäre, wie der Ring und sein Grund. Wächst nun die Beleuchtung um das $q$fache, so muss auch die fingirte objective Helligkeitsdifferenz des Ringes nach psychophysischen Gesetzen [1]) um das $q$fache wachsen. Es wird nun qi und $qi+q\Delta$ so gut unterschieden, wie vorher i und $i+\Delta$. Gegen diese blos mathematische Fiction einer objectiven Helligkeitsdifferenz von Ring und Grund, welche nach psychophysischen Gesetzen der subjectiven entsprechen würde, lässt sich nichts einwenden; sie berührt eben die Thatsachen gar nicht. — 2. Man betrachte die Vorrichtung Fig. 5 im Text. Eine

Fig. 5.



Reihe schwarzer Sectoren mit leichten Knickungen befinden sich auf der Mantelfläche eines Cylinders. Dieselbe ist mit einem durch die Punktirung angedeuteten Papierring überzogen, welcher mit den Sectoren entsprechenden Ausschnitten versehen ist und verschoben werden kann. Ist der Papierring schwarz, so kann man die weissen, ist er weiss, so kann man die schwarzen Theile fast ganz zum Verschwinden bringen. Es zeigt sich nun, dass der an der Knickung sichtbare, kaum merkliche Streifen durch Vermehrung des Schwarz deutlicher wird, bei Vermehrung des Weiss aber verschwindet. Man darf sich nicht durch den Anblick von Fig. 7, Taf. III, täuschen lassen. Da erscheint bei γ ein dunklerer Streif als bei α, bei β ein hellerer Streif als bei δ. Es ist jedoch zu bedenken, dass bei γ die Dunkelheit, bei β die Helligkeit des Grundes sich hinzuaddirt. Dafür ist der Streif δ schärfer als β. Am ausgesprochensten ist γ, weil hier alle günstigen

[1]) Fechner, Elemente der Psychophysik.

Umstände zusammenwirken. — 3. Endlich bringe ich in Erinnerung, dass mit der Verstärkung der Krümmungen ihre Wirkung, wie bereits erwähnt, wächst.

Betrachten wir nun diese drei Facta. Aus 1. folgt, dass die Ringe unverändert bleiben, wenn die Lichtcurve

$$i = f(x)$$

übergeht in

$$i = qf(x).$$

Aus 2. folgt, dass man die Ringe zum Verschwinden bringen könne, wenn man die Lichtcurve

$$i = f(x)$$

übergehen lässt in

$$i = p + f(x),$$

wobei p positiv und gross gedacht wird.

Die Thatsache 3. mathematisch ausgedrückt besagt, dass die Deutlichkeit der Ringe eine directe Function sei von $\frac{d^2i}{dx^2}$.

Setzen wir nun das vorhin erwähnte $\Delta = k.\frac{\left(\frac{d^2i}{dx^2}\right)^2}{i}$, wobei k constant, so haben wir ihm alle Eigenschaften gegeben, welche es aufweisen soll. Lassen wir $i = f(x)$ übergehen in $i = qf(x)$, so wird $\Delta = k\frac{\left(q\frac{d^2i}{dx^2}\right)^2}{qi} = q.k\frac{\left(\frac{d^2i}{dx^2}\right)^2}{i}$, d. h. Δ übergeht in $q\Delta$, d. h. der bemerkbare Unterschied zwischen Grund und Ring bleibt derselbe. Verwandeln wir $i = f(x)$ in $i = p + f(x)$, so wird beim Wachsen von i das Δ kleiner. Es vermindert sich also der bemerkbare Unterschied zwischen Ring und Grund. Endlich hat unser Δ die Eigenschaft zu wachsen, wenn $\frac{d^2i}{dx^2}$ (die Krümmung) wächst. Wir brauchen nur mehr festzusetzen, dass Δ das entgegengesetzte Zeichen von $\frac{d^2i}{dx^2}$ haben soll, man könnte dies ausdrücken durch die Schreibweise $\Delta = -k\frac{\left(\sqrt{\rho}\frac{d^2i}{dx^2}\right)^2}{i}$, wobei ρ den Richtungscoëfficienten von $\frac{d^2i}{dx^2}$ bedeuten würde.

Nehmen wir die von Fechner[1]) gegebene Formel für die Lichtempfindungsintensität als richtig an, und denken wir uns eine

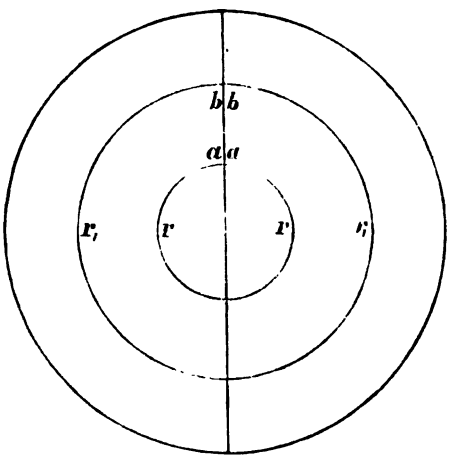
[1]) A. a. O.

Fläche, deren Beleuchtungsintensität nur nach der Richtung x variirt, so haben wir für die jeder Stelle entsprechende Empfindung e den Ausdruck:

$$e = a.\log\left\{\frac{i}{b} \pm k.\frac{\left(\frac{d^2i}{dx^2}\right)^2}{i}\right\}.$$

In dieser Formel sind a, b die bekannten Fechner'schen Constanten; das obere oder untere Zeichen ist zu wählen, je nachdem $\frac{d^2i}{dx^2}$ negativ oder positiv ist. Die Formel stellt unsere Thatsachen vollständig dar. Sie ist nur in dem Falle unbrauchbar, wenn $\frac{d^2i}{dx^2}$ unendlich wird, wenn wir es also mit einer wirklichen Spitze zu thun haben. Abgesehen davon, dass eine solche in keiner Lichtcurve wirklich vorkommt, würde sie, wenn sie auch da wäre, durch die dioptrischen Unvollkommenheiten des Auges wieder vernichtet. Man kann übrigens für diesen Fall unserer Formel eben so wenig strenge Richtigkeit zumuthen, als der Fechner'schen für den Fall eines unendlichen Reizes. Zudem ist sie gewiss nur eine Näherungsformel. Denn die Netzhaut besteht ja nach der allgemeinen Ansicht aus einer endlichen Zahl empfindender Elemente von endlicher Ausdehnung. Wenn es sich also um Eigenschaften der Netzhaut handelt, kann nicht mehr von di, dx, sondern nur von Δi, Δx die Rede sein.

Fig. 6.

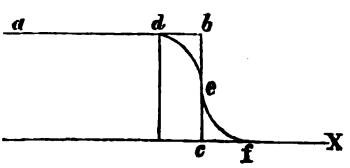


Man bemerke, dass das aufgestellte Gesetz für das Sehen von nicht geringer teleologischer Bedeutung ist. Es sind nach demselben hauptsächlich starke Krümmungen und Knickungen der Lichtcurve, welche durch hervorstechende Aufhellung oder Verdunklung die Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Die Steigung ist von geringerem Einflusse. Flächen von gleichförmig nicht zu rasch ansteigender Beleuchtung werden sogar oft für gleichförmig hell gehalten. Ihre Helligkeit wird, wie mir aus einem vorläufigen Versuche her-

vorzugehen scheint, der mittleren Helligkeit gleichgeschätzt. — Auf meiner rotirenden Scheibe Fig. 1 *c*, Taf. I, so wie auf der Photographie derselben erscheint der Raum zwischen den beiden hellen Ringen rr, r_1r_1 (Fig. 6 im Text) fast gleichförmig grau, obgleich er am äusseren Rande bedeutend dunkler ist. Man bemerkt kaum eine Differenz zwischen den Stellen *aa*, *bb*. Diese erweist sich aber sofort als bedeutend, wenn man die Photographie diametral zerschneidet und die beiden Hälften so gegen einander verschiebt, dass die mit *a* und *b* bezeichneten Stellen unmittelbar neben einander zu liegen kommen. Es sind also die Knickungen und Krümmungen viel auffallender als die Steigungen. Ich möchte sagen die Steigungen machen sich stets nur durch ihr Endresultat geltend, während die Krümmungen und Knickungen unmittelbar wirken. Offenbar treten nun die letzteren hauptsächlich an den Contouren der Netzhautbilder auf, und gerade diese Contouren sind für die Erkenntniss der äusseren Objecte am wichtigsten.

Helmholtz[1]) hat bemerklich gemacht, dass die von der chromatischen Abweichung des Auges herrührenden Zerstreuungskreise ihrer eigenthümlichen Lichtvertheilung wegen sehr wenig stören.

Fig. 7.



Wäre z. B. (Fig. 7 im Text) *abc* die Lichtcurve für ein scharfes Netzhautbild, so ist sie nach Helmholtz in Folge der Farbenabweichung etwa *adef*. Helmholtz schreibt die Deutlichkeit des Bildes dem scharfen Abfall der Curve an der Grenze bei *e* zu. Ich muss nach meinen Erfahrungen auch noch den Übergang von concav zu convex und den Wendepunkt bei *e* für sehr wesentlich halten. Diese Verhältnisse lassen sich für die Schule sehr schön an den rotirenden Cylinderflächen Fig. 13, 14, 15 auf Taf. III erläutern.

Das Sehorgan zeigt ein gewisses unverkennbares Streben zu Schematisiren, indem es blos auffallende Ungleichförmigkeiten beachtet. Dasselbe Streben äussert sich wie in den Details so auch im grossen Ganzen. Es wäre sonst nicht möglich, dass ein in Linien- oder Punktmanier behandelter dunkler Grund, so lange die Details noch deutlich sichtbar sind, als gleichförmig aufgefasst würde. Eben so

[1]) Helmholtz, physiologische Optik.

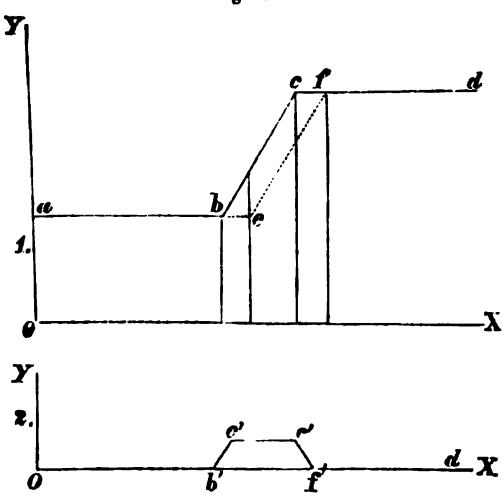
wenig könnten punktirte Figuren vom Grunde als für sich bestehende Gestalten abgehoben werden. Auch die Gestalten werden durch das Auge schematisirt, wie die Muropictographien aller Welttheile beweisen.

Versuchen wir nun der Ursache der betrachteten Erscheinungen näher zu kommen. Zunächst kann, wie bereits bemerkt, an der Subjectivität derselben kein Zweifel sein. Ihre Ursache liegt nicht in den Objecten, sondern im Sehorgane. Es werden Stellen heller oder dunkler gesehen, welche mit ihrer nächsten Umgebung von gleicher Intensität sind, oder welche, um auch das intermittirende Licht zu erwähnen, in gleichen Zeiten gleiche Lichtmengen aussenden, wie ihre nächste Umgebung.

Da es stets die Umgebung ist, welche die Wirkung einer Stelle bestimmt, so können wir unsere Erscheinungen einstweilen zu den Contrastphänomenen rechnen. Und es handelt sich nun darum, ob sie dem successiven oder dem simultanen Contrast angehören.

Es sei *abcd* (in Fig. 8, 1 im Text) eine Lichtcurve. Gesetzt es würde durch eine leise Augenbewegung das Netzhautbild verschoben, so dass es nun nach *aefd* zu liegen kommt. Offenbar muss hiebei je nach der Richtung der Augenbewegung bald ein helles, bald ein dunkles Nachbild von der Lichtcurve *ob'e'c'f'd'* entstehen, welches die ganze Strecke *bc* erhellt oder beziehungsweise verdunkelt. Dies ist nicht das beobachtete Factum. Als successiven durch Augenbewegung bedingten Contrast können wir unsere Erscheinung nicht auffassen. Es müssten dann dieselben Ringe an den Scheiben bald hell bald dunkel auftreten, sie könnten ferner nicht so schmal sein, wie sie wirklich erscheinen, und könnten nur stückweise der Richtung der Augenbewegung entsprechend sichtbar werden.

Fig. 8.



Um die Augenbewegung vollständig auszuschliessen, habe ich meine photographirten Scheiben mit dem elektrischen Funken beleuchtet und beobachtet. Man sieht aber hiebei die Ringe entweder gar nicht oder nur sehr schwach und verwaschen. — Dagegen sind die hellen und dunklen Streifen an den Fig. 5, 6, Taf. II, auch bei elektrischer Beleuchtung zu sehen. Nur erscheinen sie als breite verwaschene Bänder. An letzteren Figuren sind die Streifen überhaupt immer deutlicher als an den Photographien. — Es scheint hiernach, dass zum Zustandekommen unserer Erscheinung eine gewisse Zeit nöthig ist. Auch an den rotirenden Scheiben sieht man bei langsamer Drehung, so lange die Scheiben noch flimmern, die Ringe zwar heller aber breiter und verwaschener als bei rascher Rotation. Das genaue Studium des Sehens bei Beleuchtung mit dem elektrischen Funken scheint mir sehr viel versprechend. Man müsste hiebei die Netzhaut auf vielen Vorgängen so zu sagen ertappen.

Würde die Erscheinung auf Augenbewegung beruhen, was übrigens aus den schon erwähnten Gründen nicht zugegeben werden kann, so müsste sie bei Beleuchtung mit dem Funken der Leydnerflasche vollständig verschwinden. Ausserdem müsste eine kurze Beleuchtung die Ringe verschmälern. Wir haben es also jedenfalls mit simultanem Contrast zu thun, wenn man diese Erscheinung überhaupt Contrast nennen kann. Den von Brücke[1]) eingeführten Namen Induction kann man füglich für diese Fälle auch nicht anwenden.

Mir scheinen die besprochenen Phänomene allein durch eine Wechselwirkung benachbarter Netzhautstellen erklärbar. Die ganze Form des Gesetzes deutet schon darauf. Ich muss mich also zu einer Ansicht bekennen, wie sie ähnlich schon von Plateau aufgestellt worden. Die Wechselwirkung der Netzhautstellen fordert aber einen anatomischen Zusammenhang derselben. In der That scheint dieser durch die neuesten Untersuchungen festgestellt zu sein. Ich lasse Ritter's[2]) Angaben über die Structur der Retina mit seinen eigenen Worten folgen.

---

[1]) Brücke, Pogg. Ann. 84. Bd. 1851.

[2]) C. Ritter (in Worpswede), die Structur des Retina, dargestellt nach Untersuchungen über das Wallfischauge. Leipzig. W. Engelmann. 1864. — Vergl. ferner: Helmholtz, physiol. Optik. — Wundt, Physiologie, S. 490. — Kölliker, Gewebelehre, Leipzig, 1863. S. 661. — Fick, Anatomie der Sinnesorgan. Lahr. 1864. S. 182.

„Das Nervengewebe der Retina bildet eine sehr regelmässig gebildete, überall übereinstimmende Gewebsform, welche sich bei allen Wirbelthieren mit nur geringen Abweichungen wiederholt. Von der Nervenfaser, welche innerhalb des Opticus verlaufend in die Retina eintritt, bis zur Stäbchenschicht erstreckt sich eine fortlaufende Verbindung; die mannigfachen Verbindungsglieder dienen nur, um Theilungen der einfachen Fasern vorzubereiten oder um der Leitungsfaser einen höheren physiologischen Werth beizulegen."

„Die Opticusfasern bilden zunächst nach aussen von der Limitans eine schmale Schicht, welche neben dem Opticuseintritt am stärksten ist, gegen die Peripherie hin stetig abnimmt und zuletzt nur noch ein vielfach durchlöchertes Gitterwerk darstellt. Ohne dass die Fasern andere Verbindungen eingehen, endigen sie als innere Fortsätze der Ganglienzellen. Noch liegen darüber keine Untersuchungen vor, ob an jeder Ganglienzelle nur eine Nervenfaser oder mehrere ihre Endigung finden. Bis jetzt ist immer nur eine Faser an eine Zelle gefunden. Jedenfalls aber gehört zu jeder Ganglienzelle eine Nervenfaser."

„Die Ganglienzellen folgen zunächst nach aussen auf die Nervenfaserschicht; sie liegen meist in einer einfachen Schicht; an bestimmten Stellen (gelber Fleck des Menschen und Affen) und bei bestimmten Thierclassen (Vögeln), welche sich durch scharfes Gesicht auszeichnen, bilden sie eine doppelte und mehrfache Schicht. Gegen die Peripherie nimmt die Zahl der Zellen in regelmässiger Proportion ab, sie liegen nicht mehr eng an einander, sondern werden durch wachsende von Bindegewebsfasern erfüllte Zwischenräume getrennt. Eine kurze Strecke von der *ora serrata* hören sie endlich ganz auf. Constant schicken die Ganglienzellen nach der inneren und äusseren Seite Fortsätze ab, seitliche Verbindungszweige zwischen den Zellen finden sich nur selten. Die inneren Fortsätze sind Opticusfasern, die äusseren treten in die Faserschicht ein und bilden im Centrum der Retina einen grossen, gegen die Peripherie einen kleiner werdenden Theil derselben. Die äusseren Fortsätze sind an jeder Stelle stets mehrere, nur im gelben Flecke des Menschen lässt sich die Möglichkeit der Verbindung zu einer Zelle mit einem äusseren Faden zugeben; bewiesen ist es aber auch hier noch nicht. Oft entspringen mehrere solcher Fortsätze aus einem dickeren Aste, welcher sich so lange zwei- und dreifach theilt, bis die Endäste die jedem Thiere zukommende geringste

Breite der äusseren Fortsätze erreicht haben. Der Ursprung der Zellenäste geschieht unter den verschiedensten Winkeln, sie durchsetzen die Faserschicht in allen Richtungen, nur einzelne an jeder Zelle laufen ziemlich radiär. Das Ende seines Verlaufes findet jeder Fortsatz an einer Körnerzelle und zwar tritt immer nur ein Fortsatz an eine solche Zelle."

„Die Körnerzellen liegen der Faserschicht zunächst nach aussen an. Von der äussern Seite dieser kleinen Zellen entspringen dann ein oder zwei feine Fasern, welche sich wahrscheinlich in eine kleine, bestimmte Zahl Faden theilen und radiär die Körnerschicht durchsetzen. Innerhalb der Faden liegen mehrere Körner, d. h. runde oder ovale Anhäufungen, eines wahrscheinlich nervenmarkähnlichen Inhaltes. Der Faden setzt sich dann nach aussen in die Hüllen der Stäbchen und Zapfen fort und endigt nahe ihrer äusseren Begrenzung mit einer knopfförmigen Anschwellung."

„Dieser Zusammenhang des Nervengewebes findet sich in der Retina aller Wirbelthiere." —

Nach den in Ritter's Schrift, S. 46, angegebenen Zählungen dürften sich etwa 7 Stäbchen mit einer Körnerzelle; 13 Körnerzellen mit einer Ganglienzelle zusammenlaufend verbinden. Eine Opticusfaser läuft demnach in etwa hundert Stäbchen aus. Wir finden eine systematische Verästelung gegen die Peripherie zu. Sind die Stäbchen wirklich die empfindenden Endelemente, so müssen ihre Erregungen entschieden eine Reihe von Wechselwirkungen erfahren, bevor sie in die Opticusfaser übergehen. Ich möchte sagen, die Netzhautelemente machen es zum Theile unter sich aus, welche Empfindung sie weiter leiten. Bestimmtere Vermuthungen würde ich vorläufig nicht wagen.

Ich zweifle nicht, dass manche Physiologen geneigt wären, die besprochenen Phänomene, statt durch die Structur der Retina und physikalische Processe in derselben, durch unbewusste Schlüsse und Urtheile zu erklären, falls sich nur irgend ein Princip dafür auffinden liesse. Ich halte auch diese Auffassung der Sinnesorgane gewissermassen für einen Fortschritt. Warum sollten auch die Sinnesorgane nicht eine gewisse Logik haben? Warum sollten die Ganglienzellen dieser Organe sich anders verhalten, als jene des übrigen Nervensystemes und des Gehirnes? Ich kann nur damit nicht einverstanden sein, dass man für die Schlüsse der Sinnesorgane, nachdem man sie

für unbewusste Analogien der bewussten Schlüsse erklärt hat, Prämissen von einer Art aufsucht, auf welche sich eben nur bewusste Schlüsse bauen lassen, statt die wahren Prämissen so wie die entsprechenden physikalischen Vorgänge und Organe in den Sinnesapparaten selbst aufzusuchen. Das heisst doch dem Auge zu viel zumuthen, wenn es wissen soll, dass Briefpapier weiss ist, dass ein durch dasselbe hindurchschimmernder Körper in seiner Farbe modificirt werde, dass das Weiss sich aus Complementärfarben zusammensetzt u. s. f. Alles dies weiss ich als Physiker recht gut und doch begreife ich nicht, wie so die Contrasterscheinungen für mein Auge dieselben bleiben, auch wenn ich es nicht weiss. Woher soll das Auge diese Studien über Farbenlehre haben? Und im Auge liegen doch diese Urtheile, sonst müssten die Experimente durch bewusste Überlegung modificirt werden.

Man hat vor nicht gar langer Zeit alles Psychologische als Thatsache gar nicht anerkannt; es wurde was die Thatsächlichkeit betrifft zu allem Physikalischen als incommensurabel betrachtet. Noch kürzlich hat ein sehr angesehener Gelehrter sich über meine Experimente gewundert. „Wozu das? Das müssen doch nur Täuschungen sein!“— Diese Zeiten sind vorbei. Wir wissen, dass auch „Täuschungen“ Thatsachen sind, und Gesetzen unterliegen. Wir thun jetzt des Guten sogar etwas zu viel und vergessen mitunter, dass jedem Psychischen ein Physisches entsprechen müsse, welches aufzusuchen sehr wünschenswerth ist. —

Es sei mir erlaubt hier gelegentlich ein heuristisches Princip der psychophysischen Forschung[1]) auszusprechen, welches ich öfter stillschweigend und vielleicht nicht ganz ohne Glück angewendet. — Jedem Psychischen entspricht ein Physisches und umgekehrt. Gleichen psychischen Processen entsprechen gleiche physische, ungleichen ungleiche. Wenn ein psychischer Vorgang sich auf rein psychologischem Wege in eine Mehrheit von Qualitäten a, b, c auflösen lässt, so entsprechen diesem eine eben so grosse Zahl verschiedener physischer Processe α, β, γ.... Allen Details des Psychischen correspondiren Details des Physischen.

---

[1]) Eine Andeutung dieses Principes findet sich schon in meinem Compendium der Physik. Wien, 1863.

Diese Annahmen haben mich zu meiner Ansicht über die Accomodation des Ohres und die Bildung der Tonreihe, zu Betrachtungen über den Zeitsinn und das räumliche Sehen geführt. — Würde man nach diesem Principe die Farbenlehre behandeln, so müsste es zur Young'schen Theorie führen. Es würden sich aber dann als Grundfarbenempfindungen Roth, Gelb, Grün, Blau ergeben, da man nur in diesen bei der blossen Betrachtung keine anderen Farben erkennt. Ausserdem müsste für die Empfindung Weiss und Schwarz ein besonderer physiologischer Process statuirt werden. Denn im Weiss ist keine andere Farbe erkennbar. Wenn demselben auch in der Netzhaut mehrere Erregungen entsprechen, der letzte Vorgang in der physiologischen Kette, welcher den einfachen psychischen Process der Empfindung Weiss bedingt, muss einfach gedacht werden wie dieser.

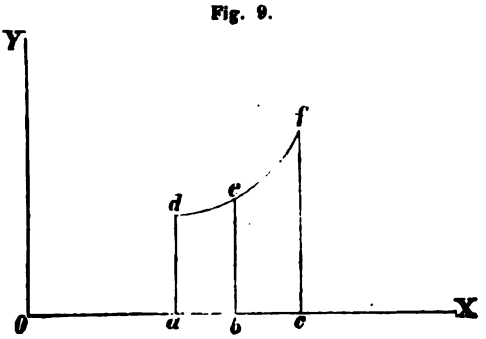
Beleuchten wir noch eine Erscheinung mit Hülfe unseres Princips, welche meines Wissens noch Niemand besprochen hat. Weiss von geringerer Lichtintensität erscheint neben hellerem Weiss grau. Anderseits sind wir bei den verschiedensten Beleuchtungsgraden, in hellem Sonnenscheine, bei bewölktem Himmel, in der Dämmerung, bei Kerzenlicht niemals im Zweifel, ob wir ein weisses oder graues Papier vor uns haben. Wir haben immer nahezu dieselbe Empfindung. Woran kann dies liegen? Wird die Lichtintensität die 2, 3, n-fache, so ist das Netzhautbild des weissen Papieres 2, 3, ... $n$mal heller, aber auch das ganze übrige Gesichtsfeld und die ganze Netzhaut erhält die 2, 3, n-fache Beleuchtung. Das Verhältniss der Lichtquantität der gesammten Netzhaut und des Papierbildes bleibt unter übrigens gleichen Umständen constant. Ich denke mir demnach einen Vorgang ausgelöst, dessen Intensität von diesem Verhältniss abhängt und welcher die Empfindung Weiss für das Netzhautbild bedingt. Die Helligkeit des Netzhautbildes wird so zu sagen gegen die Gesammterregung abgeschätzt. Dies ist ein Urtheil, die psychologische Seite der Sache. Die physische ist der erwähnte Vorgang. Er ist noch nicht aufgefunden.

Man bemerke, dass meine Behauptung eigentlich schon in der Fechner'schen Fundamentalformel liegt. Nach ihr erfolgen die elementaren Urtheile der Sinnesorgane, wie Wundt richtig bemerkt.

Wenn wir die eben erwähnte Thatsache mit unseren Ringerscheinungen zusammenhalten, so erfahren letztere einigermassen eine Erklärung. Es ist nämlich nicht unwahrscheinlich, dass schon

kleine Theile der Netzhaut sich ganz ähnlich verhalten, wie das ganze Auge. Ist doch, wie die specielle und vergleichende Anatomie von Tag zu Tag mehr nachweist, der ganze Organismus nach einem Plane gebaut, eine wahre Homoiomeria. Nehmen wir an, es könne die Helligkeit eines Stäbchens gegen die Gesammthelligkeit eines Stäbchenbündels (etwa 100 Stäbchen nach Ritter) so abgeschätzt werden, wie das erwähnte Netzhautbild gegen die ganze Netzhaut, oder mit anderen Worten, es werde für jedes Stäbchen ein Vorgang ausgelöst, dessen Intensität abhängt von dem Verhältniss der Lichtmengen des Stäbchens und des Stäbchenbündels; so können wir unsere Erscheinungen schon begreifen.

Fig. 9.



Das Stäbchen *b* (Fig. 9 im Text) werde von der Lichtintensität *be* afficirt und auf die ganze Stäbchenstrecke *a b c*, welche wir uns mit *b* in anatomischem Zusammenhange denken, falle der gegen die Abscissenaxe convexe Theil der Lichtcurve. Offenbar muss nun die Helligkeit des Stäbchens *b* unter die mittlere Gesammthelligkeit der Stäbchenstrecke *a b c* fallen, es wird also dunkler geschätzt (psychologisch gesprochen). Umgekehrt wäre es, bei gegen die Abscissenaxe concaver Krümmung der Lichtcurve. Ich will mich auf diese Andeutung beschränken.

Schliesslich muss ich noch erwähnen, dass mein Zuhörer, Herr Joseph Križan, fast die sämmtlichen für die Arbeit nöthigen mühsamen Zeichnungen und Constructionen sorgfältig ausgeführt, ferner dass Herr Dr. Fr. Dawidowsky, Director der Handelsakademie zu Graz, mit dankenswerther Freundlichkeit einen Theil der Photographien angefertigt hat. Einige besonders nette und genaue Bilder wurden mir von Herrn L. Bude, Photographen zu Graz, hergestellt.

Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreieckes verbinden; darauf bezügliche Lehrsätze und Probleme.

Von **Franz Unferdinger**,
Lehrer der Mathematik an der Ober-Realschule am Bauernmarkt.

(Mit 2 Tafeln.)

Die Untersuchung der Figuren, welche durch Constructionen auf der Kugelfläche entstehen, bieten im Vergleiche mit denen in der Ebene grössere Schwierigkeiten dar.

Erstens ist die Fläche, auf der man operirt, nicht mehr so einfach, die Betrachtung der Figur allein, ähnlich der Synthese der Planimetrie, wird bald durch Anzahl und Complication der Linien physisch undurchführbar.

Wird schon hierdurch die Anwendung der Algebra und die Einführung der goniometrischen Functionen zur Nothwendigkeit, so sind zweitens aus trigonometrischen Formeln Winkelrelationen schwer zu erkennen und das ausschliessliche Operiren mit solchen Formeln, abseit der Figur, ist wieder auf ein bestimmtes Maass zu beschränken, um nicht mit den oft weitläufigen Umwandlungen und Verbindungen derselben das Auffinden eines geometrischen Gesetzes zu einem fremdartigen Zufall zu machen.

In der zweckmässigen Vereinigung der Betrachtung der Figur mit der trigonometrischen Rechnung erblicken wir, unbeirrt durch die grossen Entwickelungen der Coordinatenmethode, das wirksamste und einfachste Mittel, zur Aufstellung eines Systems der sphärischen Geometrie, von welchem die folgende Abhandlung (so wie jene über die drei Höhen des sphärischen Dreieckes im LI. Bande der Sitzungsberichte) als ein Capitel zu betrachten ist.

Die von uns behandelte Figur ist nur ein specieller Fall und betrifft diejenigen Constructionen, welche aus den, durch die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreieckes geführten Transversalen entstehen.

Wir hoffen, dass die folgenden Untersuchungen geeignet sind, zu zeigen, wie die Constructionen auf der Kugelfläche, bei grösserem Reichthum an Gesetzen, dennoch jene geometrische Einfachheit bewahren, welche man der ebenen Geometrie so sehr als Zierde rechnet.

§. 1.

Verbindet man in einem sphärischen Dreieck ABC (Fig. 1) die Mittelpunkte der den Winkel A einschliessenden Seiten b, c durch einen Hauptbogen g_1, so entsteht ein zweites Dreieck, welches mit dem ersten den Winkel A gemeinschaftlich hat. Bestimmen wir aus beiden Dreiecken $\cos A$ durch die drei Seiten, so entsteht unmittelbar die Gleichung:

$$\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos g_1 - \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}{\sin \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}c},$$

deren Auflösung $\cos g_1$ als Function der drei Seiten darstellt. In der That findet man nach kurzer Rechnung:

$$(1) \qquad \cos g_1 = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c}.$$

Bezeichnet ε den sphärischen Excess des Dreieckes ABC, $\varepsilon = A+B+C-180^\circ$, so besteht nach der Theorie des sphärischen Dreieckes, zur Bestimmung dieser Grösse aus den drei Seiten folgende Gleichung:

$$(2) \qquad \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c},$$

wodurch sich die Gleichung (1) in die folgende vereinfacht:

$$(3) \qquad \cos g_1 = \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von ε:

$$\cos g_1 = \cos \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C).$$

Sind also g_1, g_2, g_3 die drei, die Mittelpunkte der Seiten verbindenden Transversalen, so wie sie der Ordnung nach den Winkeln A, B, C gegenüber liegen, so hat man nach dem Gesetze der Abhängigkeit, welches mit der vorhergehenden Gleichung ausgesprochen

ist, zur Bestimmung derselben aus den Bestandtheilen des sphärischen Dreieckes folgende Ausdrücke:

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos g_1 = \dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}c}, \\ \cos g_2 = \dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}c}, \\ \cos g_3 = \dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}b}, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \cos g_1 = \cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}\varepsilon, \\ \cos g_2 = \cos\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}\varepsilon, \\ \cos g_3 = \cos\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}\varepsilon, \end{cases} \qquad (5')\quad \begin{cases} \cos g_1 = \cos\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}(A+B+C), \\ \cos g_2 = \cos\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}(A+B+C), \\ \cos g_3 = \cos\frac{1}{2}c\,\sin\frac{1}{2}(A+B+C), \end{cases}$$

Für das ebene Dreieck ist bekanntlich $g_1=\frac{1}{2}a$, $g_2=\frac{1}{2}b$, $g_3=\frac{1}{2}c$.

§. 2.

Verlängert man die Transversale $EF=g_1$ (Fig. 1) beiderseits bis zum Durchschnitt mit der Seite a, so entsteht ein sphärisches Zweieck und die Durchschnitte G, G' begrenzen einen Bogen von $180°$.

Wenden wir auf die beiden Dreiecke BFG und CEG den Sinussatz an, so folgt:

$$\frac{\sin BG}{\sin BF}=\frac{\sin F}{\sin G}, \qquad \frac{\sin CG}{\sin CE}=\frac{\sin E}{\sin G}$$

und durch Division dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{\sin BG}{\sin CG}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin F}{\sin E},$$

nun ist aber nach dem Sinussatze im Dreieck AEF

$$\frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin F}{\sin E},$$

mithin:

$$\frac{\sin BG}{\sin CG}=1, \quad \sin BG=\sin CG.$$

Da die beiden Bogen BG und CG offenbar ungleich und kleiner als $180°$, so gestattet die letzte Gleichung nur den Schluss:

$$CG+BG=180°,$$

der Unterschied dieser Bogen ist gleich a, also

$$(6) \qquad \begin{cases} CG = 90^\circ + \frac{1}{2}a, \\ BG = 90^\circ - \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Bezeichnet nun D den Mittelpunkt der Seite a, so ist offenbar

$$(7) \qquad DG = DG' = 90^\circ;$$

der Punkt D liegt sonach auf der Mitte des Halbkreises GDG' und das aus ihm auf den Halbkreis GdG' gefällte Perpendikel Dd ist auch auf dem ersteren senkrecht, sonach

$$DG = Gd = 90^\circ$$

und die Länge des Perpendikels Dd ist das Maass des Winkels s_1 bei G.

Diese Ergebnisse vereinigen wir in folgendem

I. Lehrsatz.

Verbindet man in einem sphärischen Dreiecke die Mittelpunkte zweier Seiten, so schneidet diese Transversale die dritte Seite in zwei Punkten, welche von der Mitte der letzteren um 90° abstehen. Fällt man von der Mitte der dritten Seite auf die Transversale ein Perpendikel, so ist dieses das Maass der Neigung der Transversale zu jener Seite.

§. 3.

Die Transversalen g_1, g_2, g_3, welche die Mittelpunkte der drei Seiten des Dreieckes ABC verbinden, formiren unter sich ein Dreieck DEF (Fig. 2). Werden nun diese Transversalen bis zu ihren Durchschnitten mit den Gegenseiten verlängert, und fällt man zugleich von D, E, F auf die Gegenseiten im Dreieck DEF, Senkrechte Dd, Ee, Ff, so sind offenbar G und G' die Pole des Bogens Dd, H und H', die Pole des Bogens Ee, J und J' die Pole des Bogens Ff. Die drei Bogen Dd, Ee, Ff sind die Höhen des Dreieckes DEF und ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt O ist der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises. Da dieser Punkt von allen

sechs Punkten G, G', H, H', J, J' um 90° absteht, so gilt folgender

2. Lehrsatz.

Zieht man in einem sphärischen Dreieck ABC die drei Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten verbinden, bis zu ihren Durchschnitten mit den Gegenseiten, so entstehen sechs Punkte, welche sämmtlich in einem grössten Kreise liegen, dessen Pol der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises ist.

Die Ebenen dieser beiden Kreise sind also auch parallel.

Bekanntlich liegt der Mittelpunkt O des einem Dreieck ABC umschriebenen Kreises innerhalb oder ausserhalb des Dreieckes und dem Winkel A gegenüber, je nachdem $A \gtrless B+C$ ist.

Setzen wir zunächst das erstere voraus, bezeichnen die Perpendikel OD, OE, OF der Reihe nach mit p_1, p_2, p_3 und verlängern dieselben bis zum Durchschnitt mit dem grössten Kreis $D'E'F'$, so ist $OD' = OE' = OF' = 90^\circ$, mithin:

$$\begin{aligned} DD' &= 90^\circ - p_1, \\ EE' &= 90^\circ - p_2, \\ FF' &= 90^\circ - p_3, \end{aligned}$$

da aber die Pole dieser drei Bogen, beziehungsweise $G, G', H, H' J, J'$, so sind dieselben das Maass der dort gebildeten Winkel und man hat:

$$(8) \qquad \begin{cases} \sphericalangle p_1' = 90^\circ - p_1, \\ \sphericalangle p_2' = 90^\circ - p_2, \\ \sphericalangle p_3' = 90^\circ - p_3, \end{cases}$$

Die drei Winkel

$$90^\circ - p_2,\ 90^\circ - p_3,\ A,$$

formiren daher immer ein Dreieck $AH'J'$, in welchem die, den zwei ersten gegenüberliegenden Seiten AJ', AH' gleich

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}b,\ 90^\circ - \tfrac{1}{2}c$$

sind. Ähnliches gilt von den beiden Dreiecken $BJ'G'$ und CGH.

Liegt der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises ausserhalb des Dreieckes und dem Winkel A gegenüber, so fällt auch die Senkrechte p_1 ausserhalb, und man hat im Vorhergehenden nur $-p_1$ an die Stelle von p_1 zu setzen.

§. 4.

Aufgabe. In einem sphärischen Dreieck ABC sind die drei Transversalen g_1, g_2, g_3, welche die Mittelpunkte der Seiten verbinden, gegeben, man soll das Dreieck auflösen.

Zur Bestimmung des sphärischen Excesses ε aus den drei Seiten a, b, c, lehrt man in den Elementen folgende Formel:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \frac{-1+\cos^2\tfrac{1}{2}a+\cos^2\tfrac{1}{2}b+\cos^2\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}, \tag{9}$$

welche auch aus jener (2) gebildet werden kann, indem die, im Zähler erscheinenden Cosinus der Seiten a, b, c, durch die Cosinus der halben Seiten ersetzt werden. Bestimmt man aus den Gleichungen (5) $\cos\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}b$, $\cos\frac{1}{2}c$ und substituirt die Werthe in (9), so resultirt eine Gleichung, in welcher ausser g_1, g_2, g_3 nur noch $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ erscheint, wird dieselbe alsdann in Bezug auf $\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ aufgelöset, so folgt nach leichter Reduction:

$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\cos^2 g_1+\cos^2 g_2+\cos^2 g_3-2\cos g_1\cos g_2\cos g_3}. \tag{10}$$

Da man nun ε durch die g kennt, so geben die Gleichungen (5):

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\tfrac{1}{2}a &= \frac{\cos g_1}{\sqrt{\cos^2 g_1+\cos^2 g_2+\cos^2 g_3-2\cos g_1\cos g_2\cos g_3}},\\
\cos\tfrac{1}{2}b &= \frac{\cos g_2}{\sqrt{\cos^2 g_1+\cos^2 g_2+\cos^2 g_3-2\cos g_1\cos g_2\cos g_3}},\\
\cos\tfrac{1}{2}c &= \frac{\cos g_3}{\sqrt{\cos^2 g_1+\cos^2 g_2+\cos^2 g_3-2\cos g_1\cos g_2\cos g_3}},
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

wodurch auch die Seiten bekannt sind.

Bestimmt man aus der Gleichung (10) $\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{1-\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon}$, so folgt:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{1-\cos^2 g_1-\cos^2 g_2-\cos^2 g_3+2\cos g_1\cos g_2\cos g_3}$$

oder nach den Lehren der Goniometrie:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon = 2\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(g_1+g_2+g_3)\sin\tfrac{1}{2}(g_2+g_3-g_1)\sin\tfrac{1}{2}(g_1+g_3-g_2)\sin\tfrac{1}{2}(g_1+g_2-g_3)}. \tag{12}$$

Wird ε nach dieser Formel gerechnet, alsdann die Seiten a, b, c nach (5):

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos g_1}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon},\quad \cos\tfrac{1}{2}b = \frac{\cos g_2}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon},\quad \cos\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos g_3}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon},$$

so ist die Rechnung durchaus logarithmisch.

§. 5.

In dem Dreieck DEF (Fig. 2), dessen Seiten g_1, g_2, g_3 sind, ist $Dd = s_1$ die Höhe in Bezug auf die Basis g_1. Diese Höhe wird aus den Seiten des Dreieckes durch folgende bekannte Gleichung bestimmt:

$$\sin s_1 = \frac{2}{\sin g_1}\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(g_1+g_2+g_3)\sin\tfrac{1}{2}(g_2+g_3-g_1)\sin\tfrac{1}{2}(g_1+g_3-g_2)\sin\tfrac{1}{2}(g_1+g_2-g_3)}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (12):

$$\sin s_1 = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin g_1}. \tag{13}$$

Setzen wir eben so $Ee = s_2$, $Ff = s_3$, so hat man zur Berechnung der drei Winkel s_1, s_2, s_3, welche die Transversalen g_1, g_2, g_3, mit den Gegenseiten a, b, c einschliessen, folgende Ausdrücke:

$$\left\{\begin{aligned} \sin s_1 &= \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin g_1},\\ \sin s_2 &= \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin g_2},\\ \sin s_3 &= \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin g_3}; \end{aligned}\right. \tag{14}$$

im ebenen Dreieck ist $s_1 = s_2 = s_3 = 0$ oder $g_1 \| a$, $g_2 \| b$, $g_3 \| c$.

Aus der Gleichung (5), $\cos g_1 = \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}\varepsilon$ ist ersichtlich, dass g_1 die Hypothenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes ist, dessen beide Katheden $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}\varepsilon$ sind und aus Gleichung (13) oder aus $\sin\frac{1}{2}\varepsilon = \sin s_1 \cdot \sin g_1$ wird ersichtlich, dass s_1 der, in demselben Dreieck der Katheden $\frac{1}{2}\varepsilon$ gegenüberliegende Winkel ist, also ist $\frac{1}{2}a$ die diesem Winkel anliegende Kathede.

Beschreiben wir aus C (Fig. 1) als Pol einen Kreisbogen RR', also $CR = 90°$, so ist $GR = \frac{1}{2}a$, weil auch $DG = 90°$ ist und es zeigt sich, dass GRR' das verlangte Dreieck ist.

Es ist also

$$G'R = g_1, \quad RR' = \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{15}$$

Setzt man in A (Fig. 2) ein und beschreibt mit dem sphärischen Radius von 90° die Bogen LL', MM' zwischen den Transversalen g_2, g_3 und ihren zugehörigen Gegenseiten b, c; setzt man eben so in B ein und beschreibt mit demselben Radius die Bogen NN', PP' und aus C die Bogen QQ', RR', so ist:

$$LL' = MM' = NN' = PP' = QQ' = RR' = \tfrac{1}{2}\varepsilon. \tag{16}$$

Da LM das Maass des Winkels A ist, eben so NP das Maass von B, QR von C, so ist auch:

$$\begin{cases} LM' = L'M = 90° - \tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ NP' = N'P = 90° - \tfrac{1}{2}(A+C-B), \\ QR' = Q'R = 90° - \tfrac{1}{2}(A+B-C). \end{cases} \tag{17}$$

§. 6.

In dem bei R rechtwinkeligen Dreieck GRR' (Fig. 1) ist also

$$RR' = \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$
$$GR = \tfrac{1}{2}a,$$
$$G'R = g_1$$

und man findet aus demselben unmittelbar:

$$\begin{cases} \cos g_1 = \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon, \\ \cos s_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \,.\, \operatorname{ctg} g_1, \end{cases} \tag{18}$$

von welchen beiden Gleichungen die erste als (3) bereits bekannt ist. Aus der Betrachtung derselben erhellt, dass ε constant bleibt, wenn g_1 und s_1 denselben Werth behalten, d. h. geometrisch übersetzt, der Flächeninhalt des Dreieckes ABC bleibt constant, wenn die Transversalen $EF = g_1$ in dem Halbkreis GdG' verschoben wird, woferne nur die Basis $BC = a$ ihre Grösse nicht ändert.

Diese Eigenschaft des sphärischen Dreieckes wurde bereits auf synthetischem Wege von Gudermann 1835 gefunden (s. dessen Lehrbuch der niederen Sphärik, p. 62 etc.) und zur Verwandlung und Theilung sphärischer Dreiecke angewendet. Dieses Theorem ist

für den genannten Zweck viel geeigneter, als der Lexell'sche Satz, welchen Steiner, der acht Jahre früher erschienenen classischen Abhandlung: Theilung und Verwandlung sphärischer Figuren (Crelle Journal, Bd. 2, p. 45) zu Grunde legt.

Ist z. B. die Aufgabe gegeben, ein Dreieck in ein anderes von gleichem Flächeninhalt zu verwandeln, welches mit dem ersteren zwei Seiten gleich hat, so ist die Construction folgende: Man halbire die Seiten AB und AC des Dreieckes ABC (Fig. 4) in F und E und ziehe den Hauptbogen EF. Beschreibt man aus B als Mittelpunkt mit dem Halbmesser BF einen Kreisbogen, bis die Transversale EF in F' geschnitten wird, und macht $F'E' = FE$, so ist das Dreieck $A'BC$, dessen durch B und F', C und E' gelegte Seiten sich in A' schneiden, mit ABC flächengleich.

In der Ebene ist die Construction dieselbe.

Durch Rechnung haben wir diese Aufgabe gelöset in Grunert's Archiv, Thl. XLI, p. 142.

Im Sinne der zweiten Gleichung in (18) hat man zur Berechnung der drei Neigungswinkel s_1, s_2, s_3, statt (14) auch folgendes System von Gleichungen:

$$(19) \qquad \begin{cases} \cos s_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} g_1, \\ \cos s_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \operatorname{ctg} g_2, \\ \cos s_3 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} c \operatorname{ctg} g_3. \end{cases}$$

§. 7.

Fällt man von den drei Ecken des Dreieckes ABC (Fig. 2) auf die Transversale GFG' die Perpendikel Ag, Bh, Ck, so ist, wegen der Congruenz der Dreiecke AFg, BFh und AEg, CEk, $Ag = Bh$, $Ag = Ck$.

$$(20) \qquad Ag = Bh = Ck,$$

ferner $Fh = Fg$, $Ek = Eg$, mithin durch Addition $Fh + Ek = g_1$, also $hk = 2g_1$. Verlängert man die Perpendikel Bh und Ck bis zu ihrem Durchschnitte O_1, so muss dieser in dD' liegen, da alle drei Bogen auf dem Halbkreis GFG' senkrecht stehen und dieser gemeinschaftliche Durchschnitt O_1 ist der Pol von GFG'.

Da $OD' = 90^\circ$ und auch $O_1 d = 90^\circ$, so ist

$$(21) \qquad O_1 D' = Od,$$

ferner, weil $Bh = Ck$, ist auch $BO_1 = CO_1$, das Dreieck BCO_1 ist also gleichschenkelig, folglich da $O_1D \perp BC$, $\sphericalangle BO_1D = \sphericalangle CO_1D$. Nun ist $hk = 2g_1$ das Maass des Winkels hO_1k, da O_1 der Pol von hk ist, woraus folgt:

$$\sphericalangle BO_1D = \sphericalangle CO_1D = g_1 \text{ oder}$$

$$hd = kd = g_1, \tag{22}$$

welche Gleichungen folgenden Lehrsatz aussprechen:

3. Lehrsatz.

Fällt man auf eine Transversale, welche durch die Mittelpunkte zweier Seiten eines sphärischen Dreieckes geht, von der Mitte der Gegenseite und ihren Endpunkten Perpendikel, so ist der Abschnitt zwischen den beiden letzten Perpendikeln gleich der doppelten Transversale und wird derselbe von dem ersten Perpendikel halbirt.

Auch folgt jetzt:

$$dF = gE = kE,$$
$$hF = gF = dE,$$

sämmtlich Gleichheiten, welche unverändert am ebenen Dreieck stattfinden.

Betrachten wir nun das in D rechtwinkelige Dreieck BDO_1, so ist

$$\cos g_1 = \cos \tfrac{1}{2}a \sin DBO_1,$$

nach dem Vorhergehenden ist aber auch

$$\cos g_1 = \cos \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

mithin

$$\sin DBO_1 = \cos \tfrac{1}{2}\varepsilon$$
$$\sphericalangle DBO_1 = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

nun ist in demselben Dreieck

$$\cos DBO_1 = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} BO_1, \text{ also}$$

$$\operatorname{tg} BO_1 = \frac{\sin \tfrac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a}.$$

Bezeichnet r_1 den Halbmesser des dem Nebendreieck an $BC=a$ umschriebenen Kreises, so ist bekanntlich:

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}a},$$

(s. meine Abhandlung: Das sphärische Dreieck dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreis, Grunert's Archiv, Thl. XXIX, p. 508), mithin $\operatorname{tg} BO_1 = \operatorname{tg} r_1$, $BO_1 = r_1$; O_1 ist also der Mittelpunkt des dem Nebendreieck an a umschriebenen Kreises. Es ist demnach

$$Ag = Bh = Ck = 90^\circ - r_1. \tag{23}$$

4. Lehrsatz.

Fällt man von den drei Ecken eines sphärischen Dreiekes auf die durch die Mitte zweier Seiten gehende Transversale drei Perpendikel, so sind dieselben einander gleich und ergänzen sich mit dem Radius des dem Nebedreieck der Gegenseite umschriebenen Kreises je zu 90°.

In dem bei h rechtwinkeligen Dreieck BhG' ist also auch der Winkel $hBG' = 90^\circ - \frac{1}{2}\varepsilon$ und da $BG' = 90^\circ - \frac{1}{2}a$, so wird

$$\sin \tfrac{1}{2}a = \operatorname{ctg} s_1 . \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

woraus $\operatorname{ctg} s_1$ direct durch die Bestandtheile des Dreieckes ABC bestimmt wird. Hiermit gelangt man zur Berechnung der drei Neigungswinkel s_1, s_2, s_3 zu folgendem Systeme von Gleichungen:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} s_1 = \sin \frac{1}{2}a \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varepsilon = -\sin \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B+C), \\ \operatorname{ctg} s_2 = \sin \frac{1}{2}b \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varepsilon = -\sin \frac{1}{2}b \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B+C), \\ \operatorname{ctg} s_3 = \sin \frac{1}{2}c \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varepsilon = -\sin \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B+C). \end{cases} \tag{24}$$

§. 8.

Für den Mittelpunkt O_1 des, dem an a liegenden Nebendreieckes umschriebenen Kreises, haben wir gezeigt, dass $O_1D' = Od$ und also O_1 der Pol der Transversale EF ist. Machen wir eben so $O_2E' = Oe$, $O_3F' = Of$, so sind O_2, O_3 die Mittelpunkte der den Nebendreiecken an b und c umschriebenen Kreise, respective die Pole der Transversalen DF, DE. Denken wir uns diese drei Mittelpunkte durch Haupt-

bogen zu einem sphärischen Dreieck verbunden, so kann man folgenden Lehrsatz aufstellen:

5. Lehrsatz.

Die beiden Dreiecke zwischen den Mittelpunkten der Seiten und den Mittelpunkten der, den Seitendreiecken umschriebenen Kreise sind in Bezug auf einander polar.

Folglich ist auch D der Pol des Bogens O_2O_3, E der Pol des Bogens O_1O_3, F der Pol des Bogens O_1O_2 und

$$(25)\qquad \begin{cases} \sphericalangle O_1 = 180^\circ - g_1, & O_1O_2 = 180^\circ - F, \\ \sphericalangle O_2 = 180^\circ - g_2, & O_1O_3 = 180^\circ - E, \\ \sphericalangle O_3 = 180^\circ - g_3, & O_2O_3 = 180^\circ - D, \end{cases}$$

wenn D, E, F die Winkel des Transversalendreieckes bezeichnen.

§. 9.

Wenn man die Bogen grösster Kreise LM', NP', QR' (Fig. 2) erweitert, bis zu ihrem gegenseitigen Durchschnitt, so entsteht ein Dreieck $A'B'C'$, welches offenbar das Polardreieck des Dreieckes ABC ist.

Da A' sowohl von B als auch von C um 90° absteht, so ist A' der Pol von $BC = a$. A' liegt also nothwendig auf dem Bogen DOD'', welcher senkrecht auf BC ist.

Eben so zeigt man, dass die Durchschnitte B', C' auf den senkrechten EOE'', FOF'' liegen.

Da $OD'' = 90^\circ$, $A'D = 90^\circ$, so ist $OA' = 90^\circ - OD$ oder

$$(26)\qquad \begin{cases} OA' = 90^\circ - p_1, \text{ eben so ist} \\ OB' = 90^\circ - p_2, \\ OC' = 90^\circ - p_3. \end{cases}$$

Liegt der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises ausserhalb des Dreieckes, und zwar dem Winkel A gegenüber, so hat man, wie schon am Schlusse des Paragraph 3 bemerkt wurde, das Perpendikel p_1 negativ zu nehmen.

Ferner ist $CR = BN = 90^\circ$, also $DR = DN = 90^\circ - \frac{1}{2}a$; RN ist das Maass des Winkels A' und man ersieht hieraus, dass das Perpendikel DOD'' den Winkel A' halbirt.

Auf dieselbe Art wird bewiesen, dass die Perpendikel EOE'', FOF'' die Winkel B', C' des Polardreieckes halbiren.

Der Punkt O ist also zugleich der Mittelpunkt des dem Polardreieck $A'B'C'$ eingeschriebenen Kreises.

O_1, O_2, O_3 sind nach dem Vorhergehenden die Mittelpunkte der, den drei Nebendreiecken von ABC umschriebenen Kreise. Nun ist $DO_3 = 90^\circ$, weil O_3 der Pol von DE, $DO_2 = 90^\circ$, weil O_2 der Pol von DF und auch $DA' = 90^\circ$; der durch O_2, O_3 gelegte Hauptbogen geht also auch durch A'.

Eben so wird ersichtlich gemacht, dass die Bogen O_3O_1, O_2O_1 durch B', C' gehen.

Dies alles zusammengefasst, gibt folgenden

6. Lehrsatz.

Fällt man vom Mittelpunkte des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises auf die drei Seiten Perpendikel, so liegen erstens auf den Verlängerungen derselben die Ecken des Polardreieckes, und ihre Abstände von dem genannten Mittelpunkt ergänzen sich mit den zugehörigen Perpendikeln je zu 90°. Zweitens halbiren die Perpendikel die Winkel des Polardreieckes, und drittens gehen die Seiten des Dreieckes, dessen Ecken die Mittelpunkte der, den Nebendreiecken umschriebenen Kreise sind, durch die Ecken des Polardreieckes.

Das Dreieck $O_1O_2O_3$ mit jenem $A'B'C'$, welches die Endpunkte der winkelhalbirenden Transversalen des ersteren verbindet, ist also die Polarfigur zu ABC mit dem Transversalendreieck DEF.

§. 10.

An den Eckpunkten des Dreieckes DEF (Fig. 2) liegen ausser den Winkeln D, E, F, welche sich auf das genannte Dreieck beziehen, noch andere Winkel und wir wollen mit D_B, D_C die beiden Nachbarwinkel an D mit E_C, E_A die Nachbarwinkel von E, endlich mit F_A, F_B jene von F bezeichnen, wobei die Stellenzeiger sich auf die benachbarten Winkel des Dreieckes ABC beziehen.

Das Dreieck $FN'P$ ist rechtwinkelig bei P, ferner ist $FP = 90^\circ - \frac{1}{2}c$ und $N'P = 90^\circ - \frac{1}{2}(A+C-B)$ nach (17) und es folgt aus demselben:

$$\cos \tfrac{1}{2}c = \operatorname{ctg} F_A \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(A+C-B),$$

woraus der Winkel F_A durch die Bestandtheile des Dreieckes ABC bestimmt werden kann. Ein ähnliches Verfahren führt auch zur Kenntniss der übrigen Winkel dieser Art und man erlangt zu ihrer Berechnung folgendes System von Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg} F_A = \cos \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C-B), \\ \operatorname{ctg} F_B = \cos \tfrac{1}{2}c \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ \operatorname{ctg} E_A = \cos \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B-C), \\ \operatorname{ctg} E_c = \cos \tfrac{1}{2}b \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ \operatorname{ctg} D_B = \cos \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B-C), \\ \operatorname{ctg} D_c = \cos \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C-B), \end{cases}$$

für das ebene Dreieck wird:

$$F_B = E_c = A,$$
$$F_A = D_c = B,$$
$$E_A = D_B = C.$$

An den Endpunkten der Transversalen g_1, g_2, g_3 liegen je zwei Nachbarsegmente EG, FG' an g_1, DH, FH' an g_2, DJ, EJ' an g_3, welche wir der Reihe nach mit

$$g_{1b},\ g_{1c},\ g_{2a},\ g_{2c},\ g_{3a},\ g_{3b}$$

bezeichnen wollen, um zu erkennen, zu welcher Transversale sie gehören, und aus welcher Seite sie austreten. — In dem eben betrachteten rechtwinkeligen Dreieck $FN'P$ ist offenbar $FN' = EG = g_{1b}$, mithin:

$$(28)\quad \begin{cases} \cos g_{1b} = \sin \tfrac{1}{2}c \sin \tfrac{1}{2}(A+C-B) \text{ und eben so} \\ \cos g_{1c} = \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}(A+B-C), \\ \cos g_{2a} = \sin \tfrac{1}{2}c \sin \tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ \cos g_{2c} = \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(A+B-C), \\ \cos g_{3a} = \sin \tfrac{1}{2}b \sin \tfrac{1}{2}(B+C-A), \\ \cos g_{3b} = \sin \tfrac{1}{2}a \sin \tfrac{1}{2}(A+C-B), \end{cases}$$

wobei zwischen den neun Grössen G, nämlich diesen sechs und den drei Transversalen, noch folgende Gleichungen bestehen:

$$(29)\qquad \begin{cases} g_{1b}+g_1+g_{1c}=180^\circ \\ g_{2a}+g_2+g_{2c}=180^\circ \\ g_{3a}+g_3+g_{3b}=180^\circ. \end{cases}$$

In dem rechtwinkeligen Dreieck hBF (Fig. 2) ist

$$\begin{aligned} \sphericalangle hBF &= 180^\circ - B - \sphericalangle DBO, \text{ oder nach §. 7} \\ &= 90^\circ + \tfrac{1}{2}\varepsilon - B, \text{ also} \\ \sphericalangle hBF &= \tfrac{1}{2}(A+C-B), \end{aligned}$$

folglich wird, da $\sin Fh = \sin \frac{1}{2}c \,.\, \sin hBF$:

$$(30)\qquad \begin{cases} \sin Fh = \sin Fg = \sin Ed = \sin \frac{1}{2}c \,\sin \frac{1}{2}(A+C-B), \\ \sin Ek = \sin Eg = \sin Fd = \sin \frac{1}{2}b \,\sin \frac{1}{2}(A+B-C), \end{cases}$$

womit die Segmente bestimmt werden, welche die drei Perpendikel Bh, Dd, Ck des vierten Lehrsatzes, auf der Transversale g_1 erzeugen. Ähnliche Formeln gelten für die Segmente der Transversalen g_2 und g_3. — Im ebenen Dreieck wird

$$\begin{aligned} Fh = Fg = Ed &= \tfrac{1}{2}c \cos B, \\ Ek = Eg = Fd &= \tfrac{1}{2}b \cos C. \end{aligned}$$

In demselben Dreieck ist nach (23) $Bh = 90^\circ - r_1$, mithin $\cos \frac{1}{2}c = \sin r_1 \,.\, \cos Fh$, woraus folgt:

$$(31)\qquad \begin{cases} \cos Fh = \cos Fg = \cos Ed = \dfrac{\cos \frac{1}{2}c}{\sin r_1} \\ \cos Ek = \cos Eg = \cos Fd = \dfrac{\cos \frac{1}{2}b}{\sin r_1} \end{cases}$$

und mit Hilfe des Sinussatzes findet man unmittelbar:

$$(32)\qquad \begin{cases} \sin F_A = \dfrac{\cos r_1}{\sin \frac{1}{2}c}, \quad \sin F_B = \dfrac{\cos r_2}{\sin \frac{1}{2}c}, \quad \sin D_c = \dfrac{\cos r_3}{\sin \frac{1}{2}a}, \\ \sin E_A = \dfrac{\cos r_1}{\sin \frac{1}{2}b}, \quad \sin D_B = \dfrac{\cos r_2}{\sin \frac{1}{2}a}, \quad \sin E_c = \dfrac{\cos r_3}{\sin \frac{1}{2}b}. \end{cases}$$

§. 12.

Ist O (Fig. 1) der sphärische Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises und verbindet man denselben mit dem Mittelpunkte der Kugel, so steht diese Gerade auf der Ebene des Kreises senkrecht. Der umschriebene Kreis liegt aber in der Ebene des Sehnendreieckes und sein Mittelpunkt O' in dieser Ebene, ist der Durchschnitt der genannten Geraden mit derselben. Verbinden wir diesen Mittelpunkt O' mit den Ecken A, B, C des Dreieckes, so sind diese Verbindungsstrecken auf dem durch O' gehenden Kugelradius senkrecht. Bezeichnen wir die drei Winkel des Sehnendreieckes mit A, B, C, so ist bekanntlich:

$$(a)\qquad \begin{aligned} \sphericalangle BO'C &= 2A, \\ \sphericalangle AO'C &= 2B, \\ \sphericalangle AO'B &= 2C. \end{aligned}$$

Ziehen wir durch den sphärischen Mittelpunkt O an die Bogen OA, OB, OC Tangenten, so stehen diese auf dem durch O gehenden Kugelradius senkrecht, sind also zu den Schenkeln der Winkel (a) parallel. Diese Tangenten formiren aber unter sich die sphärischen Winkel BOC, AOC, AOB, mithin ist:

$$(33)\qquad \begin{cases} \sphericalangle BOC = 2A, \\ \sphericalangle AOC = 2B, \\ \sphericalangle AOB = 2C. \end{cases}$$

Liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ausserhalb des Dreieckes und dem Winkel A gegenüber, so hat man unter dem Winkel $BO'C$ in (a) bekanntlich den ausspringenden Winkel zu verstehen; eben so ist also auch in (33) $\sphericalangle BOC$ als ausspringender Winkel aufzufassen, so dass also in beiden Fällen die aufgeführten drei Winkel an einander liegen und zusammen 360° ausmachen.

7. Lehrsatz.

Verbindet man den Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck umschriebenen Kreises mit den drei Ecken, so entstehen um diesen Punkt drei an einander liegende, zusammen 360° ausmachende Winkel, welche der Ordnung nach doppelt so gross sind, als die Winkel des Sehnendreieckes.

Das Perpendikel DO theilt den Winkel $BOC = 2A$ in zwei gleiche Theile, mithin ist im Dreieck $COD \sphericalangle COD = A$ und

$$\operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg} r . \cos A.$$

Liegt jedoch der Mittelpunkt O ausserhalb des Dreieckes und dem Winkel A gegenüber, so ist $\sphericalangle COD = 180° - A$ mithin allgemein:

$$(34) \quad \begin{cases} \pm \operatorname{tg} p_1 = \operatorname{tg} r . \cos A, \text{ und eben so ist} \\ \operatorname{tg} p_2 = \operatorname{tg} r . \cos B, \\ \operatorname{tg} p_3 = \operatorname{tg} r . \cos C. \end{cases}$$

Für das ebene Dreieck gehen diese Gleichungen in die bekannten über:

$$\pm p_1 = r \cos A,$$
$$p_2 = r \cos B,$$
$$p_3 = r \cos C.$$

§. 13.

Die Winkel an der Basis a des Dreieckes BOC (Fig. 1) sind gleich, eben so jene an der Basis b im Dreieck AOC und an der Basis c im Dreieck AOB. Bezeichnen wir dieselben der Ordnung nach mit u_1, v_1, w_1, so ist

$$(b) \quad \begin{aligned} v_1 + w_1 &= A, \\ u_1 + w_1 &= B, \\ u_1 + v_1 &= C \end{aligned}$$

und die Auflösung dieser drei Gleichungen nach u_1, v_1, w_1 gibt:

$$u_1 = \tfrac{1}{2}(B + C - A),$$
$$v_1 = \tfrac{1}{2}(A + C - B),$$
$$w_1 = \tfrac{1}{2}(A + B - C).$$

Liegt der Mittelpunkt O des umschriebenen Kreises ausserhalb des Dreieckes und dem Winkel A gegenüber, so tritt in (b) $-u_1$ an die Stelle von u_1 und man hat also allgemein:

$$(35) \quad \begin{cases} \pm u_1 = \tfrac{1}{2}(B + C - A), \\ v_1 = \tfrac{1}{2}(A + C - B), \\ w_1 = \tfrac{1}{2}(A + B - C). \end{cases}$$

Aus dem rechtwinkeligen Dreieck COD folgt nun auch $\sin \frac{1}{2}a = \operatorname{tg} p_1 \,.\, \operatorname{ctg} u_1$ oder $\operatorname{tg} p_1 = \sin \frac{1}{2}a \,.\, \operatorname{tg} u_1$.

$$(36) \quad \begin{cases} \pm \operatorname{tg} p_1 = \sin \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C-A), \text{ eben so} \\ \operatorname{tg} p_2 = \sin \frac{1}{2}b \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+C-B), \\ \operatorname{tg} p_3 = \sin \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B-C) \end{cases}$$

und es ist das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem der Mittelpunkt O des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises innerhalb liegt oder ausserhalb und dem Winkel A gegenüber.

Ferner ist in dem Dreieck DOC, $\cos A = \cos \frac{1}{2}a \,.\, \sin u_1$ oder durch Substitution aus (35):

$$(37) \quad \begin{cases} \cos A = \cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}(B+C-A), \text{ eben so} \\ \cos B = \cos \frac{1}{2}b \sin \frac{1}{2}(A+C-B), \\ \cos C = \cos \frac{1}{2}c \sin \frac{1}{2}(A+B-C), \end{cases}$$

wobei in der ersten Gleichung das doppelte Zeichen entfällt, denn liegt der Mittelpunkt O ausserhalb des Dreieckes, so ist der Winkel DOC nicht gleich A, sondern $180^\circ - A$, also in diesem Falle

$$-\cos A = \cos \tfrac{1}{2}a \,.\, \sin u_1.$$

Hierin für u_1 den entsprechenden Werth aus (35) gesetzt, gibt unverändert die erste Zeile in (37).

Nunmehr gibt das bei f rechtwinkelige Dreieck DfF (Fig. 2), in welchem der Winkel bei F gleich $90^\circ - F_B$ ist

$$\cos g_2 = \operatorname{ctg} D \,.\, \operatorname{tg} F_B \text{ oder}$$
$$\operatorname{ctg} D = \cos g_2 \,.\, \operatorname{ctg} F_B;$$

ersetzt man hierin $\cos g_2$ und $\operatorname{ctg} F_B$ durch ihre Werthe aus (5) und (27), so folgt:

$$\operatorname{ctg} D = \cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

und da in jedem sphärischen Dreieck:

$$\cos \tfrac{1}{2}b \cos \tfrac{1}{2}c = \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A} \cos \tfrac{1}{2}a,$$

so wird

$$\operatorname{ctg} D = \frac{\cos \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A} \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C),$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen (37):

$$(27')\quad \begin{cases} \operatorname{ctg} D = \dfrac{\cos \mathrm{A}}{\sin A} \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C), \text{ eben so ist} \\ \operatorname{ctg} E = \dfrac{\cos \mathrm{B}}{\sin B} \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C), \\ \operatorname{ctg} F = \dfrac{\cos \mathrm{C}}{\sin C} \sin \tfrac{1}{2}(A+B+C), \end{cases}$$

womit auch die Winkel des Transversalendreieckes DEF, durch die Bestandtheile des primitiven Dreieckes ABC bestimmt werden, als Ergänzung zum System (27).

Für das ebene Dreieck ist $D=A$, $E=B$, $F=C$. —

Anmerkung 1. Die Gleichungen (37), welche die Winkel des Sehnendreieckes durch die Bestandtheile des sphärischen Dreieckes darstellen, habe ich bereits in Grunert's Archiv, Thl. XXXIII, p. 42, auf analytische Weise entwickelt und sie wurden hier nur des Zusammenhanges wegen reproducirt. Der siebente Lehrsatz, aus welchem sie hier abgeleitet werden, findet sich bereits bei Gudermann a. a. O. p. 52.

Anmerkung 2. Ist in einem spärischen Dreieck die Summe zweier Winkel dem dritten gleich, $B+C=A$, so wird $\cos \mathrm{A}=0$, $\mathrm{A}=90°$, das Sehnendreieck ist also rechtwinkelig. Die Formeln (36) geben noch $p_1=0$, d. h. der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises liegt auf der Seite a. Dem entsprechend geben auch die Gleichungen (28), $g_{2a}=g_{3a}=90°$.

§. 14.

Aufgabe. In einem sphärischen Dreieck sind die drei Perpendikel p_1, p_2, p_3 gegeben, welche vom Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf die Seiten gefällt werden; man soll das Dreieck auflösen.

Aus den Gleichungen (34) folgt:

$$(c)\quad \begin{aligned} \cos \mathrm{A} &= \pm \frac{\operatorname{tg} p_1}{\operatorname{tg} r}, \\ \cos \mathrm{B} &= \frac{\operatorname{tg} p_2}{\operatorname{tg} r}, \\ \cos \mathrm{C} &= \frac{\operatorname{tg} p_3}{\operatorname{tg} r}; \end{aligned}$$

da die Winkel A, B, C einem ebenen Dreieck angehören, so ist $A+B+C=180^\circ$ und es besteht zwischen dem Cosinus der Winkel die Relation:

$$(d) \quad 1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=0.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die Cosinus durch die vorher gegebenen Werthe und multiplicirt mit $\operatorname{tg}^2 r$, so folgt:

$$(38) \quad \operatorname{tg}^2 r-(\operatorname{tg}^2 p_1+\operatorname{tg}^2 p_2+\operatorname{tg}^2 p_3)\operatorname{tg} r\mp 2\operatorname{tg} p_1\operatorname{tg} p_2\operatorname{tg} p_3=0,$$

in welcher Gleichung $\operatorname{tg} r$ die Unbekannte ist. Sie ist die Bedingungsgleichung, durch welche die drei Perpendikel p_1, p_2, p_3 und der Radius r mit einander verbunden sind. (S. Note I am Ende.)

Um sie aufzulösen führen wir eine neue Unbekannte α ein, durch die Beziehung:

$$(39) \quad \operatorname{tg} r=2\sqrt{\mathfrak{A}}\cos\alpha,$$

indem wir

$$(40) \quad \tfrac{1}{3}(\operatorname{tg}^2 p_1+\operatorname{tg}^2 p_2+\operatorname{tg}^2 p_3)=\mathfrak{A}, \quad \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 p_1\operatorname{tg}^2 p_2\operatorname{tg}^2 p_3}=\mathfrak{G}$$

setzen. Hierdurch verwandelt sich die cubische Gleichung (38) in folgende:

$$4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\pm\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

der erste Theil ist jetzt offenbar gleich $\cos 3\alpha$ und wir haben daher zur Bestimmung der Unbekannten α die Gleichung:

$$(41) \quad \cos 3\alpha=\pm\left(\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{A}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

$\mathfrak{G}$ ist das geometrische, $\mathfrak{A}$ das arithmetische Mittel der drei positiven Grössen $\operatorname{tg}^2 p_1$, $\operatorname{tg}^2 p_2$, $\operatorname{tg}^2 p_3$; da nun immer $\mathfrak{G}<\mathfrak{A}$ (s. Cauchy Cours d' analyse, Note II), so gibt die Gleichung (41) immer einen reellen Werth von α und hiermit (39) den Werth von r.

Man hat nun zur Bestimmung des Radius r die beiden Gleichungen:

$$(42) \quad \begin{cases} \cos 3\alpha=\pm\dfrac{\operatorname{tg} p_1\operatorname{tg} p_2\operatorname{tg} p_3}{\sqrt{\frac{1}{3}(\operatorname{tg}^2 p_1+\operatorname{tg}^2 p_2+\operatorname{tg}^2 p_3)}}, \\ \operatorname{tg} r=2\sqrt{\frac{1}{3}(\operatorname{tg}^2 p_1+\operatorname{tg}^2 p_2+\operatorname{tg}^2 p_3)}\cos\alpha. \end{cases}$$

Kennt man r, den Radius des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises, so gibt das Dreieck DOC, $\cos r = \cos \frac{1}{2}a . \cos p_1$, oder

$$(43) \qquad \begin{cases} \cos \frac{1}{2}a = \dfrac{\cos r}{\cos p_1}, \text{ eben so ist} \\ \cos \frac{1}{2}b = \dfrac{\cos r}{\cos p_2}, \\ \cos \frac{1}{2}c = \dfrac{\cos r}{\cos p_3}, \end{cases}$$

zur Bestimmung der drei Seiten. Endlich geben die Gleichung (36):

$$(e) \qquad \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(B+C-A) = \pm \dfrac{\operatorname{tg} p_1}{\sin \frac{1}{2}a}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+C-B) = \dfrac{\operatorname{tg} p_2}{\sin \frac{1}{2}b}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B-C) = \dfrac{\operatorname{tg} p_3}{\sin \frac{1}{2}c}, \end{cases}$$

durch welche auch die drei Winkel bekannt werden.

§. 15.

Die vorstehende Auflösung der cubischen Gleichung (38) stützt sich auf die goniometrische Formel:

$$(f) \qquad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

nun ist aber auch

$$\cos 3\alpha = -\cos(180^\circ \pm 3\alpha) = -\cos 3(60^\circ \pm \alpha)$$
$$\cos 3\alpha = -4 \cos^3(60^\circ \pm \alpha) + 3 \cos(60^\circ \pm \alpha).$$

Die Gleichung (f) besteht daher fort, wenn man im zweiten Theile $-\cos(60^\circ \pm \alpha)$ statt $\cos \alpha$ setzt, d. h. die Gleichung (41) wird auch dann erhalten, wenn man statt (39) setzt:

$$(44) \qquad \operatorname{tg} r = -2\sqrt{3}\cos(60^\circ \pm \alpha).$$

Der Winkel α also, welcher aus (41) hervorgeht, gibt ausser dem Werthe (39) für $\operatorname{tg} r$ noch zwei andere Werthe (44), wodurch die cubische Gleichung (38) vollständig gelöset ist.

§. 16.

Indem wir zur Discussion über die Anzahl der Auflösungen der in § 14 behandelten Aufgabe übergehen, wollen wir voraussetzen, dass die drei Perpendikel p_1, p_2, p_3 nur ihrer Grösse nach gegeben sind.

Da r immer kleiner als 90°, so ist $\operatorname{tg} r$ immer positiv und es können also bei der Auflösung der Gleichung (38) nur die positiven Wurzeln in Betracht kommen.

Führen wir die p zuerst alle drei als positiv in Rechnung, so gilt in (41) das obere Zeichen, es wird $3\alpha < 90^\circ$, $\alpha < 30^\circ$ und die Gleichung (39) gibt den gesuchten Werth von $\operatorname{tg} r$. Mit dem gefundenen r geben alsdann die Formeln (43) die drei Seiten und jene (e) die drei Winkel des Dreieckes.

Diejenigen $\operatorname{tg} r$, welche aus der Gleichung (44) hervorgehen, sind in diesem Falle wegen $\alpha < 30^\circ$ beide negativ, also ungiltig.

Setzen wir jedoch voraus, dass eines der p negativ zu nehmen ist, so gilt in der Gleichung (41) das untere Zeichen und jetzt ist $3\alpha \gtrless \begin{matrix} 90^\circ \\ 270^\circ \end{matrix}$, also $\alpha \gtrless \begin{matrix} 30^\circ \\ 90^\circ \end{matrix}$ und die Gleichung (39) gibt jetzt noch immer einen positiven Werth von $\operatorname{tg} r$. Aber auch die Gleichung (44) gibt mit dem oberen Zeichen einen positiven Werth, während das untere Zeichen immer auf eine negative Wurzel führt.

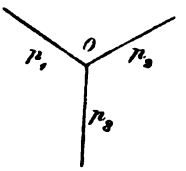
Für die beiden gefundenen r geben alsdann wieder die Gleichungen (43) und (e) die Seiten und Winkel des zugehörigen Dreieckes.

§. 17.

Die vorgelegte Aufgabe hat also, in sofern nur die Grösse der Perpendikel p_1, p_2, p_3 gegeben ist, im Allgemeinen drei Auflösungen: Im ersten Dreieck liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb desselben, in den beiden letzten ausserhalb.

Um der Vorstellung zu begegnen, dass die verschiedene Aufeinanderfolge der Perpendikel p_1, p_2, p_3 um den Punkt O, auf verschiedene Dreiecksformen führen könnte, bemerken wir Folgendes: Drei Elemente geben sechs Versetzungen und da die in gerade umgekehrter Ordnung auszuschliessen sind, so bleiben drei:

$$p_1, p_2, p_3,$$
$$p_1, p_3, p_2,$$
$$p_2, p_1, p_3,$$



aber diese drei verschiedenen Versetzungen geben, wie nebenstehende Figur zeigt, keine verschiedenen Aufeinanderfolgen um den Punkt O.

Liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ausserhalb, so liegt er immer demjenigen Winkel des sphärischen Dreieckes gegenüber, dessen Sehnenwinkel stumpf ist; diesem liegt die grösste Seite des Sehnendreieckes, folglich auch die grösste Seite des sphärischen Dreieckes gegenüber.

Ergab die vorige Rechnung z. B. a als grösste Seite, so liegt der Mittelpunkt O dem Winkel A gegenüber und p_1 ist negativ.

Rechnet man demnach die Winkel des Sehnendreieckes nach den Formeln:

$$\cos A = -\frac{\operatorname{tg} p_1}{\operatorname{tg} r},$$

$$\cos B = \frac{\operatorname{tg} p_2}{\operatorname{tg} r},$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{tg} p_3}{\operatorname{tg} r},$$

so wird A stumpf und die Summe A+B+C muss 180° ausmachen, womit zugleich die geführte Rechnung controlirt wird.

Zuweilen kann eine Auflösung, auch wenn tg r positiv gefunden ist, durch folgenden Umstand entfallen:

Der Werth von tg r, welcher aus der Gleichung (38) hervorgeht, leistet immer der Forderung Genüge, dass die Quotienten:

$$\frac{\operatorname{tg} p_1}{\operatorname{tg} r}, \quad \frac{\operatorname{tg} p_2}{\operatorname{tg} r}, \quad \frac{\operatorname{tg} p_3}{\operatorname{tg} r}$$

statt cos A, cos B, cos C in die Bedingungsgleichung (d) eingesetzt, dieselbe erfüllen. Wenn jedoch die Zahlenwerthe dieser Quotienten grösser als die Einheit ausfallen, so können sie nicht mehr als Cosinus betrachtet werden und einem solchen Falle entspricht auch kein Dreieck.

§. 18.

Beispiel.

Es soll ein sphärisches Dreieck gefunden werden, dessen aus dem Mittelpunkte seines umschriebenen Kreises, auf die drei Seiten gefällte Perpendikel die folgenden Grössen haben:

$$p_1 = 26^\circ\ 48'\ 47''1,$$
$$p_2 = 29\ \ 21\ \ \ 5\cdot3,$$
$$p_3 = 19\ \ 27\ \ 55\cdot9.$$

Aus diesen Angaben folgt:

$$\lg \operatorname{tg} p_1 = 9\cdot7036550, \quad \operatorname{tg}^2 p_1 = 0\cdot2554524,$$
$$\lg \operatorname{tg} p_2 = 9\cdot7500109, \quad \operatorname{tg}^2 p_2 = 0\cdot3162437,$$
$$\lg \operatorname{tg} p_3 = 9\cdot5483179, \quad \operatorname{tg}^2 p_3 = 0\cdot1249211,$$

Arithmetisches Mittel $\mathfrak{A} = 0\cdot2322057,$

$$\lg \sqrt{\mathfrak{A}} = 9\cdot6829364;$$

hiermit findet man nach (41): $\lg \cos 3\alpha = 9\cdot9531745,$

$$3\alpha = 26^\circ\ \ 7'\ \ 51''5, \quad \lg \cos \alpha = 9\cdot9949620,$$
$$\alpha = \ \ 8\ \ 42\ \ 37\cdot2,$$

wonach folgt:

$$\lg \operatorname{tg} r = 9\cdot9789284,$$
$$r = 43^\circ\ 36'\ 38''0.$$

und nun nach (43):

$$\lg \cos r = 9\cdot8597654,$$
$$\lg \cos p_1 = 9\cdot9505999,$$
$$\lg \cos p_2 = 9\cdot9403318,$$
$$\lg \cos p_3 = 9\cdot9744389,$$

$\lg \cos \frac{1}{2}a = 9\cdot9091655$	$\lg \sin \frac{1}{2}a = 9\cdot7669118,$
$\lg \cos \frac{1}{2}b = 9\cdot9194336$	$\lg \sin \frac{1}{2}b = 9\cdot7456608,$
$\lg \cos \frac{1}{2}c = 9\cdot8853265$	$\lg \sin \frac{1}{2}c = 9\cdot8065350,$

$$\tfrac{1}{2}a = 35^\circ\ 46'\ 47''2, \quad a = 71^\circ\ 33'\ 34''4,$$
$$\tfrac{1}{2}b = 33\ \ 49\ \ 53\cdot0, \quad b = 67\ \ 39\ \ 46\cdot0,$$
$$\tfrac{1}{2}c = 39\ \ 49\ \ 51\cdot1, \quad c = 79\ \ 39\ \ 42\cdot2.$$

Durch Anwendung der Formel (c) für das Sehnendreieck, erhält man:

$\lg \cos A = 9\cdot7247266$	$A = 57^\circ\ 57'\ 26''5,$
$\lg \cos B = 9\cdot7710825$	$B = 53\ \ 49\ \ 14\cdot8,$
$\lg \cos C = 9\cdot5693895$	$C = 68\ \ 13\ \ 18\cdot7,$
	Summe $= 180\ \ 0\ \ 0\cdot0.$

Endlich geben die Gleichungen (e) zur Bestimmung der Winkel:

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C-A) &= 9\cdot 9367432,\\
\lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C-B) &= 0\cdot 0043501,\\
\lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B-C) &= 9\cdot 7417829,\\
\tfrac{1}{2}(B+C-A) &= 40^\circ\ 50'\ 31''2,\\
\tfrac{1}{2}(A+C-B) &= 45\ \ 17\ \ 13\cdot 0,\\
\tfrac{1}{2}(A+B-C) &= 28\ \ 53\ \ 23\cdot 9,\\
\text{Summe} &= 115\ \ 1\ \ 8\cdot 1,\\
A &= 74\ \ 10\ \ 36\cdot 9,\\
B &= 69\ \ 43\ \ 55\cdot 1,\\
C &= 86\ \ 7\ \ 44\cdot 2.
\end{aligned}$$

Da kein Winkel des Sehnendreieckes stumpf ist, so liegt der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises innerhalb des Dreieckes.

Nimmt man in der Formel (41), in der Absicht, noch andere Dreiecke der verlangten Eigenschaft zu finden, das untere Zeichen, so wird:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= 60^\circ - \alpha = 51^\circ\ 17'\ 22''8,\\
\alpha'' &= 60^\circ + \alpha' = 111\ \ 17\ \ 22\cdot 8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lg \cos \alpha' &= 9\cdot 7961463,\\
\lg \cos \alpha'' &= 9\cdot 5600061\,n
\end{aligned}$$

und hiermit wird:

$$\begin{aligned}
\lg \operatorname{tg} r' &= 9\cdot 7801127,\\
\lg \operatorname{tg} r'' &= 9\cdot 5439725.
\end{aligned}$$

Mit dem ersteren Werthe, geben die Formeln (43) unmittelbar:

$$\begin{array}{l|l}
\lg \cos \tfrac{1}{2}a = 9\cdot 9821097 & \lg \sin \tfrac{1}{2}a = 9\cdot 4490483,\\
\lg \cos \tfrac{1}{2}b = 9\cdot 9923778 & \lg \sin \tfrac{1}{2}b = 9\cdot 2688619,\\
\lg \cos \tfrac{1}{2}c = 9\cdot 9582707 & \lg \sin \tfrac{1}{2}c = 9\cdot 6213127,
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}a &= 16^\circ\ 19'\ 59''2, & a &= 32^\circ\ 39'\ 58''4,\\
\tfrac{1}{2}b &= 10\ \ 42\ \ 1\cdot 5, & b &= 21\ \ 24\ \ 3\cdot 0,\\
\tfrac{1}{2}c &= 24\ \ 43\ \ 0\cdot 0, & c &= 49\ \ 26\ \ 0\cdot 0.
\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises liegt jetzt ausserhalb des Dreieckes und da c die grösste Seite ist, dem Winkel C gegenüber. Auch erhält man aus den Formeln (c) für die Winkel des Sehnendreieckes, indem p_3 negativ genommen wird:

$\log\cos A = 9{\cdot}9235423$	$A =$	33°	$0'$	$35''9,$
$\log\cos B = 9{\cdot}9698982$	$B =$	21	5	$13{\cdot}0,$
$\log\cos C = 9{\cdot}7682052\,n$	$C =$	125	54	$10{\cdot}9,$
	Summe $=$	180	0	$0{\cdot}0-0''2.$

Um die sphärischen Winkel selbst zu finden, hat man wieder nach (e):

$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C-A) = 0{\cdot}2546067,$			
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+C-B) = 0{\cdot}4811490,$			
$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B-C) = 9{\cdot}9270052\,n,$			
$\frac{1}{2}(B+C-A) =$	60°	$54'$	$29''1,$
$\frac{1}{2}(A+C-B) =$	71	43	$26{\cdot}0,$
$\frac{1}{2}(A+B-C) =$	-40	12	$26{\cdot}9,$
Summe $=$	92	25	$28{\cdot}2,$
$A =$	31	30	$59{\cdot}1,$
$B =$	20	42	$2{\cdot}3,$
$C =$	132	37	$55{\cdot}1.$

Für den zweiten Werth $\operatorname{tg} r''$ zeigt sich aus der Betrachtung der Logarithmen:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} r'' &< \operatorname{tg} p_1,\\ &< \operatorname{tg} p_2,\\ &< \operatorname{tg} p_3;\end{aligned}$$

es tritt also der, am Schlusse des Paragraph 17 erwähnte Ausnahmsfall ein und man erhält kein Dreieck.

§. 19.

Halbirt man in einem sphärischen Dreieck ABC (Fig. 3) die drei Winkel, so schneiden sich die Transversalen im Mittelpunkte o des eingeschriebenen Kreises.

Die drei Winkel, welche um den Punkt o entstehen, bezeichnen wir in der Ordnung der gegenüberliegenden Seiten a, b, c, mit G_1, G_2, G_3.

Halbirt man hingegen die Aussenwinkel des Dreieckes ABC, so sind die Durchschnitte der Transversalen O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise; sie formiren ein Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des Dreieckes ABC gehen und wir wollen die Winkel desselben mit denselben Buchstaben O_1, O_2, O_3 bezeichnen.

Bestimmen wir aus den beiden Dreiecken ABC, G_0BC, welche die Seite $BC=a$ gemeinschaftlich haben, diese Seite a durch die drei Winkel, so erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=\frac{\cos G_1+\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C},$$

durch deren Auflösung $\cos G_1$ als Function der drei Winkel des Dreieckes ABC dargestellt wird. In der That erhält man nach kurzer Rechnung:

$$(g)\qquad \cos G_1=-\frac{1+\cos B+\cos C-\cos A}{4\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C},$$

wollte man eben so den Winkel O_1 bestimmen, so tritt $180^\circ-B$ $180^\circ-C$ an die Stelle von B, C und man hat daher auch:

$$(h)\qquad \cos O_1=-\frac{1-\cos A-\cos B-\cos C}{4\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}C}.$$

Zur Berechnung der sechs Winkel G und O, lassen sich vermöge des in den beiden letzten Gleichungen ausgesprochenen Gesetzes der Abhängigkeit folgende zwei Formelsysteme aufstellen:

$$(45)\qquad \begin{cases} \cos G_1=-\dfrac{1+\cos B+\cos C-\cos A}{4\cos\tfrac{1}{2}B\cos\tfrac{1}{2}C}, \\ \cos G_2=-\dfrac{1+\cos A+\cos C-\cos B}{4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}C}, \\ \cos G_3=-\dfrac{1+\cos A+\cos B-\cos C}{4\cos\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}B}, \end{cases}$$

$$(46)\quad \begin{cases} \cos O_1 = -\dfrac{1-\cos A-\cos B-\cos C}{4\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C}, \\ \cos O_2 = -\dfrac{1-\cos A-\cos B-\cos C}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C}, \\ \cos O_3 = -\dfrac{1-\cos A-\cos B-\cos C}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B}. \end{cases}$$

§. 20.

Zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes bestehen nun folgende Relationen:

$$\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a) = \frac{1-\cos A+\cos B+\cos C}{4\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c) = -\frac{1-\cos A-\cos B-\cos C}{4\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C},$$

(s. meine Abhandlung über das sphärische Dreieck, dargestellt in seinen Beziehungen zum Kreis, in Grunert's Archiv, Theil XXXIII, p. 31), womit die beiden Gleichungen (g) und (h) sich in die folgenden verwandeln:

$$(47)\quad \begin{cases} \cos G_1 = -\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c-a), \text{ eben so ist} \\ \cos G_2 = -\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}(a+c-b), \\ \cos G_3 = -\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b-c), \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} \cos O_1 = \sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(a+b+c), \text{ und eben so} \\ \cos O_2 = \sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}(a+b+c), \\ \cos O_3 = \sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(a+b+c). \end{cases}$$

Für das ebene Dreieck wird

$$G_1 = 90^\circ+\tfrac{1}{2}A,\ G_2 = 90^\circ+\tfrac{1}{2}B,\ G_3 = 90^\circ+\tfrac{1}{2}C,$$
$$O_1 = 90^\circ-\tfrac{1}{2}A,\ O_2 = 90^\circ-\tfrac{1}{2}B,\ O_3 = 90^\circ-\tfrac{1}{2}C.$$

Fällt man von O_1 (Fig. 3) auf die Seiten die Senkrechten O_1m, O_1n, O_1p, so ist offenbar $Cn = Cm$, $Bm = Bp$, mithin

$$An+Ap = a+b+c,$$

weil aber $An = Ap$, $An = Ap = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Aus dem rechtwinkeligen Dreieck AO_1n, folgt nun $\cos\frac{1}{2}A = \operatorname{ctg} AO_1 . \operatorname{tg} An$ oder

$$(49)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} AO_1 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}A}, \text{ eben so wird} \\ \operatorname{tg} BO_2 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}B}, \\ \operatorname{tg} CO_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\cos\frac{1}{2}C}. \end{cases}$$

Aus der ersten Formel in (48) folgt, wenn die Winkel O_1 und A constant bleiben, dass auch $a+b+c$ denselben Werth behält. Dann gibt auch die erste Gleichung (49) denselben Werth von AO_1.

Wenn man also den Winkel BO_1C um O_1 dreht und die jeweiligen Durchschnitte B und C mit einander verbindet, so haben alle diese Dreiecke mit ABC denselben Umfang. (Siehe Note II. am Ende.)

§. 21.

Wenden wir jetzt die Gleichungen (37) §. 13 auf das Polardreieck an, indem wir alle Buchstaben mit Strichen versehen und kehren mit Hilfe der bekannten Relationen $a' = 180° - A$, $A' = 180° - a$ etc. zum Hauptdreieck zurück, so zeigt sich:

$$(50)\qquad \begin{cases} \cos A' = \sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}(b+c-a), \\ \cos B' = \sin\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}(a+c-b), \\ \cos C' = \sin\frac{1}{2}C \cos\frac{1}{2}(a+b-c), \end{cases}$$

welche Gleichungen die Winkel des dem Polardreiecke entsprechenden Sehnendreieckes durch die Bestandtheile des Hauptdreieckes bestimmen.

Vergleicht man diese Formeln mit jenen (47), so folgt:

$$\cos G_1 = -\cos A',$$
$$\cos G_2 = -\cos B',$$
$$\cos G_3 = -\cos C'.$$

Da der Punkt o immer innerhalb des Dreieckes ABC liegt, so sind die Winkel G je einzeln immer kleiner als $180°$, und da ein Gleiches von den Winkeln A', B', C' gilt, so ist aus den vorhergehenden Gleichungen der Schluss gestattet:

$$(51)\qquad \begin{cases} G_1+A'=180^\circ, \\ G_2+B'=180^\circ. \\ G_3+C'=180^\circ, \end{cases}$$

was in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt, folgenden Lehrsatz gibt:

8. Lehrsatz.

Verbindet man den Mittelpunkt des, einem sphärischen Dreiecke eingeschriebenen Kreises mit den drei Ecken, so ergänzen sich die um diesen Punkt entstehenden Winkel mit den Sehnenwinkeln des Polardreieckes zu 180°.

§. 22.

Bezeichnen wir mit q_1, q_2, q_3 die drei Entfernungen des Mittelpunktes o (Fig. 3) von den Ecken A, B, C und fällen wir von diesem Mittelpunkt o auf die drei Seiten a, b, c Perpendikel oD_1, oE_1, oF_1, so sind diese einander gleich, als Radien des eingeschriebenen Kreises. Die sechs Winkel, welche hierdurch entstanden, sind paarweise ebenfalls gleich und zwar immer jene, welche eine Transversale q als Schenkel gemeinschaftlich haben. Bezeichnen wir diese Winkel, so wie sie die Transversalen q_1, q_2, q_3 gemeinschaftlich haben, mit x, y, z, so lehrt der Anblick der Figur, dass

$$\begin{aligned} y+z &= G_1, \\ x+z &= G_2, \\ x+y &= G_3, \end{aligned}$$

woraus durch Auflösung nach x, y, z folgt:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(G_2+G_3-G_1), \\ y &= \tfrac{1}{2}(G_1+G_3-G_2), \\ z &= \tfrac{1}{2}(G_1+G_2-G_3), \end{aligned}$$

oder weil offenbar $G_1+G_2+G_3 = 360^\circ$ ist:

$$(52)\qquad \begin{cases} x = 180^\circ-G_1 = A', \\ y = 180^\circ-G_2 = B', \\ z = 180^\circ-G_3 = C', \end{cases}$$

die Winkel, welche die Berührungsradien des eingeschriebenen Kreises formiren, $2x$, $2y$, $2z$, sind also doppelt so gross, als die Winkel A', B', C', was folgenden Lehrsatz gibt:

9. Lehrsatz.

Fällt man vom Mittelpunkt des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises auf die drei Seiten Perpendikel, so sind die um diesen Punkt entstehenden Winkel der Reihe nach doppelt so gross, als die Sehnenwinkel des Polardreieckes.

Bezeichnen wir den Radius des eingeschriebenen Kreises mit ρ, so gibt das rechtwinkelige Dreieck oAE_1 : $\operatorname{ctg} q_1 = \operatorname{ctg}\rho \,.\, \cos x$ oder

$$(53)\qquad \begin{cases} \operatorname{ctg} q_1 = \operatorname{ctg}\rho \cos A' \text{ und eben so ist} \\ \operatorname{ctg} q_2 = \operatorname{ctg}\rho \cos B', \\ \operatorname{ctg} q_3 = \operatorname{ctg}\rho \cos C'. \end{cases}$$

Ferner gibt dasselbe Dreieck:

$$(54)\qquad \begin{cases} \sin\rho = \sin\tfrac{1}{2}A \sin q_1, \text{ wonach auch} \\ \sin\rho = \sin\tfrac{1}{2}B \sin q_2, \\ \sin\rho = \sin\tfrac{1}{2}C \sin q_3. \end{cases}$$

Da die Seitenstrecken AE_1, AF_1, ferner BD_1, BF_1 und CD_1, CE_1 paarweise einander gleich sind, überdies die Summe je zweier Bogen einer Seite des Dreieckes gleich ist, so findet man leicht, dass

$$AE_1 = AF_1 = \tfrac{1}{2}(b+c-a),$$
$$BD_1 = BF_1 = \tfrac{1}{2}(a+c-b),$$
$$CD_1 = CE_1 = \tfrac{1}{2}(a+b-c).$$

In dem eben betrachteten rechtwinkeligen Dreieck oAE_1 ist nun $\cos\tfrac{1}{2}A = \operatorname{ctg} q_1 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b+c-a)$ oder

$$(55)\qquad \begin{cases} \operatorname{ctg} q_1 = \cos\tfrac{1}{2}A \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(b+c-a), \text{ also auch} \\ \operatorname{ctg} q_2 = \cos\tfrac{1}{2}B \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+c-b), \\ \operatorname{ctg} q_3 = \cos\tfrac{1}{2}C \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(a+b-c), \end{cases}$$

durch welche Gleichungen die Abstände q_1, q_2, q_3 des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises von den drei Ecken direct aus den Bestandtheilen des Dreieckes ABC bestimmt werden.

§. 23.

Aufgabe. Es sind die Abstände q_1, q_2, q_3 des Mittelpunktes des einem sphärischen Dreieck eingeschriebenen Kreises, von den drei Ecken gegeben, man soll das Dreieck auflösen.

Aus den Gleichungen (53) folgt zunächst:

$$(i)\qquad \begin{cases} \cos A' = \dfrac{\operatorname{ctg} q_1}{\operatorname{ctg}\rho}, \\ \cos B' = \dfrac{\operatorname{ctg} q_2}{\operatorname{ctg}\rho}, \\ \cos C' = \dfrac{\operatorname{ctg} q_3}{\operatorname{ctg}\rho}, \end{cases}$$

da nun die Winkel A', B', C' als Winkel eines geradlinigen Dreieckes 180° zur Summe haben, so müssen ihre Cosinus die Bedingungsgleichung erfüllen:

$$(d)\quad 1-\cos^2 A'-\cos^2 B'-\cos^2 C'-2\cos A'\cos B'\cos C'=0.$$

Ersetzt man hierin die Cosinus durch die vorhergehenden Werthe und multiplicirt die resultirende Gleichung mit $\operatorname{ctg}^2\rho$, so folgt:

$$(56)\quad \operatorname{ctg}^2\rho-(\operatorname{ctg}^2 q_1+\operatorname{ctg}^2 q_2+\operatorname{ctg}^2 q_3)\operatorname{ctg}\rho-2\operatorname{ctg} q_1\operatorname{ctg} q_2\operatorname{ctg} q_3=0.$$

In dieser Gleichung, welche die Bedingung ausdrückt, durch welche die drei Distanzen q_1, q_2, q_3 mit dem Radius ρ verbunden sind (s. Note I. am Ende), erscheint im Sinne unserer Aufgabe ctg. ρ, als Unbekannte. Diese in Bezug auf ctg ρ cubische Gleichung unterscheidet sich von jener (38) nur dadurch, dass beziehungsweise ctg ρ, ctg q_1, ctg q_2, ctg q_3 statt tg r, tg p_1, tg p_2, tg p_3 steht; sie wird also auf dieselbe Art, wie die (38) aufgelöset.

Wir setzen also

$$(57)\qquad \mathfrak{A}=\tfrac{1}{3}(\operatorname{ctg}^2 q_1+\operatorname{ctg}^2 q_2+\operatorname{ctg}^2 q_3),$$

$$(58)\qquad \cos 3\alpha=\frac{\operatorname{ctg} q_1\operatorname{ctg} q_2\operatorname{ctg} q_3}{\sqrt{\mathfrak{A}^3}}$$

und hiermit wird

$$(59)\qquad \operatorname{ctg}\rho=2\sqrt{\mathfrak{A}}\cos\alpha;$$

hat man ρ gefunden, so bestimmen die Gleichungen (54) die Winkel des gesuchten Dreieckes, indem aus ihnen folgt:

$$(k)\qquad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A = \dfrac{\sin\rho}{\sin q_1}, \\ \sin\frac{1}{2}B = \dfrac{\sin\rho}{\sin q_2}, \\ \sin\frac{1}{2}C = \dfrac{\sin\rho}{\sin q_3}; \end{cases}$$

die Seiten des Dreieckes hingegen folgen aus (55) nach kurzer Rechnung, denn es ist

$$(l)\qquad \begin{cases} \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(b+c-a) = \dfrac{\operatorname{ctg} q_1}{\cos\frac{1}{2}A}, \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+c-b) = \dfrac{\operatorname{ctg} q_2}{\cos\frac{1}{2}B}, \\ \operatorname{ctg}\frac{1}{2}(a+b-c) = \dfrac{\operatorname{ctg} q_3}{\cos\frac{1}{2}C}\ ^{1}). \end{cases}$$

Berechnet man noch nach den am Anfange dieses Paragraph gegebenen Formeln (i) die Sehnenwinkel des Polardreieckes, so dient ihre Summe, welche 180° beträgt, der Rechnung als Controle.

Ist in dem ebenen Dreieck A'B'C' ein Winkel, z. *B*, A' stumpf, so wird der zweite Theil in der Gleichung (i) für cos A' negativ, woraus folgt, da ρ immer kleiner als 90°, dass q_1 grösser als 90° wird. In einem solchen Falle wird das letzte Glied der cubischen Gleichung (56) positiv und der zweite Theil in (58) negativ, $3\alpha > 90°$, $\alpha > 30°$. Jetzt hat man zur Bestimmung von ρ nicht nur die eine Gleichung (59), sondern auch noch, wie in (44) die folgende:

$$(60)\qquad \operatorname{ctg}\rho = -2\sqrt{\mathfrak{A}}\cos(60°+\alpha)$$

und die vorgelegte Aufgabe hat also zwei Auflösungen.

---

[1]) Wir können daher der Ansicht Professor Skrivan's (s. Grunert's Archiv, Theil XXVIII, p. 471), dass zur Bestimmung des Dreieckes ausser den Distanzen q_1, q_2, q_3 oder jenen p_1, p_2, p_3, auch noch der Radius ρ oder ein Winkel gegeben sein müsse, nicht beipflichten.

Da übrigens die Gleichung (56) nur die Bedingung ausspricht, dass die drei Quotienten

$$\frac{\operatorname{ctg} q_1}{\operatorname{ctg} \rho}, \quad \frac{\operatorname{ctg} q_2}{\operatorname{ctg} \rho}, \quad \frac{\operatorname{ctg} q_3}{\operatorname{ctg} \rho},$$

statt $\cos A'$, $\cos B'$, $\cos C'$ in (d) eingesetzt, derselben Genüge leisten, so kann auch hier für specielle Werthe von q_1, q_2, q_3, wenn eines der q grösser als 90° ist, der Fall eintreten, dass selbst ein positiver Werth von $\operatorname{ctg}\rho$, gezogen aus (60), keine Dreiecksauflösung gibt, indem diese Quotienten grösser als die Einheit ausfallen.

§. 24.

Beispiel.

Es soll das Dreieck gefunden werden, dessen Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises von den drei Ecken die Entfernungen hat:

$$q_1 = 44^\circ\ 16'\ 58''0,$$
$$q_2 = 47\ \ 26\ \ 15\cdot 7,$$
$$q_3 = 38\ \ \ 4\ \ 15\cdot 3.$$

Es ist zunächst

$$\lg \operatorname{ctg} q_1 = 0\cdot 0108738, \quad \operatorname{ctg}^2 q_1 = 1\cdot 0513506,$$
$$\lg \operatorname{ctg} q_2 = 9\cdot 9630004, \quad \operatorname{ctg}^2 q_2 = 0\cdot 8433364,$$
$$\lg \operatorname{ctg} q_3 = 0\cdot 1060825, \quad \operatorname{ctg}^2 q_3 = 1\cdot 6299150;$$

Arithmetisches Mittel $\mathfrak{A} = 1\cdot 1748673,$

hiermit findet man

$$\lg \sqrt{\mathfrak{A}} = 0\cdot 0349944,$$
$$\lg \sqrt{\mathfrak{A}^3} = 0\cdot 1049832,$$
$$\lg \operatorname{ctg} q_1 \operatorname{ctg} q_2 \operatorname{ctg} q_3 = 0\cdot 0799567,$$
$$\lg \cos 3\alpha = 9\cdot 9749735,$$
$$3\alpha = 19^\circ\ 15'\ 53''7,$$
$$\alpha = \ 6\ \ 25\ \ 17\cdot 9,$$
$$\lg \cos \alpha = 9\cdot 9972665,$$
$$\lg \operatorname{ctg} \rho = 0\cdot 3332907,$$
$$\rho = 24^\circ\ 54'\ 03''3,$$

endlich nach den Gleichungen (k):

$$\begin{array}{l|l} \lg \sin \frac{1}{2}A = 9\cdot 7803541 & \lg \cos \frac{1}{2}A = 9\cdot 9018411, \\ \lg \sin \frac{1}{2}B = 9\cdot 7571363 & \lg \cos \frac{1}{2}B = 9\cdot 9140744, \\ \lg \sin \frac{1}{2}C = 9\cdot 8343048 & \lg \cos \frac{1}{2}C = 9\cdot 8636730, \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}A = 37^\circ & 5' & 19''4, & A = 74^\circ\ 10'\ 38''8, \\ \frac{1}{2}B = 34 & 51 & 57\cdot 3, & B = 69\ 43\ 54\cdot 6, \\ \frac{1}{2}C = 43 & 3 & 51\ 2, & C = 86\ 7\ 42\cdot 4. \end{array}$$

Da die Logarithmen der Cotangenten von q_1, q_2, q_3 und ρ bereits in Rechnung stehen, so erlangt man durch Subtraction:

$$\begin{aligned} \lg \cos A' &= 9\cdot 6775829, \\ \lg \cos B' &= 9\cdot 6297095, \\ \lg \cos C' &= 9\cdot 7727916, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} A' = 61^\circ & 34' & 38''1, \\ B' = 64 & 46 & 2\cdot 6, \\ C' = 53 & 39 & 19\cdot 3 \end{array}$$

und nun folgt nach den Formeln (l) die Berechnung der Seiten:

$$\begin{aligned} \lg \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(b+c-a) &= 0\cdot 1090327, \\ \lg \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(a+c-b) &= 0\cdot 0489260, \\ \lg \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}(a+b-c) &= 0\cdot 2424095, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rllll} \frac{1}{2}(b+c-a) = & 37^\circ & 52' & 55''7, \\ \frac{1}{2}(a+c-b) = & 41 & 46 & 46\cdot 0, \\ \frac{1}{2}(a+b-c) = & 29 & 46 & 50\cdot 2, \\ \hline \text{Summe} = & 109 & 26 & 31\cdot 9, \\ a = & 71 & 33 & 36\cdot 2, \\ b = & 67 & 39 & 45\cdot 9, \\ c = & 79 & 39 & 41\cdot 7. \end{array}$$

Note I.

Sind A, B, C drei Winkel eines ebenen Dreieckes, oder allgemein gesprochen, ist ihre Summe 180°, so besteht zwischen den Cosinus derselben auch folgende Gleichung:

$$(c)\quad \sqrt{\frac{1}{\cos A+\cos B+\cos C-1}}=\frac{1}{\cos B+\cos C-\cos A+1}+\frac{1}{\cos A+\cos C-\cos B+1}+\frac{1}{\cos A+\cos B-\cos C+1},$$

wie auf folgende Art bewiesen werden kann: Bezeichnen wir die vier Nenner der Kürze wegen mit a, b, c, d, bringen das erste Glied des zweiten Theiles in den ersten und multipliciren die Gleichung mit ab, so folgt:

$$2(1-\cos A)=ab\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

und wenn man jetzt mit cd multiplicirt und das Resultat mit 2 abkürzt:

$$(1-\cos A)\,cd=(1+\cos A)\,ab.$$

Nun ist leicht einzusehen, dass nach der Bedeutung von a, b, c, d

$$ab=(\cos B+\cos C)^2-(1-\cos A)^2,$$
$$cd=(1+\cos A)^2-(\cos B-\cos C)^2,$$

die Werthe in die vorhergehende Gleichung substituirt gibt:

$$(1-\cos A)\{(1+\cos A)^2-(\cos B-\cos C)^2\}$$
$$=(1+\cos A)\{(\cos B+\cos C)^2-(1-\cos A)^2\}$$

oder wenn man jene Glieder im ersten Theile vereiniget, welche den Factor $1-\cos^2 A$ enthalten, alsdann reducirt und mit 2 abkürzt:

$$(d)\quad \begin{aligned}&1-\cos^2 A=\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C,\\ &1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C-2\cos A\cos B\cos C=0\end{aligned}$$

und diese ist die Bedingungsgleichung zwischen den Cosinus dreier Winkel A, B, C, deren Summe 180° ausmacht, so wie sie gewöhnlich gegeben wird; (I) ist also nur eine andere Form derselben.

Dividiren wir die Gleichung (I) durch $\operatorname{tg} r$ und substituiren für die in den Nennern entstehenden Producte ihre Werthe aus (34), so folgt:

$$\text{(II)}\quad \frac{1}{\pm\operatorname{tg}p_1+\operatorname{tg}p_2+\operatorname{tg}p_3-\operatorname{tg}r}=\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}p_2+\operatorname{tg}p_3\mp\operatorname{tg}p_1+\operatorname{tg}r}\\ +\dfrac{1}{\pm\operatorname{tg}p_1+\operatorname{tg}p_3-\operatorname{tg}p_2+\operatorname{tg}r}\\ +\dfrac{1}{\pm\operatorname{tg}p_1+\operatorname{tg}p_2-\operatorname{tg}p_3+\operatorname{tg}r}\end{array}\right.$$

und dies ist eine andere Form der Bedingungsgleichung (38), durch welche die drei Perpendikel p_1, p_2, p_3 mit dem Radius r des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises mit einander verbunden sind. Es gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem der Mittelpunkt O dieses Kreises innerhalb des Dreieckes liegt, oder ausserhalb und dem Winkel A gegenüber.

Für das ebene Dreieck ist unter Voraussetzung der analogen Bedeutung der Buchstaben bekanntlich:

$$\begin{aligned}\pm p_1 &= r\cos A,\\ p_2 &= r\cos B,\\ p_3 &= r\cos C,\end{aligned}$$

während die Gleichung (I) unverändert bleibt. Man hat daher in diesem Falle als Bedingungsgleichung zwischen den vier Grössen p_1, p_2, p_3 und r folgende:

$$\text{(III)}\quad \frac{1}{\pm p_1+p_2+p_3-r}\left\{\begin{array}{l}+\dfrac{1}{p_2+p_3\mp p_1+r}\\ +\dfrac{1}{\pm p_1+p_3-p_2+r}\\ +\dfrac{1}{\pm p_1+p_2-p_3+r}.\end{array}\right.$$

Im XXXIII. Theile von Grunert's Archiv p. 420, haben wir gezeigt, dass im ebenen Dreiecke:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \pm p_1 + p_2 + p_3 - r = \rho, \\ \quad p_2 + p_3 \mp p_1 + r = \rho_1, \\ \pm p_1 + p_3 - p_2 + r = \rho_2, \\ \pm p_1 + p_2 - p_3 + r = \rho_3, \end{cases}$$

wenn ρ den Radius des dem Dreiecke ABC eingeschriebenen Kreises und ρ_1, ρ_2, ρ_3 die Radien der drei äusseren Berührungskreise bezeichnen, so wie sie der Ordnung nach den Seiten a, b, c gegenüber liegen, auf welche die Perpendikel p_1, p_2, p_3 gefällt wurden. Durch Substitution der Werthe aus (IV) in (III) folgt die bekannte Gleichung

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_3}.$$

Dieselbe Aufgabe, wie jene des §. 14 für das ebene Dreieck gestellt, führt auf die cubische Gleichung in r:

$$\text{(V)}\qquad r^3 - (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) r \mp 2 p_1 p_2 p_3 = 0$$

und die Auflösung ist analog. —

Denken wir uns die Buchstaben A, B, C in der Gleichung (I) mit Strichen versehen, indem wir dieselben jetzt auf das Dreieck A′B′C′ beziehen und dividiren dieselbe mit $\operatorname{ctg}\rho$, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen (53):

$$\text{(VI)}\qquad \frac{1}{\operatorname{ctg} q_1 + \operatorname{ctg} q_2 + \operatorname{ctg} q_3 - \operatorname{ctg}\rho} = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{ctg} q_2 + \operatorname{ctg} q_3 - \operatorname{ctg} q_1 + \operatorname{ctg}\rho} \\ + \dfrac{1}{\operatorname{ctg} q_1 + \operatorname{ctg} q_3 - \operatorname{ctg} q_2 + \operatorname{ctg}\rho} \\ + \dfrac{1}{\operatorname{ctg} q_1 + \operatorname{ctg} q_2 - \operatorname{ctg} q_3 + \operatorname{ctg}\rho}. \end{cases}$$

Diese Gleichung spricht die Bedingung aus, durch welche die Distanzen q_1, q_2, q_3 mit dem Radius ρ verbunden sind und ist von der Gleichung (56) nur der Form nach verschieden, in welche sie auch durch algebraische Transformation übergeht.

Für das ebene Dreieck werden die Tangenten den Bogen gleich und die Gleichung (VI) sieht dann so aus:

$$\text{(VII)}\qquad \frac{1}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}-\frac{1}{\rho}} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{\rho}} \\ + \dfrac{1}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_3}-\frac{1}{q_2}+\frac{1}{\rho}} \\ + \dfrac{1}{\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-\frac{1}{q_3}+\frac{1}{\rho}} \end{array} \right.$$

q_1, q_2, q_3 sind jetzt die geradlinigen Entfernungen des Mittelpunktes des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises vom Radius ρ, von den drei Ecken. Als cubische Gleichung nach $\frac{1}{\rho}$ dargestellt, hat sie die Form:

$$\text{(VIII)}\qquad \left(\frac{1}{\rho}\right)^3-\left(\frac{1}{q_1^2}+\frac{1}{q_2^2}+\frac{1}{q_3^2}\right)\frac{1}{\rho}-\frac{2}{q_1q_2q_3}=0$$

und die Aufgabe des §. 23 für das ebene Dreieck gestellt, erfordert die Auflösung dieser Gleichung nach $\frac{1}{\rho}$.

Note II.

Das am Schlusse des §. 20 gegebene Theorem gibt ein Mittel an die Hand, sphärische Figuren in andere von gleichem Umfang zu verwandeln, welche gegebene Bedingungen erfüllen. Wir wollen die Anwendung dieses Theorems an einigen Beispielen zeigen.

I. Aufgabe. Ein Dreieck in ein anderes von gleichem Umfange zu verwandeln, welches mit dem ersteren einen Winkel gemeinschaftlich und eine anliegende Seite von gegebener Grösse hat.

Ist ABC (Fig. 5) dieses Dreieck und AB_1 die gegebene Seite, so halbire man die Aussenwinkel an B und C und bestimme den Durchschnitt O_1. Verbindet man O_1 mit B_1 und macht den Winkel $CO_1C_1 = \alpha$, so ist auch:

$$\sphericalangle B_1O_1C_1 = \sphericalangle BO_1C,$$

mithin hat das Dreieck AB_1C_1 mit ABC denselben Umfang.

Zusatz. Nimmt man von den gleichen Umfängen der Dreiecke ABC und AB_1C_1 die gemeinschaftlichen Stücke AB_1, AC weg, so sind auch die Reste gleich und gibt man zu beiden den Bogen B_1C,

so entstehen die Dreiecke BB_1C und BCC_1, also haben auch diese gleichen Umfang.

2. Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein gleichschenkeliges zu verwandeln, welches mit dem ersteren gleichen Umfang und einen Winkel gemeinschaftlich hat.

Man halbire wieder die Aussenwinkel B und C des gegebenen Dreieckes ABC (Fig. 6), bestimme den Durchschnitt O_1 und verbinde O_1 mit A. Wird nun der Winkel BO_1C durch O_1m halbirt und der Winkel $BO_1B_1 = C_1O_1C = \alpha$ gemacht, so ist erstens:

$$\sphericalangle B_1O_1C_1 = \sphericalangle BO_1C,$$

mithin das Dreieck AB_1C_1 von gleichem Umfang mit ABC und zweitens

$$\sphericalangle B_1O_1A = \sphericalangle C_1O_1A,$$

$\Delta ABO_1 \cong \Delta AC_1O_1$, also das Dreieck AB_1C_1 gleichschenkelig.

3. Aufgabe. Ein Dreieck in ein anderes von gleichem Umfang zu verwandeln, welches mit ersterem eine Seite gemeinschaftlich hat, während eine zweite Seite durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

Es sei ABC (Fig. 7) das gegebene Dreieck, BC die gemeinschaftliche Seite und M der gegebene Punkt. Man ziehe CM, verlängere BA über A hinaus und halbire die Winkel MCA und mAC, den Durchschnitt O_1 der Theilungslinien verbinde man mit B, macht man nun $\sphericalangle A_1O_1C = \alpha$ und zieht A_1B, so hat das Dreieck A_1BC mit ABC gleichen Umfang (Zusatz zur 1. Aufgabe). Dieselben Constructionen finden in der Ebene statt.

Fig. 1.

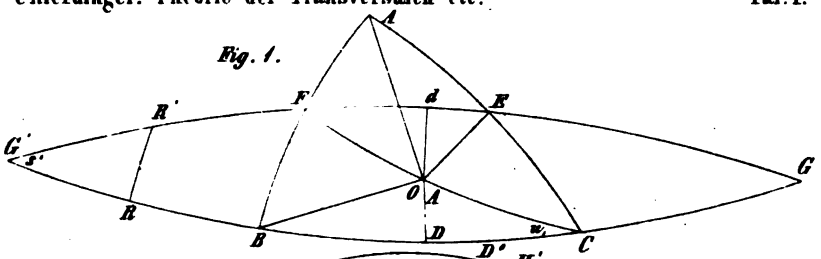


Fig. 2.

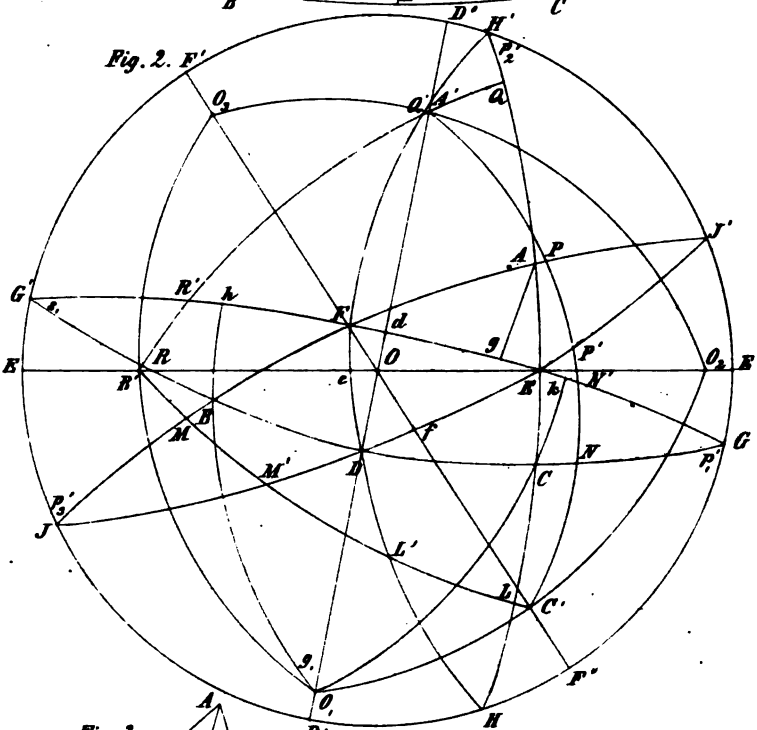


Fig. 3.

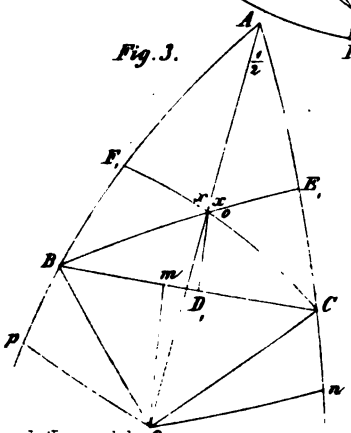
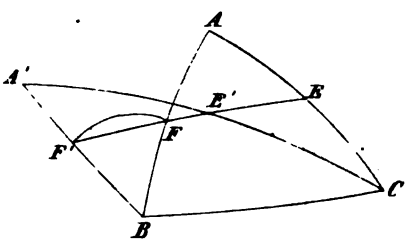


Fig. 4.



J. Werost lith. Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei.

Fig. 5.

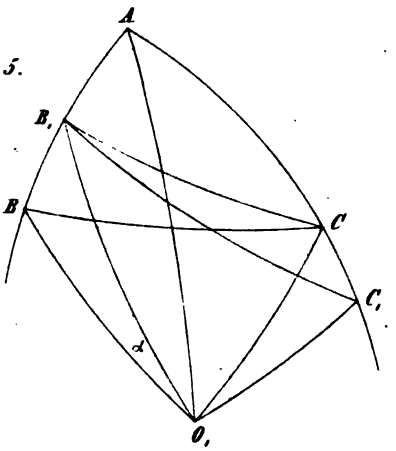


Fig. 6.

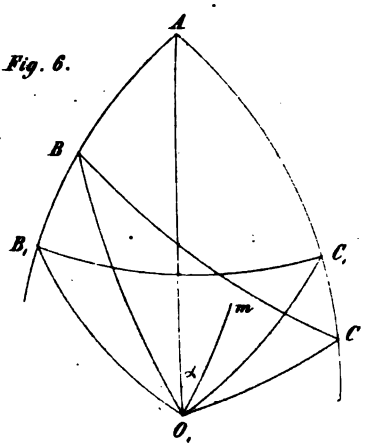
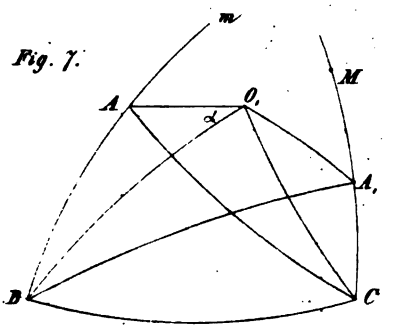


Fig. 7.



J. Werosto lith. Aus d k k Hof u Staatsdruckerei.
Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LII. Bd. II. Abth. 1865.

Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger Kreisvielecke.

Von Dr. **Aug. Schwarzer,**
Lehrer am Realgymnasium zu Tabor.

Gehören in einem Sehnenviereck zu den drei Seiten der Reihe nach die Bogen u, v, w, so gehört zur vierten Seite der Bogen $u+v+w$ oder auch jener, welcher den Bogen $u+v+w$ zur ganzen Peripherie ergänzt. Bezeichnet man die dem Bogen u zugehörige Sehne mit a_u, so müssen folgerichtig die Seiten eines Kreisviereckes mit a_u, a_v, a_w, a_{u+v+w} und die Diagonalen mit a_{u+v} und a_{w+v} bezeichnet werden. Im Nachfolgenden werden blos regelmässige Kreisvielecke zur Betrachtung kommen, es werden daher blos Sehnen vorkommen, die gleichen Bogen oder dem Vielfachen desselben Bogens entsprechen, die Zeiger u, v, . . werden stets ganze Zahlen sein, so wird a die Sehne des einfachen, a_2 die des doppelt so grossen Bogens etc. ausdrücken.

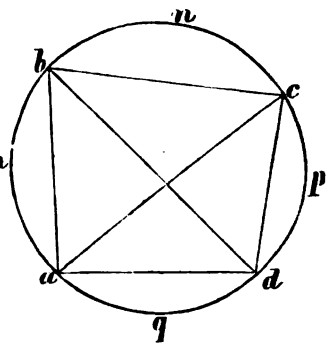
Wird die halbe Peripherie des Kreises in n gleiche Theile getheilt, so ist die Sehne eines solchen Bogentheiles die Seite des regelmässigen $2n$-Eckes (a.), und die Sehne von n Bogentheilen ist der Durchmesser oder nach der gewählten Bezeichnung $a_n = 2r$.

Jeder Sehne entsprechen zwei Bogen, die einander zur Peripherie ergänzen und es ist $a_v = a_{2n-v}$. Streng genommen entsprechen jeder Sehne unendlich viele Bogen, doch erscheint es hier nicht nöthig auf Bogen, die grösser als die Peripherie sind, einzugehen.

Dagegen wird es zweckdienlich sein auf den Sinn, in welchem die Bogen durchlaufen werden, Rücksicht zu nehmen, wobei bemerkt werden muss, dass die Sehnen negativer Bogen auch negativ zu nehmen sind, daher $a_{-v} = -a_v$ . . . a).

Die Zulässigkeit dieser Annahme wird in der Trigonometrie für die Sinuse als halbe Sehnen erwiesen, und gilt dann offenbar auch

für ganze Sehnen. Benützt man diese Annahme zur Verallgemeinerung des Ptolomäischen Lehrsatzes, ergibt auch die Richtigkeit des Gefolgerten deren Zulässigkeit.



Wendet man nämlich den Ptolomäischen Satz einmal auf das Kreisviereck *abcd* und das andere Mal auf das Kreisviereck *abdc* an, so erhält man in beiden Fällen dieselbe Gleichung.

Im ersten Falle entsprechen den Seiten *ab, bc, cd, da* der Reihe nach die Bogen *m, n, p, q*, es können daher die Seiten mit a_m, a_n, a_p, a_q und die Diagonalen mit a_{m+n}, a_{p+n} bezeichnet werden, und der Ptolomäische Satz gibt die Gleichung:

$$a_m\, a_p + a_n\, a_q = a_{m+n} \cdot a_{p+n}.$$

Im zweiten Falle nämlich im Kreisvierecke *abdca* entspricht

der Seite *ab*, der Bogen m
„ „ *bd*, „ „ $n+p$
„ „ *dc*, „ „ p
„ „ *ca*, „ „ $p+q$

der Bogen *dc* ist jedoch im entgegengesetzten Sinne durchlaufen und muss negativ genommen werden, es sind daher die Seiten des Viereckes der Reihe nach: a_m, a_{n+p}, a_{-p}, a_{p+q} und der Ptolomäische Satz gibt die Gleichung

$$a_m\, a_{-p} + a_{n+p}\, a_{p+q} = a_{m+n+p}\, a_{n+p-p}$$

oder zufolge Annahme $a_{-p} = -a_p$

$$-a_m\, a_p + a_{n+p}\, a_{p+q} = a_{m+n+p}\, a_n$$

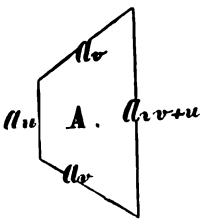
und weil $a_{p+q} = a_{m+n}$
$a_{m+n+p} = a_q$

auch $-a_m\, a_p + a_{n+p}\, a_{m+n} = a_q\, a_n$
oder $a_m\, a_p + a_n\, a_q = a_{m+n}\, a_{p+n}$
dieselbe Gleichung wie im ersten Falle.

Bei der Annahme $a_{-p} = -a_p$ gestattet daher der Ptolomäische Satz eine allgemeine Anwendung auf alle Kreisvierecke, und umge-

kehrt konnte aus der Verallgemeinerung des Satzes die Nothwendigkeit dieser Annahme gefolgert werden.

Nachdem dieses vorausgeschickt wurde, können wir zur Aufstellung der für die folgende Entwickelung nothwendigen Grundgleichungen schreiten, sie ergeben sich durch Anwendung des Ptolomäischen Satzes auf einige specielle Kreisvierecke.



Das Kreisviereck A gibt:

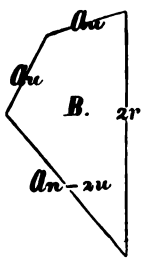
$$a_v^2 + a_u\, a_{2v+u} = a^2_{u+v} \quad \ldots \quad \text{I.}$$

Das Kreisviereck B:

$$a_u\, a_{n-2u} + 2r a_u = a_{2u}\, a_{n-u} \quad \ldots \quad \text{II.}$$

Das Kreisviereck C:

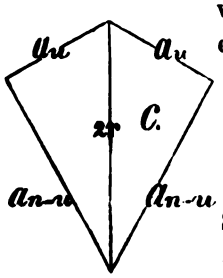
$$a_u\, a_{n-u} + a_u\, a_{n-u} = 2r a_{2u} \text{ oder}$$
$$a_u\, a_{n-u} = r a_{2u} \quad \ldots \quad \text{III.}$$



Das rechtwinkelige Dreieck des Kreisviereckes C gibt auch:

$$a_u^2\, a^2_{n-u} = 4r^2 \quad \ldots \quad \text{IV.}$$

Aus diesen Grundgleichungen erhält man durch geeignete Eliminationen weitere bemerkenswerthe Gleichungen. Aus III und IV ergibt sich durch Elimination von a_{n-u} die Gleichung



$$a_{2u}^2 = \frac{a_u^2 (4r^2 - a_u^2)}{r^2} \quad \ldots \quad \text{1.}$$

Dies ist die bekannte Relation zwischen der Sehne des einfachen (a_u) und der Sehne des doppelten Bogens (a_{2u}).

Aus II und III durch Elimination von a_{n-u} folgt:

$$a_{n-2u} = \frac{a^2_{2u}\, r}{a_u^2} - 2r$$

oder für a_{2u} aus 1. den Werth gesetzt

$$a_{n-2u} = \frac{2r^2 - a_u^2}{r} \quad \ldots \quad \text{2.}$$

Setzt man in Gleichung 2. statt $u = \frac{n-u}{2}$ und lässt nachträglich die Striche bei u aus, erhält man

$$a_u = \frac{2r^2 - a^2_{\frac{n-u}{2}}}{r} \text{ oder}$$

$$a^2_{\frac{n-u}{2}} = 2r^2 - ra_u \quad \ldots \quad 3.$$

wird weiter darin statt u gesetzt $-u$, folgt:

$$a^2_{\frac{n+u}{2}} = 2r^2 + ra_u \quad \ldots \quad 4.$$

Diese Gleichungen können schon zur Herstellung von Beziehungsgleichungen zwischen der Vieleckseite und dem Halbmesser verwendet werden, geben jedoch bei grösseren n Gleichungen zu hoher Grade. Setzt man beispielsweise $n = 5$ so ist a_1 die Seite des Zehneckes, und setzt man weiter $u = 1$ so übergeht Gleichung 3 in

$$a_2^2 = 2r^2 - ra.$$

und Gleichung 1 in

$$a_2^2 = \frac{a_1^2(4r^2 - a_1^2)}{r^2}$$

daher: $2r^2 - ra_1 = \frac{a_1^2(4r^2 - a_1^2)}{r^2}$

oder geordnet und auf Null gebracht:

$$a_1^4 - 4r^2a_1^2 - r^3a_1 + 2r^4 = 0.$$

Diese Gleichung drückt die Beziehung zwischen der Zehneckseite und dem Halbmesser aus, jedoch nicht in genug einfacher Weise, da bekanntlich für die Zehneckseite die einfache Gleichung

$$a^2 + ar - r^2 = 0 \text{ besteht,}$$

die in der obigen als Factor enthalten ist, denn

$$a^4 - 4r^2a^2 - r^3a + 2r^4 = (a^2 + ar - r^2)(a^2 - ar - 2r^2).$$

Der Zweck der nachfolgenden Entwickelung ist daher auf einfacherem Wege zu Beziehungsgleichungen niederer Grade zu gelangen.

Setzt man in Gleichung I. für v den Ausdruck $\frac{r}{2}$ folgt:

$$a^2_{\frac{n-pu}{2}} + a_u\, a_{n-pu+u} = a^2_{u+\frac{n-pu}{2}} \text{ oder}$$

$$a^2_{\frac{n-pu}{2}} = a^2_{\frac{n-(p-2)u}{2}} - a_u\, a_{n-(p-1)u}, \text{ und für } u = 1$$

$$a^2_{\frac{n-p}{2}} = a^2_{\frac{n-(p-2)}{2}} - a_1\, a_{n-(p-1)} \quad . \quad . \quad . \quad 5.$$

In dieser Gleichung erscheint auf der anderen Seite der Zeiger p herabgemindert.

Unsere Betrachtung wird sich auf Vielecke beschränken, für welche n eine ungerade Zahl ist, denn ein jedes Vieleck, für welches n eine gerade Zahl ist, kann stets auf die halbe Seitenzahl herabgemindert werden, und man gelangt so stufenweise entweder zu einem Vieleck, dessen n eine ungerade Zahl ist, oder auf $n = 2$. Der letzte Fall tritt ein bei Vielecken, deren Seitenzahl durch 2^m ausgedrückt ist, und deren Berechnung aus dem regelmässigen Vierecke in bekannter Weise durch Verdopplung der Seitenzahl weiter schreitet. Es ist demnach nur der erste Fall für n ungerad hier von Interesse. Für diesen Fall muss auch p ungerad genommen werden, da nur dann der Zeiger $\frac{n-p}{2}$ eine ganze Zahl wird. Bei diesen Voraussetzungen kann man durch fortgesetzte Anwendung der Gleichung 5 bis auf eine Gleichung gelangen, in der $p-2=1$ wird, es ergibt sich in dieser Weise folgende Reihe von Gleichungen:

$$a^2_{\frac{n-p}{2}} = a^2_{\frac{n-(p-2)}{2}} - a_1\, a_{n-(p-1)}$$

$$a^2_{\frac{n-(p-2)}{2}} = a^2_{\frac{n-(p-4)}{2}} - a_1\, a_{n-(p-3)}$$

$$a^2_{\frac{n-(p-4)}{2}} = a^2_{\frac{n-(p-6)}{2}} - a_1\, a_{n-(p-5)}$$

. . . . . .

$$a^2_{\frac{n-5}{2}} = a^2_{\frac{n-3}{2}} - a_1\, a_{n-4}$$

$$a^2_{\frac{n-3}{2}} = a^2_{\frac{n-1}{2}} - a_1\, a_{n-2}.$$

Multiplicirt man die linken und die rechten Seiten der Gleichungen, so heben sich sämmtliche Glieder der linken Seite mit

Ausnahme des ersten, gegen die gleichen Glieder der rechten Seite auf, und es bleibt die Gleichung:

$$a^2_{\frac{n-p}{2}} = a^2_{\frac{n-1}{2}} - a_1 (a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-6} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-(p-3)} + a_{n-(p-1)}) \ldots 6.$$

Nun ist aus Gleichung 2

$$a_{n-2} = \frac{2r^2 - a^2}{r} = 2r - \frac{a^2}{r} \text{ daher auch}$$

$$a_{n-4} = 2r - \frac{a_2^2}{r}$$

$$a_{n-6} = 2r - \frac{a_3^2}{r}$$

. . . . . .

$$a_{n-(p-1)} = 2r - \frac{a^2_{\frac{p-1}{2}}}{r}, \text{ und die Summe}$$

$$a_{n-2} + a_{n-4} + a_{n-6} \ldots + a_{n-(p-1)} = \left(\frac{p-1}{2}\right) 2r - \frac{1}{r}\left(a_1^2 + a_2^2 + a^2_3 \right.$$
$$\left. \ldots + a^2_{\frac{p-1}{2}}\right)$$

Aus Gleichung 3 ist ferner $a^2_{\frac{n-1}{2}} = 2r^2 - ra.$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 6, folgt:

$$a^2_{\frac{n-p}{2}} = 2r^2 - ra_1 - a_1\left[(p-1)r - \frac{1}{r}\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a^2_{\frac{p-1}{2}}\right)\right]$$

oder reducirt:

$$a^2_{\frac{n-p}{2}} = 2r^2 - pra + \frac{a}{r}\left(a^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a^2_{\frac{p-1}{2}}\right) \ldots 7.$$

Diese Gleichung besitzt die Eigenthümlichkeit, dass sie zwei verschiedenen Vielecken Genüge leistet. Da nämlich das Quadrat einer positiven Sehne gleich ist dem Quadrate der negativen, so ist auch $a^2_{\frac{n-p}{2}} = a^2_{\frac{p-n}{2}} = a^2_{\frac{2p-n-p}{2}}$, und daraus ist ersichtlich, dass das Vieleck, dessen halbe Seitenzahl n ist, sich bezüglich der Gleichung 7 eben so verhält wie das Vieleck, dessen halbe Seitenzahl $2p-n$ ist. Diese Bemerkung ist für die Anwendung der Gleichung 7 von grosser

Wichtigkeit, was sich alsbald an einigen speciellen Fällen ergeben wird.

Anwendung der Gleichung 7 auf das Zehneck.

1. Für das Zehneck ist $n = 5$, setzt man weiter $p = 3$ ergibt die Gleichung 7:

$$a_1^2 = 2r^2 - 3a_1 r + \frac{a_1^3}{r} \text{ oder geordnet}$$

$$a^3 - a^2 r - 3ar^2 + 2r^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 8.$$

Dieselbe Gleichung erhält man nach obiger Bemerkung für das Vieleck, dessen halbe Seitenzahl $2p - n = 1$ ist, also hier für das Zweieck, denn setzt man in Gleichung 7, $n = 1$ so wird $a^{2\frac{n-p}{2}} = a^{2\frac{1-3}{2}} = a^{2}_{-1} = a_1^2$ und die rechte Seite der Gleichung ändert sich ebenfalls nicht.

In der Gleichung 8 sind daher die Wurzeln des Zweieckes enthalten, die als für das Zehneck unbrauchbar durch Division fortgeschafft werden können.

Die Seite des Zweieckes ist aber $a_1 = 2r$, demnach ist $a_1 - 2r$ ein Wurzelfactor der Gleichung 8, und durch Division folgt:

$$a^3 - a^2 r - 3ar^2 + 2r^3 : a - 2r = a^2 + ar - r^2,$$

daher $a^2 + ar - r^2 = 0$ die bekannte Relation zwischen Zehneckseite und Halbmesser.

2. Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man $p = 1$ setzt, dann gibt Gleichung 7:

$$a_2^2 = 2r^2 - ra$$

oder wenn man Gleichung 1 anwendet und die Sehne des doppelten Bogens durch die des einfachen ausdrückt:

$$a_1^2 \left(\frac{4r^2 - a_1^2}{r^2} \right) = 2r^2 - ra \text{ , geordnet}$$

$$a_1^4 - 4r^2 a_1^2 - r^3 a_1 + 2r^4 = 0 \quad . \quad . \quad 9.$$

In diesem Falle ist $2p - n = -3$: daher hat das negative Sechseck — denn — 3 ist die halbe Seitenzahl — dieselben Wurzeln wie Gleichung 9.

Die Wurzeln des negativen Sechseckes sind gleich den Wurzeln des positiven mit umgekehrten Zeichen, es ist demnach nöthig, die Wurzeln des positiven Sechseckes zu kennen.

Diese findet man, wenn man in Gleichung 7, $n=3$ und $p=1$ setzt, es folgt:

$$a_1^2 = 2r^2 - ra_1 \text{ oder}$$
$$a_1^2 + ra_1 - 2r^2 = 0.$$

Ändert man in dieser Gleichung die Zeichen der Wurzeln, indem man das Zeichen der ungeraden Potenz von a_1 umkehrt, so wird die umgeänderte Gleichung dem negativen Sechsecke entsprechen, und dividirt man Gleichung 9 durch dieselbe, so gelangt man abermals zu der einfachsten Relation zwischen Zehneckseite und Halbmesser; denn

$$a_1^4 - 4r^2a_1^2 - r^3a_1 + 2r^4 : a_1^2 - ra_1 - 2r^2 = a_1^2 + a_1r - r^2.$$

Anwendung der Gleichung 7 auf die 14Eckseite, und Berechnung der 14Eckseite.

1. Substitution: $n=7$, $p=5$ gibt:

$$a_{\frac{7-5}{2}} = a_1 = 2r^2 - 5ra_1 + \frac{a_1}{r}(a_1^2 + a_2^2)$$

Wird auf der rechten Seite a_2 durch a_1 ausgedrückt (mittelst Gleichung 1), und reducirt, ergibt sich als Beziehungsgleichung zwischen der 14. Eckseite und dem Halbmesser:

$$a^5 - 5a^3r^2 + a^2r^3 + 5ar^4 - 2r^5 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \alpha).$$

Für diesen Fall ist $2p-n=3$; daher sind die Wurzeln des Sechseckes in der Gleichung α) enthalten, diese sind aber aus der vorhergehenden Entwicklung für das Zehneck bereits bekannt, nämlich enthalten in der Gleichung $a_1^2 + ra_1 - 2r^2 = 0$; daher

$$a^5 - 5a^3r^2 + a^2r^3 + 5ar^4 - 2r^5 : a_1^2 + ra_1 - 2r^2 = a^3 - a^2r - 2ar^2 + r^3$$

und

$$a^3 - a^2r - 2ar^2 + r^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

ist die einfachste Relation zwischen der Vierzehneckseite und dem Halbmesser.

3. Substitution: $n=1$, $p=3$, gibt:

$$a^{\frac{7-3}{2}}=a_1^2=2r^2-3ra+\frac{a^3}{r}$$

oder auf a_1 gebracht und reducirt:

$$a^4+a^3r-4a^2r^2-3ar^3+2r^4=0 \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

Für diesen Fall ist $2p-n=-1$; daher sind in Gleichung $b)$ die Wurzeln des negativen Zweieckes enthalten. Für das positive Zweieck ist $a_1=2r$, daher für das negative.

$$a_1=-2r \text{ oder } a_1+2r=0 \text{ und}$$
$$a^4+a^3r-4a^2r^2-3ar^3+2r^4 : a+2r=a^3-a^2r-2ar^2+r^2,$$

wie bei der ersten Substitution.

Berechnung der 14Eckseite.

Gleichung 10 kann mittelst der Kardan'schen Formel aufgelöst werden. Zur Vereinfachung setze man $r=1$, und es übergeht Gleichung 10 in

$$a^3-a^2-2a+1=0.$$

Um die zweite Potenz von a wegzuschaffen, setze man $a=y+\frac{1}{3}$, und erhält

$$y^3-\frac{7}{3}y+\frac{7}{27}=0.$$

Nach der Kardan'schen Formel aufgelöst:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{7}{54}+\sqrt{\frac{7^3}{54^2}-\frac{7^3}{27^2}}}+\sqrt[3]{-\frac{7}{54}-\sqrt{\frac{7^3}{54^2}-\frac{7^3}{27^2}}}$$

Nach einfacher Reduction:

$$y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{7}{2}}\left(\sqrt[3]{-1+3i\sqrt{3}}-\sqrt[3]{1+3i\sqrt{3}}\right)$$

und $a=\frac{1}{3}+y$

Es erscheint hier y in imaginärer Form, hat aber wie die Theorie kubischer Gleichungen lehrt, drei reelle Werthe. Entwickelt man

nämlich die imaginären Ausdrücke in Reihen, erhält man nach einiger Reduction:

$$(3i\sqrt{3}-1)^{\frac{1}{3}}-(3i\sqrt{3}+1)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3^2}-\frac{5}{3^8}+\frac{22}{3^{18}}-\frac{22.17}{3^{19}}+\frac{5.11.17.23}{3^{36}}\right)$$

eine sehr convergente Reihe.

Es ist hier nicht der Zweck, die Berechnung durchzuführen, da dies eine blosse Rechenaufgabe ist, doch sei hier bemerkt, dass die durchgeführte Rechnung für a sogleich den brauchbaren Werth gibt, der mit dem auf trigonometrischen Wege gefundenen vollkommen übereinstimmt.

Anwendung der Gleichung 7 auf die 22Eckseite.

Substitution: $n = 11$, $p = 7$ gibt

$$a^2_{\frac{n-7}{2}} = a_2^2 = 2r^2 - 7ra + \frac{a}{r}(a^2 + a_1^2 + a_3^2) \quad . \quad . \quad . \; c).$$

Hier ist nur die Beziehung zwischen a_3 und a_1 unbekannt, wenn die Gleichung in eine Function von a_1 umgewandelt werden soll. Diese Beziehung ergibt sich jedoch leicht aus dem Vierecke A wenn man darin drei Seiten als gleich annimmt.

Man erhält durch Anwendung des Ptolomäischen Satzes auf dieses Viereck

$$a_1^2 + a_1 a_3 = a_2^2$$

$$a_3 = \frac{a_2^2 - a_1^2}{a_1}$$

Substituirt man in Gleichung c) für a_2 und a_3 die ihnen entsprechenden Functionen von a_1, setzt $r = 1$ und reducirt, so folgt für das 22Eck die Gleichung

$$a^7 - 7a^5 + a^4 + 14a^3 - 4a^2 - 7a + 2 = 0 \quad . \quad . \quad . \; d).$$

Für diesen Fall ist $2p - n = 3$, es sind daher in der Gleichung d) auch die Wurzeln des Sechseckes enthalten, und durch Division

$$a^7 - 7a^5 + a^4 + 14a^3 - 4a^2 - 7a + 2 : a^3 + a - 2$$

erhält man als einfachere Relation zwischen der 22Eckseite und dem Halbmesser:

$$a^5 - a^4 - 4a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \; 11.$$

Die hier durchgeführten Beispiele werden genügen, die Bedeutung der Gleichung 7 und zugleich die Art ihrer Anwendung klar zu machen.

Selbstständige Entwicklung der Gleichung für die Zehneckseite und der Relation zwischen Zehneck, Fünfeckseite und Halbmesser.

Wir fügen diese Entwicklung hier bei, da sie die bisher übliche Methode an Einfachheit zu übertreffen scheint, und blos den Ptolomäischen Satz voraussetzt.

Aus dem Viereck vom Schema *C* folgt für $u = 1$

$$2a_1\, a_4 = 2r\, a_2 \text{ oder } a_1\, a_4 = r a_2 \ . \ . \ . \ \alpha)$$

aus demselben Viereck für $u = 2$ folgt eben so

$$a_2\, a_3 = r a_4 \ . \ . \ . \ \beta)$$

Multiplicirt man die Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$, so ergibt sich:

$$a_1\, a_3 = r^2 \ . \ . \ . \ \gamma)$$

Aus dem Viereck vom Schema *A*, wenn drei Seiten $= a_1$ angenommen werden, folgt

$$a_1\, a_3 + a_1^2 = a_2^2$$

und substituirt man darin aus $\gamma)$ den Werth für $a_1\, a_3$, folgt die bekannte Relation zwischen Zehneck, Fünfeckseite und Halbmesser, nämlich:

$$r^2 + a_1^2 = a_2^2 \ . \ . \ . \ \delta).$$

Aus dem Viereck von Schema *A*, wenn $v = 2$ und $u = 1$ genommen wird, folgt

$$a_2^2 + 2a_1\, r = a_3^2 \ . \ . \ . \ \varepsilon)$$

und aus dem Dreiecke im Halbkreise, dessen Katheten a_3 und a_2, folgt

$a_3^2 = 4r^2 - a_2^2$, diese Gleichung

mit Gleichung $\varepsilon)$, gibt:

$a_2^2 + 2a_1\, r = 4r^2 - a_2^2$ oder vereinfacht

$a_2^2 + ar = 2r^2$, und diese

mit Gleichung $\delta)$, gibt:

$$a^2 + ar - r^2 = 0 \ . \ . \ . \ \zeta)$$

als Gleichung für die Zehneckseite.

Allgemeiner Satz für regelmässige Vielecke.

Setzt man in der Hauptgleichung III. für u nach einander die Werthe 1, 2, 3..., erhält man die Reihe von Gleichungen:

$$a_1\, a_{n-1} = r a_2$$
$$a_2\, a_{n-2} = r a_4$$
$$a_3\, a_{n-3} = r a_6$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{\frac{n-3}{2}}\, a_{\frac{n+3}{2}} = r a_{n-3}$$
$$a_{\frac{n-1}{2}}\, a_{\frac{n+1}{2}} = r a_{n-1}$$

Wird wieder n als ungerad vorausgesetzt, so ist $\frac{n-1}{2}$ und $\frac{n+1}{2}$ eine ganze Zahl.

Durch die Multiplication sämmtlicher Gleichungen:

$$a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{\frac{n-1}{2}} \cdot a_{\frac{n+1}{2}} \cdot a_{\frac{n+3}{2}} \ldots a_{n-1} = r^{\frac{n-1}{2}}\, a_2\, a_4 \ldots a_{n-1}.$$

Die Zeiger der linken Seite wachsen ununterbrochen um eine Einheit, die der rechten Seite um zwei Einheiten, bis zu demselben Werth a_{n-1}, es kommen daher auf der linken Seite alle Glieder der rechten Seite vor, und heben sich wechselseitig auf. Die vereinfachte Gleichung ist dann:

$$a_1\, a_3 \ldots a_{n-2} = r^{\frac{n-1}{2}} \quad \ldots\ A.$$

Z. B. für das Vierzehneck:

$$a_1\, a_6 = r a_2$$
$$a_2\, a_5 = r a_4$$
$$a_3\, a_4 = r a_6$$
$$\overline{a_1\, a_3\, a_5 = r^3.}$$

Wird n als gerade vorausgesetzt, bekömmt man die Reihe:

$$a_1\, a_{n-1} = r a_2$$
$$a_2\, a_{n-2} = r a_4$$
$$a_3\, a_{n-3} = r a_6$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{\frac{n-2}{2}}\, a_{\frac{n+2}{2}} = r a_{n-2}$$
$$a_{\frac{n}{2}}\quad a_{\frac{n}{2}} = r a_n$$
$$\overline{a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{\frac{n}{2}}\, a_{\frac{n}{2}} \cdot a_{\frac{n+2}{2}} \ldots a_{n-1} = r^{\frac{n}{2}}\, a_2\, a_4 \ldots a_{n-2}\, a_n,}$$

$$a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}\, a_{\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}} a_n$$

und da $a_n = 2r$ und $a_{\frac{n}{2}} = r\sqrt{2}$:

$$a_1\, a_2 \ldots a_{n-1} = r^{\frac{n}{2}} \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad B.$$

Die Gleichungen A und B lassen sich leicht als allgemeine Sätze aussprechen.

XXII. SITZUNG VOM 12. OCTOBER 1865.

Im Vorsitze Herr Regierungsrath A. Ritter v. Ettingshausen.

Der Secretär gibt Nachricht von dem am 11. October l. J. erfolgten Ableben des correspondirenden Mitgliedes der Classe, Herrn Prof. Dr. Ferdinand Hessler.

Das c. M., Herr Prof. Dr. C. Ritt. v. Ettingshausen überreicht eine Abhandlung: „Beitrag zur Kenntniss der Nervation der Gramineen".

Herr J. Loschmidt legt eine Abhandlung: „Zur Grösse der Luftmolecüle" vor.

Herr Dr. S. Stricker übergibt eine Abhandlung: „Studien über den Bau und das Leben der capillaren Blutgefässe".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, königl. bayer., zu München: Sitzungsberichte. 1865. I. Heft 1, 3 & 4. München; 8°.

Annalen der Chemie und Pharmacie von Wöhler, Liebig und Kopp. N. R. Band LVIII, Heft 1—2; Band LIX, Heft 1—3. Leipzig & Heidelberg, 1865; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 19. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1549—1551. Altona, 1865; 4°.

Ateneo Veneto: Atti. Serie II., Vol. II. Punt. 1ª—3ª. Venezia, 1865; 8°.

Barrande, Joachim, Système silurien du centre de la Bohême. 1re Partie: Recherches paléontologiques. Vol. II. Prague & Paris, 1865; 4°.

Barth, L., und L. Pfaundler, die Stubaier Gebirgsgruppe hypsometrisch und orografisch bearbeitet. (Mit Unterstützung der k. Akademie der Wissenschaften in Wien.) Mit 1 Karte und 5 artistischen Beilagen. Innsbruck, 1865; 8°.

physiques & naturelles. N. P. Tome XXIIIe, Nr. 89—92. Genève, Lausanne et Neuchatel, 1865; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. Nr. 13. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 14e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gesellschaft, Naturforschende, zu Emden: 50. Jahresbericht. 1864. Emden, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 41. Wien, 1865; 8°.

Institut de France. *a)* Académie des Inscriptions et Belles-Lettres: Mémoires. Tome XXIVe, 2e Partie. 1864; — Mémoires présentés par divers savants. Ire Série. Tome VI, 2e Partie. 1864; IIe Série, Tome IV, 2e Partie. 1863; Tome V, 2e Partie, 1865. 4°; — Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale. Tome XV. (Tables alphabétiques. Partie occidentale.) 1861; Tome XIX, 1re Partie. 1862; Tome XX, 1re & 2e Parties. 1865 & 1862; Tome XXI, 2e Partie. 1865. 4°. — *b)* Académie des Sciences: Mémoires. Tomes XXVI (1862), XXXII (1864), XXXIII (1861), XXXIV (1864); 4°. — Mémoires présentés par divers savants. Tomes XVI (1862) et XVII (1862). 4°.

Istituto, Reale, Lombardo di Scienze e Lettere: Rendiconti. Classe di Lettere e Scienze morali e politiche: Vol. II. Fasc. 3—6. Milano, 1865; 8°. — Classe di Scienze matematiche e naturali: Vol. II. Fasc. 3—5. Milano, 1865; 8°.

— I. R., Veneto di Scienze, Lettere ed arti: Memorie. Vol. XII, Parte 1. Venezia, 1865; 4°. — Atti. Tomo X°, Serie III^a, Disp. 6^a—9^a. Venezia, 1864—1865; 8°.

Jahrbuch, Neues, für Pharmacie und verwandte Fächer von Vorwerk. Band XXIII, Hft. 5—6; Band XXIV, Hft. 1. Speyer, 1865; 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 29. Wien, 1865; 4°.

Mittheilungen des k. k. Genie-Comité. Jahrg. 1865. 8. Hft. Wien; 8°.

Programme und Jahresberichte der Gymnasien zu Brixen, Brünn, Czernowitz, Eger, Iglau, B.-Leipa, Leitmeritz, Leutschau, Mar-

burg, Pilsen, Trient, des akademischen Gymnasiums, des Gymnasiums zu den Schotten und der k. k. Theresianischen Akademie in Wien, des Staats-Obergymnasiums zu Zengg, des Realgymnasiums zu Tabor und der Ober-Realschulen zu Klagenfurt, B.-Leipa und St. Pölten. 4° & 8°.

Reader. Nr. 145, Vol. VI. London, 1865; Folio.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. 1865. XV. Bd. Nr. 3. Juli—September. Wien; 4°.

Società Reale di Napoli: Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. Anno III, Fasc. 8—12. Agosto—Dicembre 1864; Anno IV, Fasc. 1—4. Gennajo—Aprile 1865. Napoli, 1864 & 1865; 4°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. IXe Année, Nr. 3—6. Constantinople, 1865; 4°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 80—81. Wien, 1865; 4°.

Zeitschrift für Chemie, Archiv etc. von H. Hübner. VIII. Jahrg. N. F. Band I., Heft. 9, 11—13, 15—18. Göttingen, 1865; 8°.

— des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XVII. Jahrg. 8. & 9. Hft. Wien, 1865; 4°.

Studien über den Bau und das Leben der capillaren Blutgefässe.

Von **Dr. S. Stricker.**

Im Monate Jänner dieses Jahres habe ich unter Anderem über eine Beobachtung berichtet [1]), welche mit den damals herrschenden Anschauungen über die Structur der capillaren Blutgefässe kaum zu vereinen war. Ich sah mich damals zu der Annahme gedrängt, dass diese Gefässe zuweilen selbstständig ihre Form verändern, zu einer Annahme also, welche uns die Alternative stellte, entweder unsere Begriffe über structurlose Membranen zu modificiren, oder zu läugnen, dass die Wände der Capillaren structurlos sind. Schon wenige Wochen später kamen uns Mittheilungen zu, welche die letztere Ansicht zu bestätigen schienen. Unabhängig von einander sind nämlich Aeby [2]), Auerbach [3]) und Eberth [4]) zu dem Resultate gelangt, dass die Blut-Capillaren aus abgeplatteten Zellen zusammengefügt sind, so dass das Blut gleichsam intercellulär fliesst. Auerbach sowohl, wie Aeby und Eberth haben die Contouren der Zellen durch Silber kenntlich gemacht, und die beiden letzteren haben die einzelnen Platten durch Maceration in Kalilauge isolirt.

Mich haben inzwischen meine Untersuchungen zu Resultaten geführt, welche dieser neuen Anschauung über den Bau der Capillaren wenig günstig sind. Ich war daher auch nicht in der Lage eine in so glücklicher Übereinstimmung zu Tage geförderte Neuerung für die Lösung der mir vorschwebenden Frage zu benützen. Die ausführliche Darlegung wird es den Fachleuten hoffentlich nicht schwer werden

---

[1]) Sitzungsberichte. Bd. LI.

[2], [3], [4]) Centralblatt Nr. 12, 13, 14.

lassen zu entscheiden, ob die Gründe, welche mich bei einem solchen Vorgange leiteten, triftig genug waren.

In der citirten Schrift habe ich bereits darauf hingewiesen, dass ich die Stichhaltigkeit meiner Schlüsse durch Reizversuche zu prüfen gedenke. Ich begann demgemäss zuerst mit chemischen Reizen. Ich liess Ammoniak-Dämpfe 3—4 Secunden lang über eine dem lebenden Thiere entnommene und unmittelbar darauf in Kammerwasser ausgebreitete Nickhaut streichen, dann deckte ich das Präparat ein und brachte es rasch zur mikroskopischen Untersuchung.

Unter einer grossen Reihe von Versuchen war der Erfolg in seltenen Fällen ein überaus günstiger. Ich sah ein Gefässstück, welches seinem Baue nach unzweifelhaft zu den Capillaren gezählt werden musste, sich im Laufe von fünfzehn Minuten zweimal bis nahe zum Verschwinden des Lumens verengern und bis zum Breitendurchmesser eines Blutkörperchens wieder erweitern. Ich sah varicöse Gefässe sich so verändern, dass der Bauch an Stelle des Halses zu liegen kam, und umgekehrt. Mit den Formveränderungen ging gewöhnlich noch eine andere Veränderung Hand in Hand. So wurde beispielsweise eine eingeschnürte Capillargefäss-Strecke so blass, wurden deren Contouren so undeutlich, dass ich sie kaum mehr von der Umgebung unterscheiden konnte, während nach zehn bis zwanzig Minuten das Gefäss wieder in seiner ursprünglichen Deutlichkeit zu sehen war.

Solche Veränderungen waren mir schon früher bekannt gewesen, und ich habe ihrer schon mehrfach Erwähnung gethan [1]). Meine Beobachtungen blieben aber früher nicht lange genug auf eine und dieselbe Stelle concentrirt, um das Wiederkehren der scharfen Contouren wahrnehmen zu können. Das Erblassen und Undeutlichwerden einzelner Gewebsstrecken galt mir damals als ein Zeichen des Absterbens, und diese Anschauung war es namentlich, welche bei mir ein unbestimmtes Misstrauen gegen meine eigenen Beobachtungen wach rief.

Jetzt nachdem ich wahrgenommen habe, dass die scharfe Contourirung wiederkehren kann, suche ich gerade in dem Wechsel der Erscheinung ein Zeichen des Lebens. Eine wesentliche Bedingung

---

[1]) l. c.

zu diesem Wechsel liegt zwar auch in dem Grade der Füllung der Gefässe; aber die einzige Bedingung ist dies nicht. Es müssen ausserdem uns unbekannte Vorgänge in der Wand selbst stattfinden, weil die Veränderung, wenn auch weniger vollständig, wahrgenommen wird, mag das Gefäss leer oder voll sein. — Ausser den erwähnten günstigen Resultaten fand ich, dass die weitaus grösste Masse der Capillaren auf chemische Reize wenigstens keine auffällige Reaction zeigte. Es ist wohl denkbar, dass ich in Anbetracht der sehr starken Vergrösserungen, mit welchen ich arbeitete, während des Absuchens von Gefässstrecken bei den reagirenden Stellen zu wenig verweilte, so dass sich viele positive Resultate meiner Beobachtung entzogen. Immerhin musste es mich sehr unbefriedigt lassen, wenn das Misslingen Regel, das Gelingen des Versuches aber zu den Ausnahmen zählte.

Mit der Hoffnung auf bessere Erfolge schritt ich nun zur Anwendung elektrischer Reize, und zwar bediente ich mich dabei eines grossen Du Bois'schen Schlittens. Die Resultate waren hier in einem gewissen Sinne allerdings noch günstiger, als bei der Anwendung chemischer Reize. Viele Male hinter einander konnte ich eine und dieselbe Gefässstelle zur Verengerung und Wiedererweiterung bringen. Die Verengerung erfolgte unmittelbar nach Schliessung der Kette, die Erweiterung nahm eine Minute und darüber in Anspruch. Zwischen einer Reizung und der andern liess ich dann das Gewebe einige Minuten ausruhen. Mit fortgesetzter Reizung wurden die Gefässe immer blasser, die Reactionen wurden träger, bis sie endlich vollständig ausblieben.

Ich habe aber nur eine geringe Anzahl derart glücklicher Erfolge zu verzeichnen; bei einer grossen Reihe von Präparaten blieb die Reizung in Bezug auf eine wahrnehmbare Verengerung erfolglos, ungeachtet ich die Intensität der Ströme in den mir möglichen Grenzen variiren liess, ich Nebenschliessungen, so viel als möglich beseitigte und endlich aus später zu erwähnenden Merkmalen die Überzeugung gewinnen konnte, dass der Strom das Gewebe beeinflusste.

Unter solchen Verhältnissen liess ich mich von der Gunst der Jahreszeit bestimmen meine Versuche an der Nickhaut aufzugeben, um sie an den Schwänzen von Batrachier-Larven fortzusetzen.

Ich habe von ausgewachsenen Larven seitliche Schwanzstücke abgetragen und dieselben in Kammerwasser oder Blutserum untersucht. Es war mir daran gelegen, sowohl quergestreifte Muskel-

fasern, als auch grössere Gefässe aus dem Versuche auszuschliessen, und diesen Zweck erreichte ich durch die Untersuchung seitlicher Stücke, in welchen sich bekanntlich kein Muskelgewebe befindet, und welche ausserdem nur von Gefässen durchzogen sind, welche ihrem Baue nach unstreitig zu den Capillaren gezählt werden müssen. Kurz nachdem das Präparat vom Mutterthiere abgetragen worden war, fand ich das Blut in den Gefässen in ziemlich lebhafter Strömung; an dem Schnittrande jedoch war kein Austritt von Blutkörperchen wahrzunehmen; die Gefässe waren hier zumeist blindsackartig geschlossen. Nach einigen Minuten hörte die Strömung auf, trat aber allsobald wieder ein, als ich durch das Präparat einen Inductionsstrom leitete, oder eine sehr verdünnte Kalilösung zusetzte. Ich konnte demnach in einem geschlossenen Capillargefäss-Bezirke eine Blutströmung veranlassen, einmal durch chemische Reize, einmal durch elektrische Reize und ein drittes Mal durch das Anfertigen des Präparates selbst, wobei uns offenhar der mechanische Reiz als die wesentlichste Beeinflussung gelten muss. Die Strömung tritt auf dieselben Veranlassungen auch in der Nickhaut ein, und darin ist das Merkmal gegeben, dass der elektrische Strom das Präparat beeinflusst. In der Nickhaut hat aber diese Erscheinung für die Erkenntniss der Capillargefässe nur geringen Werth, weil es kaum möglich ist die grösseren Gefässe so vollständig aus dem Versuche auszuschliessen, um von ihnen abstrahiren zu können.

Allerdings ist es selbst für den Schwanz der Froschlarven fraglich, ob die eintretende Strömung in einer selbstständigen Veränderung der Capillar-Gefässwände begründet sei. Formveränderungen der zahlreichen sternförmigen Körperchen, welche in ein solches Gewebe eingetragen sind, so wie eine Bewegung der in diesem letzteren enthaltenen Flüssigkeit, bei Anbringung der Reize auf mechanischem Wege veranlasst, könnten eine secundäre Veränderung der Gefässwände hervorrufen. Der Verlauf meiner Abhandlung wird indessen lehren, wie viel oder wie wenig Ursache wir haben eine directe Beeinflussung der Gefässwände durch die aufgezählten Reize gelten zu lassen. Vorläufig soll uns die Strömung nur als ein Zeichen gelten, dass das Präparat von dem Reize überhaupt angegriffen wird.

Es ist bekannt, dass im Schwanze der Froschlarven Gefässe vorhanden sind, deren Oberflächen uneben, mit zahlreichen Zacken

besetzt erscheinen. Kölliker bezeichnet diese als Lymphgefässe, und beruft sich darauf, dass dies der einzige Ort sei, wo man bis jetzt die Anfänge der Lymphgefässe mit Sicherheit ermittelt habe. Diese mit Zacken besetzten Gefässe zeigen nämlich zahlreiche blinde Ausläufer, mithin nach Kölliker blinde Anfänge. Ich kann nur bestätigen, dass ich in den Schwänzen der Froschlarven fast jedesmal eine Anzahl sehr zarter, stellenweise blind auslaufender und stellenweise mit Zacken besetzter Gefässe fand, in welchen kein Blutkörperchen anzutreffen war, und welche ich jedesmal zu einem grossen Centralgefässe verfolgen konnte; es ist also möglich, dass ich hier Lymphgefässe vor mir hatte. Erwiesen ist es aber nicht, weil die Zacken, welche hier als Charakteristikon angeführt werden, kein constantes Merkmal abgeben, weil diese Zacken sich nach der Einwirkung von Reizen einziehen, und mithin ein Gefäss innerhalb einiger Minuten bald glatt und bald mit Zacken besetzt sein kann. Erwiesen ist es ferner nicht, weil ich mit eben solchen Zacken besetzte Gefässe vorfand, welche nach ihrem Inhalte zu schliessen, gewiss Blutgefässe waren. Angenommen indessen, dass jene Röhren, in welchen sich keine Blutkörperchen finden, Lymphwege seien, so thut man erst unrecht auf ihre blinden Anfänge zu pochen, weil ja im Schwanze der Froschlarven, wie das männiglich bekannt ist, auch die Blutcapillaren blinde Ausläufer tragen.

Ich habe erwähnt, dass die Zacken der Capillargefässe nach der Einwirkung von Reizen eingezogen werden; ich muss noch hinzufügen, dass die Gefässe an den Stellen wo sie Zacken tragen, ziemlich dickwandig sind und hier ganz das Aussehen von Protoplasma bieten, das heisst, man hat auf dem Durchschnitte, in soferne man das Mikroskop für einen solchen einstellt, eine unregelmässig begrenzte, homogene Grundsubstanz mit zahlreichen eingestreuten Körnchen vor sich, eine Substanz also, welche wie Protoplasma aussieht, und welche durch Reize ihre Form zu verändern veranlasst wird. Ich sagte ferner, es sei bekannt, dass die Capillargefässe der Froschlarven blinde Ausläufer tragen. Es hat diese Frage für uns ein ganz besonderes Interesse, und ich will daher, so oft ihrer auch schon Erwähnung geschehen ist, und so wenig ich auch noch an neuen Beobachtungen hinzufügen kann, dennoch gründlicher auf dieselbe eingehen, weil wir hier einen so klaren Bildungstypus vor uns haben, einen Bildungstypus, welcher keine zweideutige Auffassung

zulässt, und dennoch in der neuesten Zeit vernachlässigt wurde; weil wir hier einen Einblick in das Leben der Blutgefässe gewinnen können, welcher nicht nur für die Entwicklungsgeschichte, sondern auch für das ganze Leben derselben von Bedeutung ist.

Vor allem müssen wir hervorheben, dass eine Wand, welche einen Fortsatz ausstrecken kann, selbst noch Leben in sich tragen muss. Wenn also, wie es anerkannt ist, die Capillargefässe Ausläufer treiben, dann ist ein neuer Grund vorhanden die Wände derselben als Protoplasma aufzufassen. — Wenn ferner, wie es abermals anerkannt ist, die spitzen Ausläufer auf sehr grosse Strecken hinausgeschoben werden, wenn diese anfangs solid sind, dann hohl werden, und also neue Capillargefässe abgeben, dann können eben diese Gefässe nicht in dem Sinne Aeby — Auerbach — und Eberth's aus Zellen zusammengefügt, und das von ihnen aufgestellte Gesetz nicht mehr allgemein gültig sein.

Wenn ich sage, die Wände der Capillargefässe sind Protoplasma, dann muss ich wohl selbst zugeben, dass sie aus Zellen bestehen; nichts destoweniger liegt ein tiefer und durchgreifender Unterschied zwischen dem, was uns an den Larven klar und unwiderleglich vor Augen tritt, und zwischen dem, was in neuester Zeit aus der Silbermethode deducirt wurde. Nach dieser Deduction sollen die Capillaren aus Zellen zusammengefügt sein, und das Blut in jenen mithin interzellulär fliessen; nach dem was sich an der Larve ergibt, ist ein Capillarrohr Protoplasma in Röhrenform, Protoplasma, welches im Innern ausgehöhlt ist, und wo das Blut gleichsam intracellulär fliesst.

Dass bei dem Aufbau von Capillargefässen überhaupt Zellen mit einander verschmelzen, und dass solche Verschmelzungsspuren später einmal durch Silberniederschläge kenntlich werden können, lässt sich ferner auch nicht läugnen; aber das ist wieder weit entfernt von dem, was Aeby, Auerbach und Eberth gefunden haben wollen. Wenn hie und da Fortsätze mit einander verschmelzen, so ist da noch lange kein Epithel, oder Perithel, wie das Auerbach in richtiger Würdigung der sprachlichen Bedeutung des Wortes nennen wird.

Freilich können die drei Vertheidiger der Silberpräparate sagen, die Schwänze der Froschlarven machen eine Ausnahme, und sie haben sie auch bis jetzt nicht in den Bereich ihrer Untersuchungen gezogen. Aber Kölliker, auf dessen Zeugniss sich Eberth beruft,

führt an, dass die Bildung der Capillaren bei allen Geschöpfen ohne Ausnahme in derselben Weise stattfindet, und hinter Kölliker steht Schwann, welcher die Entwicklung der Capillargefässe am Schwanze der Froschlarven und im Gefässhofe der Hühner untersuchte, und für dieses Thema eine, wie man sagen darf, unverrückbare Grundlage schuf [1]).

Die neue dreifach gestützte Theorie erfordert mehr Kerne als gemeinhin in den Capillargefässwänden angetroffen werden; Schwann hat sich schon darüber ausgesprochen, indem er zu beweisen sucht, dass die Kerne der Capillaren keine Epithelkerne sein können; nichts destoweniger könnten gerade die Kerne zu Gunsten der neuen Theorie ins Feld geführt werden. Wenn ganze Gefässstrecken aus ursprünglich soliden Fortsätzen entstehen, dann könnte gefragt werden, woher die Kerne der Capillaren kommen, welche in Anbetracht einer solchen Annahme immer noch viel zu zahlreich vorhanden sind.

Ich kann diese Frage bis jetzt nicht direct beantworten; aber es wird gewiss kein Histologe, der sich eindringlich mit der Zellenlehre beschäftigt hat, zugeben wollen, dass durch diese negative Antwort auf so bestimmte Beobachtungen, wie sie am Schwanze der Larven gemacht wurden, auch nur der leichteste Schatten geworfen werden kann. Wer sagt uns denn, dass sich die Kerne in den Capillaren nicht theilen und aus einander rücken können, wo doch sonst ein sehr reges Leben stattfindet. Und rege muss das Leben schon sein, wenn ein dünner solider Faden zu einem mächtigen Gefässe umgestaltet werden kann, und wenn überhaupt nur daran gedacht werden soll, dass die Gefässwände auch die Quelle für Blutkörperchen abgeben, wie das schon Schwann und viel bestimmter noch Remak angedeutet hat, und wofür ich selbst nicht unwichtige Belege ins Feld führen werde.

Betrachten wir das, was über die Entwickelung der Capillaren gesagt wurde, im Lichte unserer heutigen Anschauung, dann erscheint meine Annahme als ein nothwendiges Ergebniss desselben.

Schwann konnte sagen, die Zellen werden ausgehöhlt und die Membranen derselben bleiben als Capillaren zurück. Wird das aber

---

[1]) Wer sich die Mühe nehmen will § 37 in Remak's Entwickelungsgeschichte aufmerksam zu lesen, wird bald herausfinden, dass auch Remak Schwann's Angaben mehr unterstützt als widerlegt.

auch ein Mikroskopiker der Jetztzeit aussprechen! Kann dieser auch nur daran denken, dass eine Embryonalzelle aus Membran und Kern bestehe, und dass die Membranen wachsen und Forsätze treiben? Oder soll wohl die Form unsere Begriffe regeln? Sollen wir davor zurückschrecken anzunehmen, dass ein Protoplasma einmal auch die Röhrenform annehmen kann?

Das wird füglich Niemand thun, der weisse Blutkörperchen auf dem geheizten Objecttische beobachtete, und so wird es gewiss auch Niemand mehr auffallend finden, wenn ich die Capillargefässe der Larve als röhrenförmige Zellen anspreche. Diese können dann auf der Oberfläche zackig sein und die Zacken einziehen, sie können Fortsätze ausschicken, Fortsätze mit Kernen versehen, um sich nach Art der Polypen als Zellenfamilie auszubreiten.

Auf diesen Standpunkt angelangt, kann ich auch daran gehen eine weitere Beobachtung mitzutheilen.

Ich habe Larven mit Curare vergiftet und konnte in Folge dessen den Kreislauf noch mit Linsen *a l'immersion* untersuchen. Da fand ich denn nicht selten Blutkörperchen in die Wand eines Capillargefässes derart eingeklemmt, dass ein Theil der ersteren ausserhalb des Gefässes, der andere Theil innerhalb des Gefässes lag, und beide Theile durch einen die Gefässwand durchbohrenden Hals in Verbindung waren. Der Hals war so dünn, dass er bei der Combination Nr. 8 objectiv und Nr. 3 ocular von Hartmack eben noch aufgelöst werden konnte. Der Umstand, dass ich einen in bester Thätigkeit begriffenen Kreislauf vor mir hatte, machte es möglich, die Diagnose auf das Bestimmteste zu stellen. Der Theil des Blutkörperchens, welcher innerhalb des Gefässes lag, hing wie ein Pendel in dasselbe hinein und wurde durch jedes vorbeieilende Blutkörperchen aus seiner Gleichgewichtslage gebracht.

Der Befund war ein so auffallender, dass ich es wohl nicht unterliess mir Zeugen an das Mikroskop zu rufen, und ich habe die Erscheinung wiederholt demonstrirt. Ich ziehe es indessen vor, mich nicht auf die Autorität eines Andern zu stützen, namentlich bei einer Erscheinung, die von viel zu grosser Bedeutung ist, als dass sie nicht bald in weiteren Kreisen nach untersucht werden sollte, und welche ich viel zu oft gesehen habe, um fürchten zu müssen, dass sie Andere nicht wieder finden.

Ich musste mir zunächst die Frage vorlegen, ob die Blutkörperchen von innen heraus gedrängt werden, oder ob sie von aussen her in Einwanderung begriffen sind. Bei dem Überraschenden, welches die ganze Erscheinung darbot, sah ich mich genöthigt, den weitgreifendsten Vermuthungen Raum zu geben, und mithin auch derjenigen, dass einmal ein Blutkörperchen auch von aussen her einwandere. Ich begegnete aber bald darauf Gruppen von offenbar im Zugrundegehen begriffenen Blutkörperchen, von welchen ein Theil verzerrt und ein Theil zerrissen war, rings um die Gefässe angeordnet. Diese Beobachtung machte es einigermassen wahrscheinlich, dass die eingezwängten Blutkörperchen auf der Wanderung von innen heraus begriffen sind, dass also eine Blutung *per diapedesin* ganz im Sinne der Alten vorhanden sei. Es mussten freilich die mannigfachsten Fragen auftauchen, über die Art und Weise, wie die Blutkörperchen auf solche Abwege und in so enge Canäle hinein gerathen. Die Thatsache war aber einmal vorhanden und die Logik musste an diese anknüpfen. Dass ein Blutkörperchen überhaupt in einer Gefässwand stecke, kann mich eigentlich nicht mehr wundern. Wir wissen ja, dass Protoplasma fremde Körper in sich aufnehmen kann, warum soll dieses Verhältniss dann nicht auch zwischen einem Blutkörperchen und der Gefässwand möglich sein.

Das Eingekeiltsein an und für sich verträgt sich also mit den Vorstellungen, welche wir jetzt über den Bau der Capillargefässe erlangt haben, und es könnte nur noch erörtert werden, wie die Einkeilung zu Stande kommt.

Ich werde später auch auf diese Frage einiges Licht werfen können, nur muss ich vorerst noch andere Erscheinungen in den Kreis meiner Betrachtungen ziehen.

Wenn ich das abgeschnittene Schwanzstück einer Larve mit verdünnter Kalilösung behandle, gerathen, wie ich schon erwähnt habe, die Blutkörperchen in eine lebhafte Strömung, ziehen sich ferner die Zacken der Gefässe ein, bis diese ganz glatt erscheinen; ausserdem aber werden manche Gefässe auffallend enger, ja bis zur Undurchgängigkeit für Blutkörperchen.

Namentlich auffallend lässt sich diese Beobachtung an Gefässen machen, welche mit Zacken besetzt oder auffallend dickwandig sind.

Wenn sich ein solches Gefäss verengert, ändert sich gleichfalls sein Aussehen in dem Sinne, wie ich es für die Capillaren der Nick-

haut beschrieben habe. Wenn es sich nach einigen Minuten von der Arbeit erholt und wieder erweitert, pflegt die Schärfe der Contouren nicht wieder so hervorzutreten, wie es vor der Reizung der Fall war, wiewohl ich auch schon eine solche Erscheinung beobachtet habe. Wenn sich ein solches Gefäss wieder erweitert hatte, so gelang es mir in der Regel durch erneuerten Zusatz von Kali eine Wiederverengerung zu bewirken, und ich konnte ein solches Experiment 3—4mal wiederholen.

Eine solche Reaction war zwar wieder nicht allgemein, aber viel öfter zu beobachten wie an den Blutgefässen erwachsener Thiere. Viel seltener gelang es mir Verengerungen von Capillargefässen durch elektrische Reize anzuregen.

Nach allem was wir bis jetzt erfahren haben, kann uns der, wenn auch noch so häufige negative Befund in unserer Auffassung über den physiologischen Werth der Capillargefässwände nicht irre machen. Wenn beispielsweise Muskelfasern auf Reize kürzer und dicker werden, so liegt das in einer ganz bestimmten Anordnung der sie zusammensetzenden Theilchen; daraus darf aber kein Schluss gezogen werden, dass alle Gewebselemente nach einer uns zweckmässig erscheinenden Richtung reagiren müssen. Es ist ja gar nicht einzusehen, warum eine Röhrenzelle, wenn sie gereizt wird, gerade enger werden soll, selbst vorausgesetzt, dass sie lebt, bewegungsfähig oder sagen wir geradezu contractil ist. Wir haben ja gar keinen Anhaltspunkt dafür zu wissen, wie eine solche Röhrenzelle Reize beantworten muss. Angenommen aber, dass es in ihrer Construction gelegen sei, auf Reize enger zu werden, wer sagt uns, welche Hindernisse dabei in Betracht kommen, Hindernisse, welche das eine Mal leicht, das andere Mal schwer oder gar nicht überwunden werden können.

Ich kann mich jetzt auch zur Erörterung der Frage wenden, wie denn ein Blutkörperchen in die Wand eines Gefässes hineingerathen kann.

Die erste Beobachtung, welche mich dabei leitete, ist die, dass ich einmal an einer vergifteten Larve ein Gefäss sah, welches stellen-

weise so enge war, dass kein Blutkörperchen durchtreten konnte, und dennoch dickwandig genug war, um es nicht für ein in Entwickelung begriffenes Capillargefäss zu halten; an anderen Stellen war jenes Gefäss von mehreren Blutkörperchen durchbohrt; ausserdem führte das ganze Gefäss durch einen Haufen von Leichen. Ich hielt die entsprechende Stelle mehrere Stunden in Beobachtung, und ich entsinne mich sehr lebhaft, dass eine grössere Capillarstrecke in fortwährenden sehr langsam ablaufenden Zuckungen begriffen war. Bald waren die Blutkörperchen in derselben eingekeilt, und bald schwammen sie frei durch. Manchesmal währte eine Einschnürung 15—20 Minuten an, und manchesmal änderte sie im Laufe weniger Minuten mehrmals ihre Form.

Diese Beobachtung kann uns den Durchtritt von Blutkörperchen weniger räthselhaft erscheinen lassen, als es von vornherein der Fall war; denn es liegt uns nahe anzunehmen, dass ein Körper, der einmal in einer engern Röhre festsitzt, auch in die Wand der letzteren hineingerathen kann, wenn diese die dazu nöthige Consistenz besitzt.

Ich habe ferner sehr oft grössere oder kleinere Blindsäcke beobachtet, welche wieder eingezogen wurden, d. h. ich sah von Capillaren ausgehende wirkliche Aneurysmen vollständig wieder verstreichen. Solche Aneurysmen bargen oft Blutkörperchen, welche durch die Blutwelle hineingeworfen wurden, und daselbst längere oder kürzere Zeit verweilten.

Wenn ich daran denke, dass ein mit einem Aneurysma versehenes Gefäss sich eben so gut, wie jedes andere, verengern kann, so kann es mir um so eher einleuchten, dass ein Blutkörperchen durch die Kuppe eines solchen Aneurysma durchgetrieben werden und daselbst auch auf halbem Wege stehen bleiben kann.

Ich habe oben versprochen für die Entstehung von Blutkörperchen aus den Gefässwänden einen neuen Beleg anzuführen, und ich will, bevor ich den Abschnitt schliesse, noch diesem Versprechen nachkommen.

Ich habe im Schwanze der Froschlarven Blutkörperchen-haltige Gefässe gesehen, welche an beiden Seiten blind in sehr feine Fortsätze ausliefen. Nach den älteren Vorstellungen sollte es eigentlich über

jeden Zweifel erhaben sein, dass die Blutkörperchen an Ort und Stelle entstanden sein müssen. Nachdem wir aber einmal wissen, dass sich ein Körper durch eine Gefässwand durchdrängen kann, müssen wir in unseren Schlüssen sehr vorsichtig sein. Halten wir indessen diese Beobachtung den Aussagen von Schwann [1]) und Remak [2]) gegenüber, so haben wir für die bezeichnete Entstehungsweise ein sehr starkes Gewicht in die Wage zu legen.

Übrigens darf nicht vergessen werden, dass damit durchaus nicht ausgeschlossen wird, dass etwa die Leber oder andere Organe als Hauptquelle der Blutkörperchen gelten können, zumal ja aus der enormen Gefässentwickelung der embryonalen Leber gerade für unsere Annahme plaidirt werden kann.

Es kann nun zunächst die Frage aufgeworfen werden, ob die Beobachtungen, welche an Froschlarven gemacht wurden, für das erwachsene Thier noch irgend einen Werth besitzen. Es könnte behauptet werden, es verhalte sich mit den von mir beobachteten Lebensäusserungen gerade so, wie mit den blinden Anfängen der Lymphgefässe. Dies sind embryonale Zustände, könnte man sagen, aus welchen weiter für das erwachsene Thier kein Schluss gezogen werden darf. Ja man könnte sagen, die Protoplasma-Natur der Capillargefässe im Embryo sei nach unseren heutigen Kenntnissen nahezu selbstverständlich, mag die Entwicklung in der einen oder anderen Weise vor sich gehen, weil ja eben Alles aus weichen, d. i. aus jungen Zellen seinen Anfang nimmt. Ich könnte dem allerdings entgegen halten, dass doch in der Froschlarve ein vollständiger Kreislauf existirt, dass also das röhrenförmige Protoplasma dem Blutdrucke Widerstand leistet, und es übrigens nicht ausgemacht ist, ob der Widerstand in den Capil-

---

[1]) Mikr. Unters. pag. 185 heisst es „die Blutkörperchen sind junge Zellen, welche in den Capillargefässzellen entstehen.

[2]) Entwickelungsgesch. § 40. Manche Wandzellen ragen so stark in die Gefässhöhle hinein, dass der Gedanke an die Entstehung von Blutkörperchen aus abgelösten Wandzellen nahe liegt.

laren der Nickhaut grösser ist, als in denen des Larvenschwanzes, dass damit eine principielle Schwierigkeit, mit welcher das Übertragen meiner Annahme auf erwachsene Thiere verbunden ist, abgeschwächt wird. Es liesse sich anführen, dass sich meine Untersuchungen auch auf Larven beziehen, welche der Metamorphose nahe waren, deren Schwänze in der Rückbildung begriffen, also mit nicht viel Grund in die Reihe der embryonalen Gebilde zu setzen sind. Ich habe nichts destoweniger alle die angeführten Einwände vor Augen behalten und mich noch ein Mal an die Untersuchung der Nickhaut gewendet. Warum ich gerade zu diesem Organe meine Zuflucht nahm, kann ich nur dadurch begründen, dass ich im ganzen Thierreiche kein Organ kannte, welches mir dieselben Vortheile bot, wie die Nickhaut des Frosches. Die dünnen Bauchfellplatten haben sich für die Untersuchungen in meinem Sinne als unbrauchbar erwiesen, weil das Blut in ihnen zu rasch gerinnt. Die Gefässe der weichen Hirnhaut müssen wieder zu viel gezerrt werden. Präparate, welche aber eben ihres Lebens wegen brauchbare Objecte abgeben sollen, dürfen nur so wenig als möglich gezerrt werden und eignen sich zur Untersuchung gewiss am besten unmittelbar nachdem sie vom lebenden Thiere herausgeschnitten wurden. Bei der Nickhaut kann man auf diese Momente Rücksicht nehmen; mit zwei Scherenschnitten ist sie abgetragen, das gleichseitige Auge bietet Kammerwasser; ausserdem ist die Nickhaut sehr leicht auszubreiten, so dass sie im Ganzen bei vorsichtiger Behandlung nur sehr wenig beleidigt zu werden braucht.

Kurz nachdem ich diese Untersuchungen wieder aufgenommen hatte, fiel es mir auf, dass auch in der Nickhaut von der Seitenwand eines Capillargefässes ein dünner Faden auslief, um sich an einem andern Gefässe zu inseriren. An beiden Insertionspunkten war der Faden trichterartig erweitert, welche Erweiterung mit dem Lumen der betreffenden Gefässe communicirte. Ab und zu schwamm ein Blutkörperchen in einen solchen Trichter hinein und verliess ihn wieder. Einen solchen zwei Gefässe verbindenden Faden habe ich ein einziges Mal gesehen; hingegen begegnete ich relativ häufig blindsackartigen Ausstülpungen von Capillargefässen, deren blindes Ende sich deutlich in eine feine Spitze auszog; ich begegnete kleinen buckelförmigen Auftreibungen, welche gross genug waren, um ein weisses Blutkörperchen zu beherbergen

und es manchesmal auch wirklich thaten. Solche Buckel habe ich zu wiederholten Malen vollständig schwinden sehen, d. h. der Buckel wurde immer kleiner, bis er endlich gänzlich verstrichen war.

Ich kann die spitzen Ausläufer nicht anders als an der Hand meiner embryologischen Studien deuten, d. h. ich muss sie als in Neubildung begriffene Gefässe auffassen; ich muss sagen, dass die Capillargefässe eines ausgewachsenen Thieres einem ständigen Neubildungsprocesse unterworfen sind, einem Neubildungsprocesse, welcher während des embryonalen Lebens in höchster Blüthe entwickelt, während des gesunden Zustandes des erwachsenen Thieres nur spurenweise angetroffen wird, und in entzündeten Geweben abermals eine bedeutende Rolle spielt. Denn ich kann schon jetzt nach einer Versuchsreihe, welche ich am Vogelhirne angestellt habe, mittheilen, dass das Ausziehen von Spitzen von Capillargefäss-Wänden in Entzündungsherden ein sehr häufiges Vorkommen ist.

Wenn wir die Geschichte der Mikroskopie durchblicken, so muss es uns nunmehr auf den ersten Blick einleuchten, dass die Gefäss-Neubildung am erwachsenen und gesunden Thiere zu den sehr bekannten Erfahrungen gehört, nur wurden diese nicht in richtiger Weise gedeutet. Die *vasa serosa* der Autoren erinnern gewiss lebhaft genug an in Neubildung begriffene Capillaren. Es kann allerdings sehr viele Organe geben, in welchen kein *vas serosum* angetroffen wird, und diejenigen, welche auf ihre vollendete Injection pochend, die *vasa serosa* läugnen, haben nur in so ferne ein Recht dazu, als ihre vollendete Injection ihnen gestattet, diese Gefässe an dem eben untersuchten Organe auszuschliessen. Weiter reichen aber die Consequenzen solcher Erfahrungen nicht. Gerade so verhält et sich bei denjenigen, welche die Existenz der *vasa serosa* vertheidigen. Es sind dies eben nur vorübergehende Bildungen, welche in der einen *Cornea*, in dem einen Gehirne angetroffen werden können, und in zwanzig anderen nicht.

Die hier auseinandergesetzte Beobachtung hat mich zunächst zu dem Schlusse geführt, dass auch die Wände der Capillargefässe erwachsener Thiere nicht durchwegs in die Reihe der structurlosen (das heisst starren) Gebilde gestellt werden dürfen, weil solche nach unserer Vorstellung einer Weiterentwickelung durch das Austreiben von Fortsätzen nicht fähig sind. In so ferne aber das Austreiben von Fortsätzen nur ein seltenes Vorkommniss ist, so können wir vorläufig

höchstens behaupten, dass gewisse Strecken von Capillargefässen in die Reihe der lebenden Gewebe gesetzt werden müssen.

Je grössere Aufmerksamkeit ich übrigens den Gefässwänden schenkte, um so mehr und um so tiefer überzeugte ich mich, wie sehr unrecht wir thun, die Capillargefässe abgesehen von ihren Kernen als structurlos zu bezeichnen. Wenn man ihre Wände mit der Linse Nr. 10 *a l' immersion* und Ocular Nr. 5 untersucht, so findet man erstens, dass die Wände der Capillaren nur in seltenen Fällen eben sind; sie tragen hie und da kleine Spitzen, welche bald nach aussen, bald gegen das Lumen der Gefässe vorragen; es zeigt sich ferner, dass die Wand an und für sich nicht structurlos ist, sondern dass stellenweise Körner eingestreut sind, stellenweise Körnchen aufliegen und stellenweise sich dunklere und hellere Punkte gegen einander abgrenzen; kurz es ist bei der bezeichneten Vergrösserung kaum möglich, zwischen einem Protoplasma-Zuge und einer Gefässwand einen andern als etwa formellen Unterschied aufzufinden.

Ich habe in letzter Reihe meine Aufmerksamkeit noch einmal den Formveränderungen zugewendet. Ich habe mich überzeugt, dass ich in Bezug auf meine Aussage über freiwillige Einschnürungen an das bereits in meiner ersten Publication Mitgetheilte festhalten muss. Ein cylindrisches Rohr schnürt sich an einer Stelle ein, seine Wände werden hier dicker und nach einigen Minuten ist das ursprüngliche Verhältniss wieder hergestellt. So selten ich aber in der Lage war solche Beobachtungen zu machen, so häufig sah ich Veränderungen in den Contouren der Wände, Veränderungen, welche nur wahrgenommen werden, wenn man einer bestimmten Stelle seine ausschliessliche Aufmerksamkeit zuwendet.

Ich habe in der frühern Publication darauf hingewiesen, dass mir die welligen Krümmungen der Wände auffallend erscheinen. Ich kann heute hinzufügen, dass ich sehr oft wellenförmige Wände in eine auf den Durchschnitt geradlinige Form übergehen sah. Ich kann es auch nicht unterlassen einer Beobachtung Erwähnung zu thun, welche ich freilich nicht nach Belieben wiederholen kann, die aber sehr bestimmt in meiner Erinnerung liegt.

Ich habe einmal eine grössere Gefässstrecke von so besondern Merkmalen umgeben, dass ich sie nicht leicht mit andern verwechseln konnte, mit durchaus wellenförmigen Wandungen versehen, angetroffen. Ich habe das Präparat vom Objectträger herabgenommen

und es auf den Knopf eines Entladers gelegt, und mit dem letzteren eine Leydenerflasche entladen. Dann untersuchte ich das Präparat wieder und fand, dass die früher wellenförmigen Contouren des erwähnten Gefässes vollständig verstrichen waren.

Schliesslich habe ich in der letzten Zeit auch in der Nickhaut Capillargefässe gesehen, in welchen Blutkörperchen eingekeilt waren, gerade so, wie ich es früher für den Schwanz der Froschlarven beschrieben habe.

Ich habe dieses Thema hinreichend erörtert und will hier nicht noch einmal bereits Gesagtes wiederholen. Für mich war diese letzte Beobachtung das Motiv, die Untersuchungen vorläufig abzubrechen, weil ich die Frage, welche die Grundlage der ganzen Abhandlung bildet, für abgeschlossen hielt; die Frage nämlich, ob man berechtigt sei, die Wand eines Capillargefässes als eine Röhrenzelle, und zwar als eine solche, welche noch Lebensäusserungen von sich zu geben im Stande ist, aufzufassen.

Der principiellen Bedeutung nach muss die Antwort positiv lauten. Fraglich kann es nur bleiben, ob wir nicht im erwachsenen Thiere einen Unterschied machen müssen, zwischen jungen, neugebildeten und zwischen alten Gefässen; ob etwa diese letzteren nur mehr das bedeuten, was wir heut zu Tage als Zellenmembranen bezeichnen. Ich kann dieser Frage für jetzt nicht näher an den Leib rücken, und ich will zum Schlusse nur darauf hinweisen, dass wir in Anbetracht dessen, was uns stärkere Vergrösserungen lehren, so wie in Anbetracht dessen, was ich an Entzündungsherden erfahren habe, unser Urtheil auf eine spätere Zeit verschieben müssen.

Zur Grösse der Luftmolecüle.

Von **J. Loschmidt.**

Von jeher war man darüber einig, dass in den Gasen die Molecüle durch Distanzen von einander getrennt seien, gegen deren Grösse man den Durchmesser derselben in den meisten Fällen als verschwindend klein annehmen dürfe. Die Molecüle selbst liess man in fortwährender Bewegung begriffen, und die Geschwindigkeit dieser Bewegung von der Temparatur beherrscht sein. Über die Art der Bewegung haben sich in letzterer Zeit zwei scharf getrennte Ansichten festgestellt. Die eine, ältere, lässt die Gasmolecüle an äquidistanten Orten durch gegenseitige Anziehungs- und Abstossungskräfte in einer Art stabiler Gleichgewichtslage festgehalten werden, um welche sie oscilliren. Diese Anziehungs- und Abstossungskräfte nimmt man entweder als ursprüngliche, der Substanz der Molecüle angehörige, oder, und zwar meistentheils, als durch die Ätherhüllen oder auch einem eigenen Wärmestoff bedingte an.

Es vermag diese Ansicht wohl im Allgemeinen über alle Erscheinungen so ziemlich Rechenschaft zu geben, es hat sich aber schliesslich herausgestellt, dass sich aus ihr eben nur das deduciren lasse, was man von Anfang in die Prämissen hineingelegt hatte. Darüber hinauszuführen vermochte sie nicht.

Weit besser gelang dies der zweiten Ansicht, welche von Herapath und Krönig aufgestellt, durch die Arbeiten von Clausius, Maxwell, Rankine u. s. w. ausgebildet, bald ein entschiedenes Übergewicht errang.

Dieselbe lässt zwar die weiten Abstände zwischen den Gasmolecülen fortbestehen, beseitigt aber das Band, welches ein

Molecül mit seinen Nachbarn verbindet und an einem Orte festhält, ertheilt ihm aber dafür eine gewisse progressive Geschwindigkeit. Vermöge dieser bewegt sich das Molecül in gerader Richtung fort, ohne von einem andern eher Notiz zu nehmen, bis es nicht, so zu sagen von ungefähr, mit ihm zusammentrifft. In diesem Falle erfolgt ein Auseinanderprallen, ganz nach den Gesetzen des Stosses vollkommen elastischer Kugeln.

Mit dem Aufgeben der vermittelnden Kräfte war ein beschwerlicher Ballast beseitigt, es wurde ein eigenthümlicher Calcül zur Ermittlung von Durchschnittswerthen in dem Chaos der regellos durcheinanderfahrenden Molecüle ausgebildet und bestimmte Resultate erzielt, mittelst welcher man hoffen durfte, trotz mancher Nothannahme, wie die der allgemeinen Kugelform der Molecüle und dergleichen, von den Thatsachen selbst eine Bestätigung oder eine bündige Widerlegung zu erfahren.

Bisher nun war der Verlauf ein für die neue Theorie unzweifelhaft günstiger. Die Arbeiten der obengenannten Forscher haben einerseits sehr präcise und einleuchtende Erklärungen der wichtigsten Vorgänge bei den Gasen geliefert — so für den atmosphärischen Druck, für die Wärmeleitung, für die Fortleitung des Schalles, — andererseits aber auch mittelst einer durchsichtigeren Fassung der Beziehungen, die numerische Bestimmung wichtiger Constanten ermöglicht. Wir heben hier besonders hervor: die Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit der Molecüle für verschiedene Gase bei verschiedenen Temperaturen, die des Verhältnisses der gesammten lebendigen Kraft eines Gases zu der jener Geschwindigkeit entsprechenden — beide durch Clausius, ferner die der mittleren Weglänge der Luftmolecüle durch Maxwell und O. E. Meyer.

Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit auf dem Boden dieser Theorie für eine andere Constante eine vorläufige Annäherung zu gewinnen — nämlich für die Grösse des Durchmessers der Luftmolecüle. Dieser Grösse wird zwar von jeher eine ausserordentliche Kleinheit zuerkannt, die Frage aber ob man dabei auf Millionstel oder Billionstel des Millimeters, oder noch viel weiter hinabzusteigen habe, war bisher unerörtert geblieben. Die neuere Theorie ist nun allerdings im Stande hierüber Auskunft zu geben.

Wir benützen dazu eine Gleichung, welche von Maxwell aufgestellt wurde [1]) und von Clausius eine kleine Modification erfahren hat [2]). Mit letzterer heisst sie:

$$1 = \tfrac{1}{2} N \pi l s^2.$$

In ihr bedeutet N die Anzahl der in der Volumeinheit enthaltenen Luftmolecüle, l die mittlere Länge des Weges, welchen ein solches Molecül zwischen zwei auf einander folgenden Zusammenstössen durchläuft, und s den Durchmesser desselben.

Wir geben derselben eine Gestalt, in welcher sie eine Relation zwischen zwei molecularen Räumen ausspricht, nämlich:

$$\frac{1}{N} = 5\tfrac{1}{3} \cdot \frac{\pi l s^2}{4}.$$

Bekanntlich sind in der Raumeinheit bei gleicher Temperatur und gleichem Drucke von allen gasförmigen Körpern gleichviel Molecüle enthalten. Da nun N die Anzahl derselben bedeutet, so ist $\frac{1}{N}$ derjenige Theil der Raumeinheit, welcher auf ein Molecül kommt, wenn man sich dieselben durchaus gleichmässig vertheilt denkt. Wir bezeichnen dieses Raumelement mit dem Ausdruck molecülares Gasvolumen.

Gehen wir zur rechten Seite der Gleichung über, so begegnen wir der Grösse $\frac{\pi l s^2}{4}$.

Dieselbe drückt das Volumen jenes Cylinders aus, welcher zur Basis den centralen Durchschnitt, und zur Höhe die mittlere Weglänge eines Molecüles hat. Er repräsentirt demnach die Summe aller Raumtheilchen, welche das Molecül, während es den mittleren Weg durchläuft, successive einnimmt. Nennen wir ihn desshalb das molecülare Wegvolumen, so sagt unsere Gleichung:

---

1) Philosoph. Magazine XIX, p. 28.

2) Ebendaselbst p. 434.

Das moleculare Gasvolumen ist 8¼mal grösser als das moleculare Wegvolumen.

Überdies ist auch das letztere für alle Gase gleich gross.

Für unsern Zweck ist es nothwendig der Gleichung noch eine andere Gestalt zu geben. Da $\frac{\pi s^3}{6}$ das Volumen eines Molecüles vorstellt, und 1 das Volumen, welches von N solchen Molecülen in Gasform occupirt wird, so ist $N\frac{\pi s^3}{6}$ derjenige Theil der Raumeinheit, welchen die N Molecüle ruhend gedacht mit ihrer Masse wirklich ausfüllen. Wir bezeichnen das Verhältniss von $\frac{N\pi s^3}{6}$ zur Einheit mit ε und nennen zugleich ε den Condensationscoëfficienten des Gases. Dadurch geht die Gleichung über in:

$$s = 8\varepsilon l$$

und heisst:

„Der Durchmesser der Molecüle eines Gases ist gleich der achtfachen mittlern Weglänge, multiplicirt mit dem Condensationscoëfficienten".

Von den Gasen unterscheiden sich die tropfbar-flüssigen und festen Körper dadurch, dass bei ihnen die Molecüle so nahe an einander gerückt sind, dass sich die Sphären der Abstossung zweier nächster einander berühren. Während aber in den Flüssigkeiten die Molecüle in fortwährender Rotation begriffen sind, und sich zugleich, obwohl verhältnissmässig langsam, zwischen einander durchdrängen, sind dieselben in einem festen Körper an bestimmten Orten und in bestimmten Lagen festgehalten. Sie vermögen, im stabilen Gleichgewichte stehend, blos um eine fixe Lage zu oscilliren.

Aber selbst unter der vereinfachenden Voraussetzung einer sphärischen Gestalt der Molecüle muss der Raum, welchen eine bestimmte Anzahl derselben als Flüssigkeit einnimmt, gegenüber jenem, den sie in der Gasform beanspruchten, merklich grösser sein als der ideale Condensationscoëfficient angibt; denn die Molecüle der Flüssigkeit lassen nothwendig kleine Räume zwischen sich unausgefüllt, was bei der Bestimmung des Condensationscoëfficienten nicht in Betracht gezogen ward. Überdies können diese Zwischenräume je nach der Art der Schichtung der Flüssigkeits-Molecüle erheblich

verschieden sein. Unsere sphärischen Molecüle nehmen in gedrängtester Lagerung einen nur wenig grössern Raum ein, als der Condensationscoëfficient anzeigt — wie 1 : 1·17 — während bei der lockersten Schichtung die Differenz sehr bedeutend wird — wie 1 : 1·91. — Man könnte geneigt sein dieses Intervall zur Erklärung der Ausdehnung durch die Wärme zu benützen, und das Minimum in den Punkt der grössten Dichte zu verlegen, das Maximum hingegen dort anzunehmen, wo eine eingeschlossene Flüssigkeit bei hoher Temperatur unter rascher Ausdehnung ein Volumen annimmt, welches sie beim plötzlichen Übergang in die Gasform beibehält. Bei nicht sphärischen Molecülen würden die Extreme der Schichtung offenbar noch weiter aus einander liegende Dichtigkeiten erwarten lassen. Diese Betrachtung würde die Benützung der beobachteten Condensationsverhältnisse sehr misslich machen, wenn es sich eben nicht blos um Annäherungswerthe handeln würde, und wenn nicht auch die übrigen Fundamente in der Voraussetzung der Kugelgestalt der Molecüle, in der festgezogenen Abstossungssphäre u. s. w. bereits Nothbehelfe in sich aufgenommen hätten.

Hier aber, wo es sich blos um die Frage handelt, in welche Grössenclasse der Durchmesser eines Molecüles gehöre, ist das factisch beobachtete Condensationsverhältniss vollkommen ausreichend.

Was dagegen die Voraussetzung betrifft, dass zwischen zwei Molecülen, welche sich in einer Flüssigkeit berühren, derselbe Centralabstand bestehe, wie beim Zusammenstoss zweier Molecüle derselben Art im Dampfe, so hat sie alle Wahrscheinlichkeit für sich. Denn einmal spricht die geringe Zusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten, selbst enormen Druckkräften gegenüber, dagegen, dass die lebendige Kraft, welche in der Gasform zwei Molecüle gegen einander treibt, selbe näher an einander zu bringen vermögen sollte. Eben so auch die Erscheinungen an der starren Aggregationsform, bei welcher namentlich die Dichte nicht erheblich abweicht von derjenigen der flüssigen Form. Es kann also der Durchmesser der Molecüle im Gase nicht wohl geringer sein als in der Flüssigkeit. Er kann aber auch nicht füglich bedeutend grösser sein, da die Erscheinungen zu der Annahme nöthigen, dass das Intervall zwischen dem Beginn der Abstossung zweier Molecüle und jenem Punkt, wo sie alle gewöhnlichen Kräfte an Intensität überschreitet, überhaupt verschwindend klein sei. Die Unterschiede endlich in der Dichte einer Flüssigkeit, welche

durch Temperaturänderungen herbeigeführt werden, liegen innerhalb der Grenzen, welche eine mehr oder minder dichte Schichtung der Molecüle zu bewirken vermag.

Wenn man die Temparatur 0 zu Grunde legt, geben die Beobachtungen folgende Condensationscoëfficienten: Für Wasser 0·00081, für Stickoxydul 0·00154, für Untersalpetersäure 0·00143, für Ammoniak 0·00102 und für Kohlensäure 0·00204.

Für die Luft, welche nicht condensirbar ist, kann leider das Condensationsverhältniss nicht direct gefunden werden, und sie ist gerade der einzige Körper, für welchen die mittlere Weglänge mit einiger Sicherheit bekannt ist. Glücklicher Weise hat H. Kopp [1]) den Weg gezeigt, welcher uns von der chemischen Formel einer Substanz zur Kenntniss ihrer Dichte im flüssigen Zustande führt. Im Sinne der oben angedeuteten Hypothese über die Constitution der Flüssigkeiten liegt es, dass jedes Atom in derselben einen unveränderlichen sphärischen Raum einnehmen müsse. Diese Constanz in der Raumerfüllung Seitens der Atome wird aber durch die entstehenden Zwischenräume gestört, und so zu sagen verdeckt.

Denkt man sich nun die leeren Zwischenräume auf die einzelnen constituirenden Atome vertheilt, so wird man in den Stand gesetzt aus den beobachteten Dichten einiger schicklich gewählter Verbindungen für die chemischen Elemente Volumzahlen abzuleiten, welche in die Formel einer Flüssigkeit statt der chemischen Zeichen gesetzt, das specifische Volum derselben geben — genau so wie aus den Äquivalentzahlen ihrer Bestandtheile sich ihr Äquivalent ergibt — vorausgesetzt nämlich, dass die Dichte der Molecularschichtung bei allen Flüssigkeiten wenigstens nahebei die gleiche ist. Dies ist aber im Allgemeinen keineswegs zu erwarten, da dieselbe offenbar von der Structur des Molecüls abhängt, nicht minder auch von der Temperatur, und zwar für verschiedene Flüssigkeiten nach verschiedener Weise.

Man wird daher nur so viel erwarten dürfen, dass das für eine Substanz berechnete specifische Volum bei irgend einer nicht näher

---

[1]) Ann. der Chemie und Pharm. XCII. 1; XCIV. 257; XCV. 307; XCVI. 2, 330; CXXVIII. 139.

bestimmbaren Temperatur mit der Beobachtung übereinstimmen werde, und dass für Substanzen von ähnlichen chemischen Charakter sich auch eine gewisse Analogie in diesen Temperaturen manifestiren dürfte. Nach der wichtigen Entdeckung von H. Kopp tritt nun eine solche Übereinstimmung klar hervor, wenn man für alle Flüssigkeiten solche Temperaturen wählt, bei welchen ihre Dämpfe die gleiche Spannkraft besitzen — wie es namentlich bei den Siedepunkten der Fall ist. Es lässt sich nicht läugnen, dass in einer Reihe von Flüssigkeiten, welche so weit erhitzt sind, dass in jeder die Dämpfe gerade den Druck einer Atmosphäre zu überwinden im Stande sind, eine gewisse Gleichartigkeit der Schichtung schon von vorn herein zu erwarten stand, wenigstens in so lange, als die chemische Constitution derselben nicht zu verschiedenartig war.

In der beigefügten Tabelle sind die specifischen Volumina ziemlich aller jener Flüssigkeiten zusammengestellt, für welche Beobachtungen vorliegen, und welche blos Sauerstoff, Wasserstoff, Stickstoff, Kohlenstoff, Schwefel, Chlor, Brom und Jod enthalten. Mit wenigen Ausnahmen sind sie sämmtlich den Arbeiten von H. Kopp entnommen.

Die erste Columne enthält den Namen der Substanz, die zweite ihre chemische Formel, die dritte das specifische Volum bei 0, die vierte dasselbe beim Siedepunkt — beide aus den Beobachtungen abgeleitet. In der fünften sind die specifischen Volumina für den Siedepunkt nach den Annahmen von Kopp berechnet, in der sechsten dieselben auf Grundlagen, welche der oben angedeuteten Anschauungsweise conform gewählt wurden. Und zwar ist in ihr genommen $\Theta = 11$, $H = 3 \cdot 5$, $N = 13$, $C = 14$, $S = 26$, $Cl = 22 \cdot 8$, $Br = 32 \cdot 1$, $J = 43$ Über die Zahlen der 7. Columne weiter unten.

Die Differenzen zwischen Beobachtung und Berechnung stellen sich für unsere sechste Columne im Ganzen etwas grösser heraus als dies bei Kopp der Fall ist, allein seine Annahmen sind mit der oben aufgestellten Ansicht über die Constitution der Flüssigkeiten nicht wohl in Einklang zu bringen. Er setzt nämlich $C = 11$, $H = 5 \cdot 5$, Θ im Radical $= 12 \cdot 2$, Θ ausserhalb des Radicals $= 7 \cdot 8$, S im Radical, gleichsam den Koklenstoff ersetzend $= 28 \cdot 6$, S ausserhalb des Radicales $= 22 \cdot 6$, N in flüchtigen Basen $= 2 \cdot 3$, N in der Untersalpetersäure $= 8 \cdot 6$, N in den Cyanverbindungen $= 17$; endlich $Cl = 22 \cdot 8$, $Br = 27 \cdot 8$, $J = 37 \cdot 5$.

Hier ist vor allem das so geringe specifische Volum des Stickstoffes in den Basen überraschend. Kopp selbst macht auf diesen Umstand aufmerksam, welcher den Stickstoff den Metallen nähere! Das ist sonst nicht Sache des Stickstoffs, beim Wasserstoff hätte man eine solche Annäherung eher erwarten dürfen. Übrigens hat der Stickstoff noch zwei andere sp. Volumina: 8·6 und 17. Ein solches Aufsteigen von 2·3 auf 17 ist aber mit unserer Ansicht von der Invariabilität des Atomvolumens nicht zu vereinbaren, denn die Verschiedenheit der Schichtung kann so grosse Differenzen nicht ausgleichen. Kopp legt aber gerade auf diese Verschiedenheit des sp. Volums eines Atomes in verschiedener Stellung ein besonderes Gewicht. Er sieht nämlich darin einen Beweis für die Unentbehrlichkeit rationeller Formeln, und zugleich einen Prüfstein für die Richtigkeit einer solchen in einzelnen zweifelhaften Fällen.

Für mässige Änderungen des sp. Volums eines Atomes je nach seiner Stellung im Molecüle ist übrigens auch unsere Annahme zugänglich. So deuten z. B. die Zahlen bei den Cyanverbindungen an, dass die Schichtung beim Siedepunkt in ihnen nicht jenes normale Mittel erreicht hat, das sich bei andern Sticktsoffverbindungen findet; man muss hier mit den Beobachtungen zu namhaft höheren Temperaturen hinaufgehen. Statt dessen kann man nun auch im Sinne Kopp's sagen: der Stickstoff einer Cyanverbindung wirke mehr auflockernd auf das Molecül als Stickstoff in anderer Stellung, und man kann diese auflockernde Kraft als eine Vergrösserung des sp. Volums des Stickstoffs in den Cyanverbindungen auffassen. Führt man diese Anschauungsweise consequent durch, so wird man begreiflicher Weise für die Siedepunkte eine grössere Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung erzielen können. Nach dieser Auffassung sind beispielshalber die Zahlen der Columne 7 berechnet. Dabei wurde gesetzt $\Theta = 14$ durchaus, $\Theta = 11$ ausserhalb wie innerhalb eines Radicales, ein Θ ausserhalb eines Radicales, neben einem Θ im Radical aber $= 10$, N in den Oxyd-Verbindungen des Stickstoffes $= 12$, N in den Cyanverbindungen $= 14$.

Einen bemerkenswerthen Fall, in welchem die Stellung des Atomes im Molecül beachtet werden muss, bietet das Radical Phenyl dar. Die geringe Atomigkeit von C_6 in demselben, nämlich 6 statt der normalen 14 im Caproyl, macht es im vorhinein wahrscheinlich, dass in ihm die sechs Kohlenstoff-Atome ungewöhnlich gedrängt stehen;

und in der That wird ein genügendes Resultat nur dadurch erhalten, dass in Columne 6 $C_6H_6=72$ statt 84 genommen, und diese Zahlen für alle Substanzen, welche dieses Radical enthalten, festgehalten wurde.

Sonst finden sich grössere Abweichungen nur bei einigen schwer condensirbaren Substanzen mit den einfachsten Molecülen, wie bei der Kohlensäure und dem Cyanwasserstoffe; also in Fällen, wo eine etwas abweichende Schichtung nicht unerwartet sein kann.

Nach diesen Principien berechnet sich die Dichte des condensirten Sauerstoffes zu 1·4545, die des condensirten Stickstoffes zu 1·16, und die der Luft als eines Gemenges von vier Theilen Stickstoff und einem Theil Sauerstoff zu 1·224.

Da die Erfahrung gezeigt hat, dass sich hinsichtlich des specifischen Volums chemische Verbindungen und blosse Gemenge ganz gleich verhalten, so kann man die beobachteten Dichten der Oxyde des Stickstoffes mit jener berechneten Dichte der hypothetisch flüssigen Luft vergleichen. Wir finden hiebei:

Untersalpetersäure . $N\Theta_2$ enthaltend N30·45% Θ69·15% d=1·50
Stickoxydul . . . . . $N_2\Theta$ „ „ 65·45% „ 34·15% d=1·30
Atmosphär. Luft . . . „ 77% „ 23% d=1·224

also eine mit steigendem Stickstoffgehalt regelmässig abnehmende Dichte.

Da wir oben gefunden, dass sich der ideale Condensationscoëfficient zu dem erfahrungsmässig bei der Temperatur der grössten Dichte bestimmten verhält wie 1 : 1·17, so hätten wir statt 1·224, 1·43 zu nehmen. Aber die Zahl 1·224 würde sich auf den Siedepunkt der Luft beziehen, und wenn wir die Differenzen zwischen den Dichten einer Flüssigkeit für verschiedene Temperaturen erwägen, werden wir den Werth 1·5 für die ideale Luftdichte eher zu klein als zu gross ansehen müssen. Da die Luft in Gasform 770mal leichter ist als das Wasser, so haben wir schliesslich für den Werth des Condensationscoëfficienten der Luft

$$\frac{1}{770\times 1\cdot 5}=\frac{1}{1155}=0\cdot 000866.$$

Maxwell [1]) hat zuerst mit Hilfe des von Stokes bestimmten Coëfficienten der innern Reibung der Luft für diese die mittlere Weglänge berechnet, und dabei 0·000062 Millimeter gefunden.

---

[1]) In der oben cit. Abhandlung.

In der neuesten Zeit hat O. E. Meyer [1]) eine Revision der Maxwell'schen Arbeit vorgenommen, und ist in Folge verschiedener Correctionen zu einem erheblich grössern Werth gekommen. Derselbe hat ausserdem hieher gehörige Versuche von Bessel, die mit ausserordentlicher Schärfe durchgeführt sind, herbeigezogen, so wie eine Reihe eigener Beobachtungen unter allen erdenklichen Vorsichtsmassregeln ausgeführt. Alle diese Arbeiten gaben nahe übereinstimmende Zahlen, als deren Mittel sich 140 Millionstel des Millimeters herausstellte.

Auf diesen Grundlagen haben wir endlich:

$$s = 8 \times 0 \cdot 000866 \times 0 \cdot 000140 = 0 \cdot 000000969^{mm}$$

oder in runder Zahl: 1 Millionstel des Millimeters für den Durchmesser eines Luftmolecüles.

Dieser Werth ist freilich nur als ungefähre Annäherung zu nehmen, er ist aber sicher nicht um das zehnfache zu gross oder zu klein, und wenn nicht in den Prämissen principielle Fehler enthalten sind, wird bei allen Correcturen, welche die mittlere Weglänge und der Condensationscoëfficient der Luft noch erfahren mögen, der Satz stehen bleiben: Für das Gebiet der Atome und Molecüle ist das passende Längenmass das Millionstel des Millimeters.

Dies ist ungefähr der siebenhundertste Theil der Wellenlänge des rothen Lichts, und wie der Kilometer als Meilenmass für die grössten irdischen Längen brauchbar ist, so das Millionstel-Millimeter für die kleinsten. Der Inhalt eines Kubikmillimeters solcher Molecüle würde hinreichen, einem Quadratmeter mit einer continuirlich zusammenhängenden Schichte von Materie zu überziehen.

Faraday [2]) hat durch ein sinnreiches Verfahren Goldhäutchen dargestellt, welche sich unter dem Mikroskope als continuirlich erwiesen, obwohl ihre Dicke nur $\frac{1}{100}$ der Wellenlänge des Lichtes betrug. Doch waren sie bereits mit weissem statt mit grünem Lichte, wie bei grösserer Dicke, durchscheinend, zum Beweise, dass wohl

---

[1]) Ann. der Phys. und Ch. v. Pogg. CXXV, 2.

[2]) Phil. Trans. 1857, Part I. 145 u. Phil. Mag. [4] XIV. 401 u. 512.

bereits Lichtstrahlen durch moleculare Zwischenräume durchgingen. In der That berechnet sich für eine solche Schicht, in Betracht der grösseren Goldatome, nur mehr eine Dicke von 3—5 Molecülen. Nebenbei stellt sich für die Atomgewichte der Chemiker das Trillionstel des Milligrammes als passende Gewichtseinheit heraus.

So imposante Zifferreihen aber auch aus unserm Resultate hervorgehen, namentlich wo drei Dimensionen ins Spiel kommen, so ist doch nicht zu läugnen, dass sie entschieden zurückbleiben hinter den Erwartungen welche die Redensarten der Mikroskopiker von dem bodenlosen Abgrund des „unendlich Kleinen" erregt haben. Ja es drängt sich die Befürchtung auf, dass die ganze Theorie, wenigstens in ihrer jetzigen Gestalt, an dieser Klippe scheitern könnte, wenn jene Unendlichkeit des Kleinen sich nicht beschränken lassen sollte.

Nobert [1]) zieht 4000 Linien auf der Breite eines Millimeters; die vorzüglichsten Instrumente vermögen sie noch aufzulösen und gleiche Grössen am Detail der zartesten organischen Gebilde zur Wahrnehmung zu bringen. Dieser Abstand ist 250mal grösser als der Durchmesser der Luftmolecüle. Da man aber Grund hat die Molecüle der einfachen Gase als Doppelatome zu betrachten, so wird die Zahl 400 nahebei die Anzahl von Atomen Sauerstoff oder Stickstoff darstellen, welche an einander gereiht, den Abstand zweier solcher Nobert'schen Linien ausfüllen. Ein Würfel von der Seitenlänge dieses Abstandes enthält demnach 64 Millionen, oder bei gedrängterer Schichtung beiläufig 100 Millionen solcher Atome. Die Hauptmasse der organischen Gebilde wird aber von ziemlich complexen Molecülen, wie Albumin, Chitin u. s. w. gebildet, welche durchschnittlich mehr als je 50 Atome C, N, H und O umfassen. Dies bringt den Inhalt unseres Würfels auf 2 Millionen Molecüle organischer Substanz herab.

Da bei lebenden Organismen reichlich die Hälfte des Gewichtes für Flüssigkeiten, welche die Höhlungen ausfüllen, zu rechnen ist, so

---

[1]) Specialkat. der Ausstellung des Zollvereins in der Londoner Ausstellung 1862, p. 83, und Harting: Das Mikroskop. Übersetzt von Theile, p. 881.

verbleibt in runder Zahl eine Million Molecüle für den Aufbau eines jener Wesen, welche nahe der Grenze der Darstellbarkeit für unsere heutigen Instrumente stehen. Nun sind aber die organischen Molecüle untheilbare Bausteine, und eine leichte Überlegung lehrt uns, dass eine Million von Bauelementen allenfalls für eine nicht sehr complicirte Zellenmembran oder dergleichen ausreichen möge, nimmermehr aber für einen mit allerlei Organen ausgestatteten Organismus.

Am allerwenigsten dürfte man noch eine Welt von organischen Wesen in absteigender Progression der Dimensionen hinter unsere Zelle verlegen. Hier ist, wenn anders die neueren Gas- und Flüssigkeitstheorien auf festem Boden stehen, eine definitive Schranke gezogen.

Wohl könnte man diese Schranken weiter hinausrücken, wenn man die Gasmolecüle bereits für grössere Aggregate der einfachen chemischen Molecüle erklärte. Allein das Gesetz, dass in denselben Raum unter gleichen Umständen von allen Gasen die gleiche Anzahl Gasmolecüle enthalten ist, würde zu der Nebenannahme nöthigen, dass bei den einfachsten sowohl als bei den zusammengesetztesten Gasen und Dämpfen sich genau dieselbe grosse Zahl chemischer Molecüle zu einem Gasmolecül vereinigt habe. Eine Naturnothwendigkeit aber, welche 1000 H_2 im Wasserstoffgas zusammenhielte, sollte auch genau 1000 Atome valeriansaures Amyl oder Chlorbenzoyl in den betreffenden Dampfmolecülen zusammenhalten? Eine solche Annahme verstösst zu sehr gegen alle Wahrscheinlichkeit um sie weiter zu verfolgen.

Eher dürfte es gerathen sein, an eine grössere Complication der Atome selbst zu denken, und das Sauerstoff- oder Wasserstoffatom als ein Conglomerat vieler kleinerer Partikelchen zu betrachten, — seien diese nun von je einerlei Materie oder gemischter Natur. Mit solchen bekanntlich von namhaften Forschern aufgestellten Vermuthungen gerathen wir aber in das Geleise eines anderen Ausweges, welcher, falls die Thatsachen wirklich dazu drängen sollten, eine unabsehbare Perspective über jene Grenze hinaus eröffnen würde, ohne allzusehr abzuweichen von den gewohnten atomistischen Hypothesen, welche sich bisher dem Fortschritt der Wissenschaft so förderlich bewiesen haben. Wir meinen die Herbeiziehung der Ätherhüllen zur Erklärung von Lebensprocessen in den letzten

Verzweigungen der materiellen Substrate. Da sich ihre Existenz in der Theorie des Lichtes und der Elektricität immer unabweisbarer herausstellt, so ist in der That nicht abzusehen, wie sie in den letzten Elementen der organisirten Materie nicht eine bedeutende Rolle spielen sollten. Unter diesem Gesichtspunkte würde das organische Molecül selbst als der eigentliche Elementar-Oganismus erscheinen, von welchem die tastbare Materie nur das Gerüste ausmachte, während die dasselbe durchziehenden Ätherhüllen, von unendlich feinerer Materie, Raum für eine unerschöpfliche Mannigfaligkeit des elementaren Lebens gewährten. Über die Nothwendigkeit und den Werth einer solchen Erweiterung der Atomistik mögen die Thatschen der Zukunft entscheiden.

Specifisches Volum

		beobachtet		berechnet		
		beim 0 Punkt	beim Siedepunkt	Kopp	Loschmidt	
Wasser	H_2O	18	18·8	18·8	18	18·6
Aethyl-Buthyl	C_6H_{14}	122·6	137	143	133	137·2
Aethyl-Amyl	C_7H_{16}	141·4	162	165	154	158·8
Dibutyl	C_8H_{18}	159·7	184·5—186·8	187	175	180·4
Holzgeist	CH_4O	39·12	41·9—42·2	40·8	39	40·2
Weingeist	C_2H_6O	56·8	61·8—62·5	62·8	60	61·8
Amylalkohol	$C_5H_{12}O$	106·6	123·6—124·4	128·8	123	126·6
Aether	$C_4H_{10}O$	100·5	105·6—106·4	106·8	102	105
Aethylenoxyd	C_2H_4O	49·1	52	51·8	53	54·2
Aldehyd	C_2H_4O	54·5	56—56·9	56·2	53	54·2
Valeraldehyd	$C_5H_{10}O$	104·75	117·2 - 120·3	122·2	116	119
Aceton	C_3H_6O	71·2	77·3—77·6	78·2	74	75·8
Ameisensäure	CH_2O_2	37·6	40·9—41·8	42	43	42·6
Essigsäure	$C_2H_4O_2$	55·6	63·5—63·8	64	64	64·2
Propionsäure	$C_3H_6O_2$	72·8	85·4	86	85	85·8
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	89	106·7—107·8	108	106	107·4
Valeriansäure	$C_5H_{10}O_2$	106·7	130·2—131·2	130	127	129
Ameisensaures Methyl	$C_2H_4O_2$	60	63·4	64	64	64·2
Ameisensaures Äthyl	$C_3H_6O_2$	78·3	84·9—85·7	86	85	85·8

Ameisensaures Amyl	$C_6H_{12}O_2$		149·4—150·2	152	148	150·6
Essigsaures Methyl	$C_3H_6O_2$	77·4	83·7— 85·8	86	85	85·8
„ „ Äthyl	$C_4H_8O_2$	96·7	107·4—107·8	108	106	107·4
„ „ Butyl	$C_6H_{12}O_2$		149·3	152	148	150·6
„ „ Amyl	$C_7H_{14}O_2$	148·2	173·3—175·5	174	169	172·2
Propionsaures Äthyl	$C_5H_{10}O_2$	110·5	125·8	130	127	129
Buttersaures Methyl	$C_5H_{10}O_2$	110·8	126·3—127·3	130	127	129
„ „ Äthyl	$C_6H_{12}O_2$	128·3	149·1—149·4	152	148	150·2
Valeriansaures Methyl	$C_6H_{12}O_2$	128·7	148·7—149·6	152	148	150·2
„ „ Äthyl	$C_7H_{14}O_2$		173·5	174	169	172·2
„ „ Amyl	$C_{10}H_{20}O_2$	194·4	244·1	240	232	237
Essigsäure-Anhydrid	$C_4H_6O_3$	93	109·9	109·2	110	109·8
Kohlensaures Äthyl	$C_5H_{10}O_3$	118	138·8—139·4	137·8	138	139
Oxalsaures Methyl	$C_4H_6O_4$	102 bei 50°	116·3	117	121	119·8
„ „ Äthyl	$C_6H_{10}O_4$	132·5	166·8—167·1	161	163	164
Bernsteinsaures Äthyl	$C_8H_{14}O_4$	162·3	209	205	205	207·2
Benzol	C_6H_6	86·8	96·0— 99·7	99	93	
Cymol	$C_{10}H_{14}$	152·5	183·5—185·2	187	177	
Phenol	C_6H_6O	86·96	103·6—104	106·8	104	
Benzylalkohol	C_7H_8O	101·6	123·7	128·8	125	
Bittermandelöl	C_7H_6O	99·5	118·4	122·2	118	
Cuminol	$C_{10}H_{12}O$	150·4	184·5—186·8	187	175	
Benzoësäure	$C_7H_6O_2$	112·6 bei 121°	126·9	130	129	
Benzoësaures Methyl	$C_8H_8O_2$	123·3	148·5—150·3	152	150	

Specifisches Volum

		beobachtet		berechnet	
		beim 0 Punkt	beim Siedepunkt	Kopp	Lorenz
Benzoësaures Äthyl	$C_9H_{10}O_2$	140·7	172·4– 174·8	174	171
„ „ Amyl	$C_{12}H_{16}O_2$	191·8	247·4	240	234
Zimmtsaures Äthyl	$C_{11}H_{12}O_2$	165·1	211·2	207	200
Saures salicylsaures Methyl	$C_8H_8O_3$	127	156·2 157	159·8	161
Mercaptan	C_2H_6S	72·8	76	77·6	75
Amylmercaptan	$C_5H_{12}S$	121·5	140· ·140·8	143·6	138
Schwefelmethyl	C_2H_6S	72·2	75·7	77·6	75
Schwefeläthyl	$C_4H_{10}S$	107·5	120·5 121·5	121·6	117
Zweifach-Schwefelmethyl	$C_2H_6S_2$	88·5	100·6	100·2	97
Schweflige Säure	SO_2	42·9 bei –20°	43·9	43·6	48
Schwefligsaures Äthyl	$C_4H_{10}SO_3$	125·4	149·5	149·4	150
Schwefelkohlenstoff	CS_2	58·8	62·4		66
Elayl, zweifach gechlort	$C_2H_2Cl_2$	77·61 bei 5°	79·9	78·6	80·6
Chlorkohlenstoff	C_2Cl_4	100·6	115·4	113·2	110·2
Chlorelayl	$C_2H_3Cl_3$	77·2	85·8—86·4	89·6	87·6
„ einfach gechlort	$C_2H_2Cl_2$	93·9	105·4—107·2	106·9	106·9
„ zweifach gechlort	$C_2H_2Cl_4$	104·3	120·7—121·4	124·2	126·2
„ dreifach gechlort	C_2HCl_5	121·7	143	141·5	145·5
Chlorbutylen	$C_4H_8Cl_2$	116	129 5—133·7	133·6	129·6

Chlormethyl, einfach gechlort	CH_3Cl		64·5	67·6	66·6	
Chloroform	$CHCl_3$	78·6	84·8—85·7	84·9	85·9	
Chlorkohlenstoff	CCl_4	94·5	104·3—107	102·2	105·2	
Chloräthyl	C_2H_5Cl	70	71·2—74·5	72·3	68·3	
„ einfach gechlort	$C_2H_4Cl_2$	79·8	86·9—89·9	89·6	87·6	
„ zweifach gechlort	$C_2H_3Cl_3$	99·2	105·6—109·7	106·9	106·9	
Chloramyl	$C_5H_{11}Cl$	120·2	135·4—137	138·3	131·3	
Chloral	C_2HCl_3O	97·1	108·4—108·9	108·1	110·9	
Chloracetyl	C_2H_3OCl	69·2	74·4—75·2	73·5	72·3	
Chlorbenzoyl	C_7H_5OCl	114	134·2—137·8	139·5	137·3	
Chlorschwefel	SCl	39·7	45·7			
Brom	Br	26	27—28·7	27·8	32·1	
Brommethyl	CH_3Br	57·1	58·2	55·3	56·6	
Bromäthyl	C_2H_5Br	74	78·4	77·3	77·6	
Bromamyl	$C_5H_{11}Br$	129	149·2	143·3	140·6	
Bromelayl	$C_2H_4Br_2$	86	97·5—99·6	99·6	106·2	
Jodmethyl	CH_3J	64·6	65·4—68·3	65	67·5	
Jodäthyl	C_2H_5J	78·8	85·9—86·4	87	88·5	
Jodamyl	$C_5H_{11}J$	134·8	152·5—158·8	153	151·5	
Stickoxydul	N_2O	45·6 bei −6°	36·1		37	35
Untersalpetersäure	NO_2		31·7—32·4	33	35	34
			15° unterm Siedep.			
Salpetrigsaures Methyl	CH_3NO_2		61·6, 27° üb. Siedep.	60·5	59·5	59·3
„ „ Äthyl	$C_2H_5NO_2$		79—84	82·5	80·5	80

Specifisches Volum

		beobachtet		berechnet		
		beim 0 Punkt	beim Siedepunkt	Kopp	Loschmidt	
Salpetrigsaures Amyl	$C_5H_{11}NO_2$	133·4 bei 15°	148·4	148·5	143·5	144·8
Salpetersaures Methyl	CH_3NO_3	65 bei 20°	69·4	68·3	70·5	69·4
„ „ Äthyl	$C_2H_5NO_3$	80·4	90	90·3	91·5	91·0
„ „ Amyl	$C_5H_{11}NO_3$	133 bei 20°	155	156·3	154	155·3
Nitrobenzol	$C_6H_5NO_2$	102·5	122—125	126·5	124·5	124
Ammoniak	H_3N	22·4 bei 10°		18·8 bei 36°	23·5	
Äthylamin	C_2H_7N	64·6 bei 8°	65·3	62·8	65·5	
Amylamin	$C_5H_{13}N$	116 bei 18°	125	128·8	128·5	
Caprylamin	$C_8H_{19}N$	164 bei 15°	190	194·8	191·5	
Anilin	C_6H_7N	90	107·35	106·8	109·5	
Äthylanilin	$C_8H_{11}N$	126·8 bei 18°	150·6	150·8	151·5	
Diäthylanilin	$C_{10}H_{15}N$	159·2 bei 18°	190·5	194·8	193·5	
Cyan	C_2N_2	58 bei 15°		56	54	56
Cyanwasserstoff	CHN	38·5		33·5	30·5	31·8
Cyanmethyl	C_2H_3N	49·1	54·5	55·5	51·5	53·4
Cyanäthyl	C_3H_5N	70	77	77·5	72·5	74·1
Cyanpropyl	C_4H_7N	86·2	96	99·5	93·5	96·6
Cyanbutyl	C_5H_9N	103	114	121·5	114·5	118·2

Cyanamyl	$C_6H_{11}N$	120	137	143·5	135·5	139·8
Cyanphenyl	C_7H_5N	100	121·6	121·5	116·5	120·2
Cyansaures Äthyl	C_3H_5NO	79 bei 10°	84·3	85·3	83·5	86
Schwefelcyanmethyl	C_2H_3NS	67	78·2	78·1	77·5	
Schwefelcyanäthyl	C_3H_5NS	84	99·1	100·1	98·5	
Senföl	C_4H_5NS	103	114	111·1	112·5	

XXIII. SITZUNG VOM 19. OCTOBER 1865.

Im Vorsitze Herr Hofrath W. Ritter v. Haidinger.

Das h. k. k. Staatsministerium übermittelt, mit Zuschrift vom 13. October l. J., die graphischen Tabellen über die Eisbildung an der Donau und March im Winter 1864/5.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die Entwicklung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten" von Herrn Dr. M. Allé;

„Über die Atomwärme", von Herrn Gust. Schmidt, Professor am Landespolytechnicum in Prag.

Herr Prof. Dr. Aug. Em. Reuss überreicht eine Abhandlung betitelt: „Die Foraminiferen und Ostracoden der Kreide am Kanara-See bei Kustendsche".

Herr Dr. G. Tschermak legt zwei Abhandlungen vor und zwar: *a*) „über den Raibler Porphyr" und *b*) „über Porphyre aus der Gegend vom Nowagora bei Krakau".

Herr Hofrath W. Ritter von Haidinger spricht über das vor Kurzem erschienene und mit Unterstützung der k. Akademie herausgegebene Werk des c. M. Herrn Joachim Barrande: „*Système silurien du centre de la Bohême*". 1re Partie, II. Volume, und hebt den hohen Werth desselben für die Wissenschaft hervor.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Mémoires couronnés. Tome XXXII. 1864—1865. 4°.—Mémoires couronnés. Collection in 8°. Tome XVII, 1865. — Bulletin. 33e Année, 2e Sér. Tome XVIII, 1864; 34e Année, 2e Sér. Tome XIX, 1865, 8°. — Compte rendu des séances de la Commission Royale d'histoire. Tome VIe, 3e Bulletin; Tome VIIe, 1er & 2e Bulletins. 1864—1865; 8°. — L. Galesloot, Le libre des feudataires de Jean III., Duc de Brabant. Bruxelles, 1865; 8°.

Académie Impériale des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon: Mémoires. Classe des Lettres: N. S. Tome XIe. Lyon 1862—63; gr. 8°. — Classe des Sciences: Tome XIIIe. Lyon & Paris, 1863; gr. 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl., zu Amsterdam: Verhandelingen. Afdeeling Letterkunde. III. Deel. 1865; Afdeeling Natuurkunde. X. Deel. 1864; 4°. — Verslagen en Mededeelingen. Afdeeling Letterkunde. VIII. Deel. 1865; Afdeeling Naturkunde. XVII. Deel. 1865; 8°. — Jaarboek. 1863 & 1864; 8°. Johannes ven Leeuwen, *Senis vota pro patria.* (Gekrönte Preisschrift.) *Amstelodami, 1864;* 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1552. Altona, 1865; 4°.

Bauzeitung, allgemeine, nebst Atlas. XXX. Jahrg. 7.—9. Heft, Wien, 1865; 4°. & Folio.

Breslau, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften. 1864—65. 4°. & 8°.

Brühl, Carl Bernhard, *Laqueus Owenii* und *Laqueus tympanicus petrosi.* Mit 3 Tafeln. Wien, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances del'Académie des Sciences. Tome LXI, Nr. 14. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 15e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften, königl. böhmische, in Prag: Abhandlungen. V. Folge, XIII. Band. 1863 & 1864, Prag; 1865; 4°. — Sitzungsberichte. Jahrg. 1864. Juli—December. Prag, 1865; 8°.

Hamburg, Stadtbibliothek: Gelegenheitsschriften. 1864—1865. 4°.

Helsingfors, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften. 1864—1865. 8°., 4°. & Folio.

Instituto histórico, geográphico e ethnográphico do Brasil: Revista trimensal. Tomo XXVII. Parte 2da, 4° Trimestre. Rio de Janeiro, 1865; 8°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1865. 7. Heft. Wien; 8°.

— des k. k. österr. Museums für Kunst und Industrie. I. Jahrg. Nr. 1. Wien, 1865; 8°.

Moniteur scientifique. 211e & 212e Livraisons. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Quetelet, Ad., Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges. Bruxelles, 1864; 8°. — Observations des phénomènes périodiques. 1861 & 1862. 4°.

Reader. Nr. 146, Vol. VI. London, 1865; Folio.

Société Linnéenne de Lyon: Annales. Années 1863 & 1864. N. S. Tomes X^e et XIe. Paris, 1863 & 1865; gr. 8°.

— impériale d'agriculture etc. de Lyon: Annales. 3e Série. Tome VII. 1863. Lyon & Paris; gr. 8°.

— géologique de France: Bulletin. 2e Série. Tome XXIIe. Feuilles 8—16. Paris, 1864 à 1865; 8°.

Society, The Chemical: Journal. Ser. 2, Vol. III. January—March 1865. London; 8°.

— the Royal Geographical: Journal. Vol. XXXIV. 1864. London; 8°. — Proceedings. Vol. IX. N°s 3—6. London, 1865; 8°.

— the Asiatic, of Bengal: Journal. New Series. Nr. 4—5. 1864. Supplementary Number. Vol. XXXIII. Calcutta, 1864; 8°. — *Bibliotheca indica.* Nr. 203—204. Calcutta, 1864; 8°. New Series. Nr. 44—61. Calcutta, 1863—1864; 8°. — Palaeontology of Niti in the Northern Himalya. By Richard Strachey. Calcutta, 1865: 8°.

Upsala, Universität: Akadem. Gelegenheitsschriften. 1864—1865. 8° & Fol.

Verein für Landeskunde von Nieder-Österreich: Blätter für Landeskunde von Nieder-Österreich. I. Jahrg. Nr. 1—6. Wien, 1865; 8°.

Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Veterinärkunde. XXIV. Band, 1. Heft. (Jahrg. 1865. III.) Wien; 8°.

Wiener medizinische Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 82—83. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. Nr. 25. Gratz, 1865; 4°.

Über die Atomwärme.

Von **Gustav Schmidt,**
Professor am Landes-Polytechnicum in Prag.

Das Dulong-Petit und Neumann'sche Gesetz lässt sich in der allgemeinen Form darstellen:

$$qc = an \qquad (1)$$

Es bedeutet in dieser Gleichung:

- q das Gewicht eines Äquivalentes oder eines Molecüls einer in fester oder gasförmiger Form untersuchten chemischen Verbindung;
- c die Wärmecapacität derselben bei constantem Druck (die specifische Wärme);
- a einen erfahrungsmässig zu bestimmenden numerischen Coëfficienten, welcher für alle festen Verbindungen denselben Werth a_1 und für alle gasförmigen Verbindungen denselben Werth a_2 besitzt;
- n die Charakteristik der Verbindung, gebildet aus der Summe der Charakteristica sämmtlicher in der Verbindung erscheinenden Atome. Die Charakteristik eines jeden Atoms ist eine ganze Zahl, welche in allen Verbindungen von gleichem Aggregatzustand denselben Werth besitzt, jedoch für die zwei genannten Aggregatzustände im Allgemeinen verschieden ist.

Über die specifische Wärme der flüssigen Verbindungen sind noch nicht genügend viele brauchbare Versuchsdaten bekannt, um ein empirisches Gesetz aufstellen zu können.

In obiger Form wurde das Dulong-Petit'sche Gesetz von dem Verfasser dieser Zeilen zuerst für gasförmige Körper in diesen Sitzungsberichten [1]) auf Grundlage einer Abhandlung von Boedeker [2])

---

[1]) XXXIX. Band, S. 41 des Jahrganges 1860 der Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe: „Ein Beitrag zur Mechanik der Gase." Wien 1860.

[2]) Prof. Dr. C. Boedeker: „Die gesetzmässigen Beziehungen zwischen der Zusammensetzung. Dichtigkeit und der spec. Wärme der Gase." Göttingen 1857.

aufgestellt, und sodann für feste Körper nachgewiesen [1]) mit der ausdrücklichen Beschränkung, dass die einfachen Stoffe weder in fester noch in gasförmiger Form sich dem Gesetz unbedingt, sondern nur in der Regel fügen.

Die Veranlassung zu diesen Untersuchungen gab die grosse Unsicherheit, welche gegenwärtig noch in der specifischen Wärme des Wasserdampfes besteht. Dieselbe wurde von De la Roche und Bérard mit 0·847, später von Regnault mit 0·475, dann durch die theoretischen Untersuchungen Zeuner's mit 0·3462 (Wärmetheorie S. 173) und Rankine's mit 0·305 bestimmt. Aus der Formel $qc = an$ berechnet sie sich übereinstimmend mit Boedeker auf 0·382, welche Zahl der Verfasser in seiner „Theorie der Dampfmaschinen" [2]) den dortigen Rechnungen zu Grunde gelegt hat. — Die numerischen Werthe von n unter der Annahme, dass der Coëfficient

$$a_1 = a_2 = 0{\cdot}86$$

sei, hat der Verfasser in dem Artikel über die Äquivalent-Capacität, Prag 1861, in nachfolgender Tabelle angegeben:

(Frühere) **Tabelle für die Charakteristik** n.

A für feste, B für gasförmige Verbindungen.

Element	q	A	B	Element	q	A	B
Ag	107·97	8		Cl	35·46	7	6
Al	13·63	4		Co	30·00	4	
As	75·00	8	4	Cr	26·24	4	
B	11·04	4		Cu	31·68	4	
Ba	68·59	4		Fe	28·00	4	
Bi	208·00	8		Fl	19·00	7	6
Br	79·97	7	6	H	1·00	4	2
C	6·00	3	2	Hg	100·05	4	
Cgr [3])	33·00	4		J	126·88	7	6
Ca	20·00	4		K	39·11	8	

[1]) Jahrbuch der k. k. Montan-Lehranstalten, Band X, 1860: „Über den Unterschied der Äquivalent-Capacität in festen und in gasförmigen Verbindungen." Prag 1861.

[2]) Freiberg 1861.

[3]) Über das hypothetische Element Cgr = Graphitkohlenstoff, siehe Erdmann's Journal 1860, S. 124.

Element	q	A	B	Element	q	A	B
Mg	12·00	4		S	16·00	3	2
Mn	27·57	4		Sb	120·30	8	4
Mo	46·00	4		Si	14·81	4	2
N	14·00	8	4	Sn	58·00	4	2
Na	23·00	8		Sr	43·67	4	
Ni	29·00	4		Ti	25·00	4	2
O	8·00	2	2	W	95·00	4	
P	31·00	8	4	Zn	32·53	4	
Pb	103·57	4		Zr	22·40	4	

Herr Professor Kopp [1]) weist nun unter Benützung eines viel reichhaltigeren Materials an Beobachtungen ebenfalls nach, dass die Atomwärme starrer Körper nur ganz unerheblich durch den physikalischen Zustand und durch die Gruppirung der Atome des Körpers beeinflusst werde, und im Wesentlichen jedes Element mit einer ganz bestimmten Atomwärme in sämmtlichen festen Verbindungen auftritt. Er nimmt die Atomgewichte so an, wie sie die nachfolgende Tafel zeigt, in welcher hier zur Abkürzung des folgenden Textes der Strich bei den Doppelatomen:

Al, Ba, Ce, Ca, Cd, Co, Cr, Cu, Fe, Hg, Jr, Mg, Mn, Mo, Ni, O, Os, Pb, Pd, Pt, Rh, S, Se, Si, Sn, Sr, Te, Ti, Zn, Zr, W,

weggelassen wurde.

Atomgewichte nach Kopp.

Ag	108	Cd	112	Jr	198	Os	199·2	Si	28
Al	27·4	Cl	35·5	K	39·1	P	31	Sn	118
As	75	Co	58·8	Li	7	Pb	207	Sr	87·6
Au	197	Cr	52·2	Mg	24	Pd	106·6	Te	128
B	10·9	Cu	63·4	Mn	55	Pt	197·4	Ti	204
Ba	137	Fe	56	Mo	96	Rb	85·4	Ti	50
Bi	210	Fl	19	N	14	Rh	104·4	Zn	65·2
Br	80	H	1	Na	23	S	32	Zr	89·6
C	12	Hg	200	Ni	58·8	Se	79·4	W	184
Ca	40	J	127	O	16	Sb	122		

[redacted]

[1]) Annalen der Chemie und Pharmacie. III. Supplementb., 2. u. 3. Heft. 1865.

Die Atomwärme w dieser Elemente in festen Verbindungen bestimmt Kopp wie folgt:

für C . . . . . $w = 1{\cdot}8$
„ H . . . . . $w = 2{\cdot}3$
„ B . . . . . $w = 2{\cdot}7$
„ Si . . . . . $w = 3{\cdot}8$
„ O . . . . . $w = 4$
„ Fl . . . . . $w = 5$
„ P und S . . . . . $w = 5{\cdot}4$
„ N, Cl, Br, J und Metalle . . $w = 6{\cdot}4$,

während sich dieselbe nach meiner älteren Berechnung aus den Regnault'schen Versuchen folgender Massen ergeben hat:

für H, O, und B . . $w = 4 \times 0{\cdot}86 = 3{\cdot}44$
„ C und S . . . $w = 6 \times 0{\cdot}86 = 5{\cdot}16$
„ Cl, Br, J, Fl . . $w = 7 \times 0{\cdot}86 = 6{\cdot}02$
„ N und Metalle . $w = 8 \times 0{\cdot}86 = 6{\cdot}88$.

Letzteren Bestimmungen liegen 113 Regnault'sche Versuche zu Grunde. Bei ersteren (den Kopp'schen) wurde auch noch eine grosse Anzahl von Bestimmungen benützt, welche durch Kopp und Pape gemacht wurden, so wie auch einige von Neumann, Person und Alluard. Der wesentlichste Unterschied liegt in der Bestimmung der Atomwärme des C, welche ich nur allein aus der Atomwärme der einfach kohlensauren Salze vornehmen konnte, für welche sich aus den Regnault'schen Versuchen im Durchschnitt die Atomwärme von $2 \times 10{\cdot}782 = 21{\cdot}564$ ergeben hat.

Die Charakteristik dieser Salze von der Formel RCO_3 wäre $n = 8 + 6 + 12 = 26$, also die nach meiner Angabe berechnete Atomwärme $w = 0{\cdot}86 \times 26 = 22{\cdot}36$, somit die Übereinstimmung befriedigend.

Allein in dieser indirecten Bestimmung der Atomwärme des C haben sich die Fehler des Versuchsresultates und der Atomwärmebestimmung von R und O so ungünstig combinirt, dass die für C bestimmte Atomwärme $w = 6 \times 0{\cdot}86 = 5{\cdot}16$ entschieden zu gross ist, wie sich unzweifelhaft aus den von Kopp gemachten Bestimmungen der specifischen Wärme fester organischer Körper ergibt.

Die Gesammtheit aller Beobachtungen der specifischen Wärme von 199 festen Verbindungen, welche in der Kopp'schen Abhandlung angeführt sind, wird durch die von Kopp gemachten Bestim-

mungen in ganz befriedigender Weise dargestellt. Der Zweck dieser Zeilen ist nur nachzuweisen, dass die sämmtlichen Versuche, wenn nicht genauer, so doch mindestens eben so genau durch meine Formel

$$w = qc = an \qquad (1)$$

dargestellt werden können, wenn man in derselben eine der beiden folgenden Annahmen macht, für welche die Atomwärme der Metalle übereinstimmend mit Kopp = 6·4 wird.

$a = \frac{32}{30}$		$a = 0{\cdot}8$	
für	n	für	n
H, C, B, Si	2	C	2
P	3	H, B, Si	3
Fl und O	4	O, P	5
N und S	5	Fl	6
Cl, Br, J, und Metalle .	6	N, S	7
		Cl, Br, J, und Metalle .	8

Zum Beweis dessen führe ich in der nachfolgenden Übersicht die nach (1) berechnete Atomwärme für die Annahme $a = \frac{32}{30}$ unter der Aufschrift w_1, die mit $a = 0{\cdot}8$ berechnete Atomwärme als w_2, und die von Kopp berechnete als w_3 an. Daneben befindet sich die mit der beobachteten specifischen Wärme berechnete Atomwärme nach Regnault (*R*), Kopp (*K*), Pape (*P*), Neumann (*N*), Person (*Pr*), Alluard (*A*), so wie der Fehler von w_1 w_2 w_3 ausgedrückt in Procenten der beobachteten Atomwärme der festen Verbindung, wobei Bruchtheile unter 0·5 weggelassen, und solche über 0·5 als 1 gerechnet wurden. Die eingeklammerten Beobachtungswerthe (Rubrik „Anmerkung“) sind nicht berücksichtigt worden. Die zu w_1 und w_2 gehörigen Werthe der Charakteristik n sind in den Rubriken n_1 n_2 hinter den Molecülgewichten q angeführt.

Die Rubrik „Anmerkung“ enthält auch unter der Bezeichnung *NP* die allerneuesten Mittheilungen über beobachtete Atomwärmen von Neumann, berechnet von Dr. Karl Pape, aus Pogg. Annal. B. 126, S. 123.

Formel	q	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3
						Legi-
$\frac{1}{2}$ (Bi Sn)	164	6	8	6·4	6·4	6·4
$\frac{1}{2}$ (Hg Pb)	203·5	"	"	"	"	"
$\frac{1}{2}$ (Pb Sb)	164·5	"	"	"	"	"
$\frac{1}{2}$ (Pb Sn)	103·5	"	"	"	"	"
$\frac{1}{3}$ (Bi Sn_2)	148·7	"	"	"	"	"
$\frac{1}{3}$ (Co As_2)	89·6	"	"	"	"	"
$\frac{1}{3}$ (Pb Sn_2)	147·7	"	"	"	"	"
$\frac{1}{4}$ (Bi Sn_2 Sb)	142	"	"	"	"	"
$\frac{1}{4}$ (Pb Bi Sn_2)	163·3	"	"	"	"	"
$\frac{1}{4}$ (Bi Sn_2 Sb Zn_2)	116·4	"	"	"	"	"
						Schwefel-
As S	107	11	15	11·7	12·0	11·8
Co S	90·8	"	"	"	"	"
$\frac{1}{2}$ (Cu Fe) S	91·7	"	"	"	"	"
Fe S	88	"	"	"	"	"
Hg S	232	"	"	"	"	"
Ni S	90·8	"	"	"	"	"
Pb S	239	"	"	"	"	"
Sn S	150	"	"	"	"	"
Zn S	97·2	"	"	"	"	"
$Fe_{\frac{7}{8}}$ S	81	10·25	14	10·9	11·2	11·0
Ag_2 S	248	17	23	18·1	18·4	18·2
Co As S	166	"	"	"	"	"
Cu_2 S	158·8	"	"	"	"	"
Fe As S	163	"	"	"	"	"
Fe S_2	120	16	22	17·1	17·6	17·2
Mo S_2	160	"	"	"	"	"
Sn S_2	182	"	"	"	"	"
As_2 S_3	246	27	37	28·8	29·6	29·0
Bi_2 S_3	516	"	"	"	"	"
Sb_2 S_3	340	"	"	"	"	"

fester Verbindungen.

beobachtet	von	Procentualer Fehler Δw_1	Δw_2	Δw_3	Anmerkung
r u n g e n.					
6·6	*R*	— 3	— 3	— 3	
7·8	*R*	— 22	— 22	— 22	schmilzt schon bei 140°.
6·4	*R*	0	0	0	
6·6	*R*	— 3	— 3	— 3	
6·7	*R*	— 4	— 4	— 4	
6·4	*N*	0	0	0	
6·7	*R*	— 4	— 4	— 4	
6·6	*R*	— 3	— 3	— 3	
7·3	*R*	— 14	— 14	— 14	
6·6	*R*	— 3	— 3	— 3	
m e t a l l e.					
11·9	*N*	— 2	+ 1	— 1	käufliches.
11·4	*R*	+ 3	+ 5	+ 4	geschmolzen.
12·1	*K*	— 4	— 1	— 3	(13·9 *N*) Kupferkies.
11·9	*R*	— 2	+ 1	— 1	geschmolzen.
11·9	*R*	— 2	+ 1	— 1	Zinnober.
11·6	*R*	+ 1	+ 3	+ 2	geschmolzen.
12·2	*R*	— 4	— 2	— 3	(12·7 *N*, 11·7 *K*) Bleiglanz.
12·6	*R*	— 8	— 5	— 6	geschmolzen.
12·0	*R*	— 3	0	— 2	(11·1 *N*, 11·7 *K*) Zinkblende.
13·0	*R*	— 14	— 12	— 13	Magnetkies.
12·4	*N*				
18·5	*R*	— 2	— 1	— 2	geschmolzen.
17·8	*N*	+ 2	+ 3	+ 2	Kobaltglanz.
19·2	*R*	— 6	— 4	— 5	(19·1 *K*) Kupferglanz.
16·5	*N*	+ 10	+ 11	+ 10	Arsenikkies.
15·6	*R*	+ 7	+ 11	+ 7	(15·1 *K*) Strahl- und Schwefelkies.
16·0	*N*				
17·1	*N*	0	+ 3	0	(19·7 *R*) natürliches.
21·7	*R*	— 21	— 19	— 21	Musivgold.
27·8	*N*	+ 4	+ 6	+ 4	natürliches.
31·0	*R*	— 7	— 5	— 6	künstliches.
28·6	*R*	+ 1	+ 3	— 1	(30·8 *N*) künstliches (und natürliches).

Formel	q	n_1	n_2	m_1	m_2	m_3
				Cl	Br	J Fl Ver.
Ag Cl	143·5	12	16	12·6	12·8	12·8
Cu Cl	98·9	"	"	"	"	"
Hg Cl	235·5	"	"	"	"	"
K Cl	74·6	"	"	"	"	"
Li Cl	42·5	"	"	"	"	"
Na Cl	58·5	"	"	"	"	"
Rb Cl	120·9	"	"	"	"	"
Ag Br	188	"	"	"	"	"
K Br	119·1	"	"	"	"	"
Na Br	103	"	"	"	"	"
Ag J	235	"	"	"	"	"
Cu J	190·4	"	"	"	"	"
Hg J	327	"	"	"	"	"
K J	166·1	"	"	"	"	"
Na J	150	"	"	"	"	"
NH_4 Cl	53·5	19	27	20·3	21·6	22·0
$BaCl_2$	208	18	24	19·2	19·2	19·2
$CaCl_2$	111	"	"	"	"	"
$HgCl_2$	271	"	"	"	"	"
$MgCl_2$	95	"	"	"	"	"
$MnCl_2$	126	"	"	"	"	"
$PbCl_2$	278	"	"	"	"	"
$SnCl_2$	189	"	"	"	"	"
$SrCl_2$	158·6	"	"	"	"	"
$ZnCl_2$	136·2	"	"	"	"	"
$PbBr_2$	367	"	"	"	"	"
HgJ_2	454	"	"	"	"	"
PbJ_2	461	"	"	"	"	"
$CaFl_2$	78	14	20	14·9	16	16·4
$AlNa_3Fl_6$	210·4	48	68	51·2	54·4	55·6

beobachtet	von	Procentualer Fehler Δw_1	Procentualer Fehler Δw_2	Procentualer Fehler Δw_3	Anmerkung
bindungen.					
13·1	*R*	— 2	— 2	— 2	(12·8 *NP*) geschmolzen.
13·7	*R*	— 7	— 7	— 7	geschmolzen.
12·3	*R*	+ 4	+ 4	+ 4	sublimirt.
12·9	*R*	0	0	0	(12·4 *NP*) geschmolzen.
12·8	*K*				
12·0	*R*	+ 7	+ 7	+ 7	geschmolzen.
12·5	*R*	+ 1	+ 1	+ 1	(12·1 *NP*) geschmolzen u. Steinsalz.
12·8	*K*				
13·5	*K*	— 6	— 6	— 6	geschmolzen.
13·9	*R*	— 8	— 8	— 8	„
13·5	*R*	— 6	— 6	— 6	„
14·3	*R*	— 12	— 12	— 12	„ (unrein).
14·5	*R*	— 13	— 13	— 13	„
13·1	*R*	— 2	— 2	— 2	„
12·9	*R*	— 1	— 1	— 1	pulverig.
13·6	*R*	— 6	— 6	— 6	geschmolzen.
13·0	*R*	— 2	— 2	— 2	„
20·0	*K*	+ 2	+ 8	+ 10	(20·9 *NP*) krystallisirt.
18·6	*R*	+ 3	+ 3	+ 3	geschmolzen.
18·8	*K*				
18·2	*R*	+ 5	+ 5	+ 5	„
18·7	*R*	+ 3	+ 3	+ 3	(17·3 *K*) sublimirt (krystallisirt).
18·5	*R*	+ 4	+ 4	+ 4	(18·2 *K*) geschmolzen.
18·0	*R*	+ 7	+ 7	+ 7	geschmolzen.
18·5	*R*	+ 4	+ 4	+ 4	(19·2 *NP*) geschmolzen.
19·2	*R*	0	0	0	geschmolzen.
19·0	*R*	+ 1	+ 1	+ 1	„
18·6	*R*	+ 3	+ 3	+ 3	„
19·6	*R*	— 2	— 2	— 2	„
19·1	*R*	+ 1	+ 1	+ 1	„
19·7	*R*	— 3	— 3	— 3	
16·8	*R*	— 9	— 3	— 1	Flussspath.
16·2	*KN*	+ 2	+ 9	+ 11	Kryolith.
50·1	*K*				

Formel	q	n_1	n_2	w_1	w_2	w_3
$Zn\,K_2\,Cl_4$	285·4	42	56	44·8	44·8	44·8
$Pt\,K_2\,Cl_6$	488·6	54	72	57·6	57·6	57·6
$Sn\,K_2\,Cl_6$	409·2	54	72	57·6	57·6	57·6
$Cr_2\,Cl_6$	317·4	48	64	51·2	51·2	51·2
$Ba\,Cl_2 + 2\,H_2\,O$	244	34	46	36·9	36·8	36·4
$Ca\,Cl_2 + 6\,H_2\,O$	219	66	90	70·4	72·0	70·8
					0 x	y ·
$Cu_2\,O$	142·8	16	21	17·1	16·8	16·8
$H_2\,O$	18	8	11	8·5	8·8	8·6
$Cu\,O$	79·4	10	13	10·7	10·4	10·4
$Hg\,O$	216	„	„	„	„	„
$Mg\,O$	40	„	„	„	„	„
$Mn\,O$	71	„	„	„	„	„
$Ni\,O$	74·8	„	„	„	„	„
$Pb\,O$	223	„	„	„	„	„
$Zn\,O$	81·2	„	„	„	„	„
$Mn\,O_2$	87	14	18	14·9	14·4	14·4
$Sn\,O_2$	150	„	„	„	„	„
$Ti\,O_2$	82	„	„	„	„	„
$B_2\,O_3$	69·8	16	21	17·1	16·8	17 4
$Mo\,O_3$	144	18	23	19·2	18·4	18·4
$W\,O_3$	232	18	23	19·2	18·4	18·4
$Mg\,O + H_2\,O$	58	18	24	19·2	19·2	19·0
$Mn_2\,O_3 + H_2\,O$	176	32	42	34·1	33·6	33·4
$Al_2\,O_3$	102·8	24	31	25·6	24·8	24·8
$As_2\,O_3$	198	„	„	„	„	„
$Bi_2\,O_3$	468	„	„	„	„	„
$Cr_2\,O_3$	152·4	„	„	„	„	„
$Fe_2\,O_3$	160	„	„	„	„	„
$\frac{1}{4}\,(Fe_5\,Ti_3)\,O_3$	155·5	„	„	„	„	„
$Sb_2\,O_3$	292	„	„	„	„	„

beobachtet	von	Procentualer Fehler			Anmerkung
		Δw_1	Δw_2	Δw_3	
43·4	*K*	+ 3	+ 3	+ 3	krystallisirt.
55·2	*K*	+ 4	+ 4	+ 4	„
54·4	*K*	+ 6	+ 6	+ 6	„
45·4	*K*	+ 13	+ 13	+ 13	„
41·7	*K*	— 11	— 12	— 13	„
75·6	*Pr*	— 7	— 5	— 6	zwischen — 21 und 0°.
d e.					
15·9	*K*	+ 8	+ 6	+ 6	(15·3 *N*) Rothkupfererz.
8·5	*R*	0	+ 3	0	Eis zwischen — 78 bis 0.
8·6	*Pr*				
11·3	*R*				
10·9	*N*	— 1	— 4	— 4	
10·2	*K*				
11·2	*R*				
10·6	*N*	— 4	— 6	— 7	krystallinisches u. künstliches.
11·4	*K*				
9·8	*R*	+ 3	0	0	
11·0	*N*				
11·1	*R*	— 4	— 6	— 6	
11·9	*R*	— 10	— 13	— 13	stark geglüht.
11·4	*R*	— 6	— 9	— 9	(12·3 *K*) geschmolzen u. kryst.
10·1	*R*	+ 3	0	0	
10·7	*N*				
13·8	*K*	+ 8	+ 4	+ 4	Pyrolusit.
14·0	*R*	+ 6	+ 3	+ 3	(14·0 *N*, 13·4 *K*) Zinnstein.
14·1	*R*	+ 6	+ 2	+ 2	(14·1 *N*, 13·0 *K*) Rutil.
16·6	*R*	+ 3	+ 1	+ 5	geschmolzen.
19·1	*R*	+ 1	— 4	— 4	„
18·5	*R*	+ 4	— 1	— 1	pulverig (20·7 ? *K*).
18·1	*K*	+ 6	+ 6	+ 6	Brucit.
31·0	*K*	+ 10	+ 8	+ 8	Manganit.
22·3	*R*	+ 15	+ 10	+ 11	(20·3 *N*) Sapphir.
25·3	*R*	+ 1	— 2	— 2	undurchsichtig.
28·3	*R*	— 9	— 12	— 12	
27·4	*R*	— 7	— 9	— 9	(29·9 *N*, 27·0 *K* kryst.).
26·7	*R*	— 4	— 7	— 7	(26·9 *R*, 27·1 *N*. 25·1 *K*) Eisenglanz.
27·4	*N*, *K*	— 7	— 9	— 9	Iserin.
26·3	*R*	— 3	— 6	— 6	(27·1 *NP*) geschmolzen.

Formel	q	n_1	n_2	w_1	w_2	w_3
$Sb_2 O_4$	308	28	36	29·9	28·8	28·8
$Fe_3 O_4$	232	34	44	36·3	35·2	35·2
$Mg Al_2 O_4$	142·8	34	44	„	„	„
$\frac{1}{3}$ $(Mg Fe Cr_3 Al) O_4$ . .	196	34	44	„	„	„
				Kohlensaure		
$K_2 C O_3$	138·2	26	33	27·7	26·4	26·6
$Na_2 C O_3$	106	„	„	„	„	„
$Rb_2 C O_3$	230·8	„	„	„	„	„
$Ba C O_3$	197	20	25	21·3	20·0	20·2
$Ca C O_3$	100	„	„	„	„	„
$\frac{1}{3}$ $(Ca Mg) C O_3$	92	„	„	„	„	„
$Fe C O_3$	116	„	„	„	„	„
$\frac{1}{11}$ $(Fe_8 Mn_2 Mg) C O_3$ . .	112·9	„	„	„	„	„
$\frac{1}{9}$ $(Mg_7 Fe_2) C O_3$	91·1	„	„	„	„	„
$Pb C O_3$	267	„	„	„	„	„
$Sr C O_3$	147·6	„	„	„	„	„
				Silicium-Ver-		
$Si O_2$	60	10	13	10·7	10·4	11·8
$\frac{1}{3}$ $(Si Zr) O_2$	90·8	12	15·5	12·8	12·4	13·1
$Ca Si O_3$	116	20	26	21·3	20·8	22·2
$\frac{1}{3}$ $(Ca Mg) Si O_3$	108	20	26	21·3	20·8	22·2
$\frac{1}{11}$ $(Mg_{20} Fe_2) Si O_4$ . .	145·8	30	39	32·2	31·2	32·6
$Al_2 K_2 Si_6 O_{16}$	557	100	130	106·7	104·0	112·4
$Al_2 Na_2 Si_6 O_{16}$	524·8	„	„	„	„	„

beobachtet	von	Procentualer Fehler			Anmerkung
		Δw_1	Δw_2	Δw_3	
29·4	*R*	+ 2	— 2	— 2	Sieh Gehler's phys. Wörterb. 1841, 10. Bd.
38·9	*R*				
38·1	*N*	— 4	— 7	— 7	Magneteisenstein.
36·2	*K*				
27·7	*K*	+ 31	+ 27	+ 27	Spinell.
31·2	*K*	+ 16	+ 12	+ 12	Chromeisenstein.

Salze.

29·9	*R*				
28·5	*K*	— 5	— 10	— 10	(28·3 *N P*) geschmolzen.
28·9	*R*				
26·1	*K*	+ 1	— 4	— 3	geschmolzen.
28·4	*K*	— 2	— 7	— 6	„
21·7	*R*				
21·2	*N*	+ 1	— 7	— 6	Witherit.
20·9	*R*	+ 2	— 4	— 3	Kalkspath u. Arragonit.
20·0	*R*	+ 7	0	+ 1	(19·9 *N*, 19·0 *K*) Bitterspath.
22·4	*R*				
21·1	*N*	— 2	— 8	— 7	Eisenspath (unrein).
18·7	*K*	+ 14	+ 7	+ 8	Eisenspath.
20·7	*N*	+ 3	— 3	— 2	Magnesitspath.
21·7	*N*				
21·1	*K*	0	— 7	— 6	Weissbleierz.
21·4	*R*				
21·3	*N*	0	— 6	— 5	Strontianit.

bindungen.

11·2	*K*				
11·3	*N*	— 6	— 8	+ 4	Quarz.
11·5	*R*				
12·0	*K*				
13·2	*R*	+ 2	— 2	+ 4	Zirkon.
20·6	*N*				
20·7	*K*	+ 3	+ 1	+ 7	Wollastonit.
20·6	*N*				
20·1	*K*	+ 5	+ 2	+ 9	Diopsid.
30·0	*N*	+ 7	+ 4	+ 9	(27·6 *K*) Olivin, Chrysolith.
106·4	*N*	0	— 2	+ 6	(101·9 *K*) Adular, Orthoklas.
102·9	*N*	— 1	+ 1	+ 9	(99·7 *K*) Albit.

Formel	q	n_1	n_2	w_1	w_2	w_3
						Borsäure und
$B_2 O_3$	69·8	16	21	17·1	16·8	17·4
$K B O_2$	82	16	21	17·1	16·8	17·1
$Na B O_2$	65·9	„	„	„	„	„
$Pb B_2 O_4$	292·8	26	34	27·7	27·2	27·8
$Pb B_4 O_7$	362·6	42	55	44·8	44·0	45·2
$K_2 B_4 O_7$	233·8	48	63	51·2	50·4	51·6
$Na_2 B_4 O_7$	201·6	„	„	„	„	„
$Na_2 B_4 O_7 + 10 H_2 O$ . .	381·6	128	173	136·5	138·4	137·6
						Cr Mo und W
$Pb Mo O_4$	367	28	36	29·9	28·8	28·8
$Ca W O_4$	288	„	„	„	„	„
$\frac{1}{3} (Fe_2 Mn_3) W O_4$ . . .	303·4	„	„	„	„	„
$Pb Cr O_4$	323·4	„	„	„	„	„
$K_2 Cr O_4$	194·4	34	44	36·3	35·2	35·2
$K_2 Cr_2 O_7$	294·6	52	67	55·5	53·6	53·6
						Schwefelsaure und unter-
$K_2 S O_4$	174·2	33	43	35·2	34·4	34·2
$Na_2 S O_4$	142	„	„	„	„	„
$Ba S O_4$	233	27	35	28·8	28·0	27·8
$Ca S O_4$	136	„	„	„	„	„
$Cu S O_4$	159·4	„	„	„	„	„
$Mg S O_4$	120	„	„	„	„	„
$Mn S O_4$	151	„	„	„	„	„
$Pb S O_4$	303	„	„	„	„	„
$Sr S O_4$	183·6	„	„	„	„	„
$Zn S O_4$	161·2	„	„	„	„	„
$Na_2 S_2 O_3$	158	34	45	36·3	36·0	35·6

beobachtet	von	Procentualer Fehler			Anmerkung
		Δw_1	Δw_2	Δw_3	
borsaure Salze.					
16·6	*R*	+ 3	+ 1	+ 5	(16·3 *N P*) geschmolzen.
16·7	*R*	+ 2	+ 1	+ 2	geschmolzen.
17·0	*R*	+ 1	— 1	+ 1	(15·6 *N P*) geschmolzen.
26·5	*R*	+ 4	+ 3	+ 5	geschmolzen.
41·4	*R*	+ 8	+ 6	+ 9	„
51·4	*R*	0	— 2	0	„
48·0	*R*	+ 7	+ 5	+ 7	(46·2 *K*) geschmolzen.
146·9	*K*	— 7	— 6	— 6	Krystallisirter Borax.
saure Salze.					
30·4	*K*	— 2	— 5	— 5	Gelbbleierz.
27·9	*K*	+ 7	+ 3	+ 3	Scheelit.
29·7	*R*	+ 3	— 1	— 1	Wolfram.
28·2	*K*				
29·0	*K*	+ 3	— 1	— 1	geschmolzen.
36·0	*R*	0	— 3	— 3	(35·8 *N P*) krystallisirt.
36·7	*K*				
55·8	*R*	0	— 3	— 3	(54·7 *N P*) „
54·8	*R*				
schwefelsaure Salze.					
33·1	*R*	+ 5	+ 2	+ 2	(32·4 *N P*) geschmolzen, krystallisirt.
34·1	*K*				
32·8	*R*	+ 8	+ 6	+ 5	(32·4 *N P*) „ „
32·2	*K*				
26·3	*R*	+ 9	+ 6	+ 6	(25·4 *N*, 25·2 *K*) Schwerspath.
26·7	*R*	+ 8	+ 5	+ 4	(25·2 *N*, 24·2 *K*, Anhydrit).
29·3	*P*	— 2	— 4	— 5	feste Stücke.
26·6	*R*	+ 7	+ 4	+ 4	(26·0 *N P*) feste Stücke.
27·0	*P*				
27·5	*P*	+ 5	+ 2	+ 1	feste Stücke.
26·4	*R*	+ 9	+ 6	+ 5	(25·7 *N*, 25·1 *K*, Bleivitriol).
26·2	*R*	+ 10	+ 7	+ 6	(24·9 *N*, 24·8 *K*, Cölestin).
28·0	*P*	+ 3	0	— 1	grobpulverig.
34·9	*P*	+ 4	+ 3	+ 2	feste Stücke.

Formel	y	n_1	n_2	w_1	w_2	w_3
$K_2 S_2 O_8$	190·2	34	45	36·3	36·0	35·6
$K H S O_4$	136·1	29	38	30·9	30·4	30·1
$N_2 H_8 S O_4$	132	47	65	50·1	52·0	52·6
$Cu S O_4 + H_2 O$	177·4	35	46	37·3	36·8	36·4
$Mg S O_4 + H_2 O$	138	„	„	„	„	„
$Zn S O_4 + H_2 O$.	179·2	„	„	„	„	„
$Ca S O_4 + 2 H_2 O$. . . .	172	43	57	45·9	45·6	45·0
$Cu S O_4 + 2 H_2 O$. . . .	195·4	„	„	„	„	„
$Zn S O_4 + 2 H_2 O$	197·2	„	„	„	„	„
$Fe S O_4 + 3 H_2 O$ . . .	206	51	68	54·4	54·4	53·6
$Cu S O_4 + 5 H_2 O$	249·4	67	90	71·5	72·0	70·8
$Mn S O_4 + 5 H_2 O$. . . .	241	„	„	„	„	„
$Ni S O_4 + 6 H_2 O$	262·8	75	101	80·0	80·8	79·4
$Co S O_4 + 7 H_2 O$	280·8	83	112	88·5	89·6	88·0
$Fe S O_4 + 7 H_2 O$	278	„	„	„	„	„
$Mg S O_4 + 7 H_2 O$ . . .	246	„	„	„	„	„
$Zn S O_4 + 7 H_2 O$	287·2	„	„	„	„	„
$Mg K_2 S_2 O_8 + 6 H_2 O$ . .	402·2	108	144	115·2	115·2	113·6
$Ni K_2 S_2 O_8 + 6 H_2 O$ . .	437	„	„	„	„	„
$Zn K_2 S_2 O_8 + 6 H_2 O$ . .	443·4	„	„	„	„	„
$Al_2 K_2 S_4 O_{16} + 24 H_2 O$.	949	300	404	320	323·2	317·6
$Cr_2 K_2 S_4 O_{16} + 24 H_2 O$.	998·6	„	„	„	„	„
	As, P, Cl und Mn					
$K As O_2$	162·1	24	31	25·6	24·8	24·8
$K H_2 As O_4$.	180·1	32	42	34·1	33·6	33·4
$Pb_3 As_2 O_8$.	899	62	80	66·1	64·0	64·0
$Ag_3 P O_4$	419	37	49	39·5	39·2	40·6
$K H_2 P O_4$	136·1	29	39	30·9	31·2	32·4
$Pb_3 P_2 O_8$	811	56	74	59·7	59·2	62·0
$K_4 P_2 O_7$	330·4	58	77	61·9	61·6	64·4
$Na_4 P_2 O_7$	266	„	„	„	„	„
$Pb_2 P_2 O_7$	588	46	61	49·1	48·8	51·6
$Na P O_3$	102	21	28	22·4	22·4	23·8
$Ca P_2 O_6$	198	36	48	38·4	38·4	41·2
$Na_2 H P O_4 + 12 H_2 O$ . .	358	129	176	137·6	140·8	139·7

beobachtet	von	Procentualer Fehler			Anmerkung
		Δw_1	Δw_2	Δw_3	
37·5	*P*	— 3	— 4	— 5	feste Stücke.
33·2	*K*	— 7	— 8	— 9	krystallisirt.
46·2	*K*	+ 8	+ 13	+ 14	„
35·8	*P*	+ 4	+ 3	+ 2	pulverförmig.
36·4	*P*	+ 2	+ 1	0	grobpulverig.
36·2	*P*	+ 3	+ 2	0	feste Stücke.
44·6	*K*	0	0	— 1	Gyps.
46·9	*N*				
41·4	*P*	+ 11	+ 10	+ 9	pulverförmig.
44·2	*P*	+ 4	+ 3	+ 2	feste Stücke.
50·9	*P*	+ 7	+ 7	+ 5	„ „
71·1	*K*	+ 1	+ 1	0	(78·8 *P*) krystallisirt.
77·8	*K*	— 8	— 7	— 9	(81·5 *P*) „
82·3	*K*	— 3	— 2	— 4	krystallisirt.
96·4	*K*	— 8	— 7	— 9	„
96·2	*K*	— 8	— 7	— 9	(99·0 *P*) krystallisirt.
89·1	*K*	— 1	+ 1	— 1	(100·1 *P*) „
94·2	*P*	— 6	— 5	— 7	(99·7 *K*) „
106·2	*K*	+ 9	+ 9	+ 7	krystallisirt.
107·1	*K*	+ 8	+ 8	+ 6	„
119·7	*K*	— 4	— 4	— 5	„
352·1	*K*	— 9	— 8	— 10	krystallisirter Alaun.
323·6	*K*	— 1	0	— 2	Chromalaun.
saure Salze.					
25·3	*R*	+ 1	— 2	— 2	geschmolzen.
31·5	*K*	+ 8	+ 7	+ 6	krystallisirt.
65·4	*R*	+ 1	— 2	— 2	geschmolzen.
37·5 ?	*K*	+ 5	+ 5	+ 8	pulverförmig.
28·3	*K*	+ 9	+ 10	+ 14	krystallisirt.
64·7	*R*	— 8	— 9	— 4	
63·1	*R*	— 2	— 2	+ 2	geschmolzen.
60·7	*R*	+ 2	+ 1	+ 6	„
48·3	*R*	+ 2	+ 1	+ 7	„
22·1	*K*	+ 1	+ 1	+ 7	„
39·4	*R*	— 3	— 3	+ 4	„
146·1	*Pr*	— 6	— 4	— 4	zwischen — 21 und 2°

Formel	q	n_1	n_2	w_1	w_2	w_3
$KClO_3$	122·6	24	31	25·6	24·8	24·8
$KClO_4$	138·6	28	36	29·9	28·8	28·8
$KMnO_4$	158·1	„	„	„	„	„
$BaCl_2O_6 + H_2O$	322	50	65	53·4	52·0	51·8
						Salpeter-
$AgNO_3$	170	23	30	24·5	24	24·8
KNO_3	101·1	„	„	„	„	„
$\frac{1}{2}(KNa)NO_3$	93	„	„	„	„	„
$NaNO_3$	85	„	„	„	„	„
$N_2H_4O_3$	80	30	41	32	32·8	34
BaN_2O_6	261	40	52	42·6	41·6	43·2
PbN_2O_6	331	„	„	„	„	„
SrN_2O_6	211·6	„	„	„	„	„
						Organische
HgC_2N_2	252	20	26	21·3	20·8	22·8
$ZnK_2C_4N_4$	247·4	46	60	49·1	48·0	52·0
$FeK_3C_6N_6$	329·3	66	86	70·4	68·8	74·8
C_2Cl_6	237	40	52	42·7	41·6	42·0
$C_{10}H_8$	128	36	44	38·4	35·2	36·4
$C_{27}H_{54}O_2$	410	170	226	181·3	180·8	180·8
$C_{46}H_{92}O_2$	676	284	378	303·0	302·4	302·4
$C_{12}H_{22}O_{11}$	342	112	145	119·5	116·0	116·2
$C_6H_{14}O_6$	182	64	84	68·3	67·2	67·0
$C_4H_6O_4$	118	36	46	38·4	36·8	37·0
$C_5H_6O_6$	150	44	56	46·9	44·8	45·0
$C_2H_2BaO_4$	227	30	38	32	30·4	30·6
$C_4H_5KO_6$	188·1	48	61	51·2	48·8	49·1
$C_4H_6O_6 + H_2O$	168	52	67	55·5	53·6	53·6
$C_2K_2O_4 + H_2O$	184·2	40	51	42·7	40·8	41·0
$C_4H_5KO_6 + 2H_2O$	254·1	68	87	72·5	69·6	69·7
$FeK_4C_6N_6 + 3H_2O$	422·4	96	127	102·4	101·6	107·0
$C_4H_4NaKO_6 + 4H_2O$	282·1	84	110	89·6	88·0	87·6
$C_8H_{10}CaO_{10} + 8H_2O$	450	146	192	155·7	153·6	152·6

beobachtet	von	Procentualer Fehler Δw_1	Δw_2	Δw_3	Anmerkung
25·7 / 23·8	*R* / *K*	+ 3	0	0	geschmolzen, krystallisirt.
26·3	*K*	+ 14	+ 9	+ 10	krystallisirt.
28·3	*K*	+ 6	+ 2	+ 2	„
50·6	*K*	+ 6	+ 3	+ 2	„
saure Salze.					
24·4	*R*	0	— 2	+ 2	(23·7 *NP*) geschmolzen.
24·1	*R*	+ 2	0	+ 3	(22·9 *K*, 23·7 *NP*) geschmolzen.
21·9	*Pr*	+ 12	+ 10	+ 13	geschmolzen.
23·6	*R*	+ 4	+ 2	+ 5	(21·8 *K*, 23·3 *NP*) geschm. od. kryst.
36·4	*K*	— 12	— 10	— 7	krystallisirt.
39·8	*R*	+ 7	+ 5	+ 9	(37·9 *K*, 38·9 *NP*) geschm. od. krystall.
36·4	*K*	+ 17	+ 14	+ 19	(38·8 *NP*) geschmolzen od. krystallisirt.
38·3	*K*	+ 11	+ 9	+ 13	krystallisirt.
Verbindungen.					
25·2	*K*	— 15	— 15	— 10	Cyanquecksilber kryst.
59·6	*K*	— 18	— 20	— 13	Cyanzinkkalium kryst.
76·7	*K*	— 8	— 10	— 2	Ferridcyankalium.
42·2	*K*	+ 1	— 1	0	zwischen 18 u. 37°
39·6	*A*	— 3	— 11	— 8	Naphtalin.
175·8	*Pr*	+ 3	+ 3	+ 3	Cerotinsäure } Bienenwachs.
289·8	*Pr*	+ 5	+ 4	+ 4	palmitins. Melissyl } Bienenwachs.
117·0	*K*	+ 2	— 1	— 1	(102·9 *K*) Rohrzucker.
59·1	*K*	+ 16	+ 14	+ 13	Mannit.
36·9	*K*	+ 4	0	0	Bernsteinsäure.
43·2	*K*	+ 9	+ 4	+ 4	Weinsäure.
32·5	*K*	— 1	— 7	— 6	ameisensaurer Baryt.
48·3	*K*	+ 6	+ 1	+ 2	saures weins. Kali.
53·6	*K*	+ 4	0	0	Traubensäure.
43·5	*K*	— 2	— 6	— 6	neutr. oxals. Kali.
71·9	*K*	+ 1	— 3	— 3	s. g. 4fach oxals. Kali.
118·3	*K*	— 14	— 14	— 10	Ferrocyankalium kryst.
92·5	*K*	— 3	— 5	— 5	Seignette-Salz.
152·1	*K*	+ 2	+ 1	0	saurer äpfels. Kalk

Das Ergebniss dieser Zusammenstellung ist folgendes:

Die nach der Formel $w = \frac{32}{30} n$ berechneten Atomwärmen w_1 zeigen im Vergleich mit den beobachteten Werthen die nachstehenden Fehler:

0%	bei 14 Verbindungen			
bis 5%	„ 65	„	zusammen +	175
bis — 5%	„ 42	„	„ —	111
über 5 bis 10%	„ 33	„	„ +	251
über — 5 bis — 10%	„ 26	„	„ —	190
über 10%	„ 11	„	„ +	170
über — 10%	„ 11	„	„ —	166

202 Verbindungen { Algebraische Summe + 129; Arithmetische Summe 1063.

Durchschnittlicher Fehler $\frac{1063}{202} = \pm 5 \cdot 26$ Procent.

Dessgleichen mit Ausserachtlassung der über ± 10 % betragenden Fehler, welche höchst wahrscheinlich auf unrichtiger Beobachtung beruhen $\frac{727}{180} = 4 \cdot 04$ %.

Die nach der Formel $w = 0 \cdot 8\ n$ berechneten Werthe w_2 zeigen folgende Fehler:

0%	bei 15 Verbindungen			
bis 5%	„ 58	„	zusammen +	150
bis — 5%	„ 52	„	„ —	146
über 5 bis 10%	„ 25	„	„ +	190
über — 5 bis — 10%	„ 31	„	„ —	230
über 10%	„ 8	„	„ +	115
über — 10%	„ 13	„	„ —	189

202 Verbindungen { Algebraische Summe — 100; Arithmetische Summe 1020

Durchschnittlicher Fehler $\frac{1020}{202} = \pm 5 \cdot 05$ % und bei Ausserachtlassung der über ± 10 % betragenden Fehler nur $\frac{716}{181} = \pm 3 \cdot 96$ %.

Die von Kopp berechneten Atomwärmen w_3 zeigen im Vergleich mit den beobachteten Werthen die Fehler:

0%	bei 17	Verbindungen		
bis 5%	„ 50	„	zusammen +	153
bis — 5%	„ 51	„	„ —	137
über 5 bis 10% . .	„ 29	„	„ +	218
über — 5 bis — 10%	„ 34	„	„ —	252
über 10%	„ 11	„	„ +	160
über — 10% . . .	„ 10	„	„ —	146

202 Verbindungen { Algebraische Summe — 4 / Arithmetische Summe · 1066

Durchschnittlicher Fehler $\frac{1066}{202} = \pm 5{\cdot}28\,\%$ und bei Ausseracht-lassung der über $\pm$ 10 % betragenden Fehler $\frac{760}{181} = \pm 4{\cdot}20\,\%$.

Die Werthe w_1 stimmen demnach eben so gut, und die Werthe w_2 noch besser mit den beobachteten Werthen überein, als die Kopp'schen Werthe w_3.

An dem grösseren Betrag der algebraischen Summe der Fehler von w_1 und w_2 darf man keinen Anstoss nehmen, denn erhöht man in der Formel $w_2 = 0{\cdot}8\,n$ den Coëfficienten 0·8 auf 0·81, so ergeben sich die Fehler in folgender Weise:

0%	bei 6	Verbindungen		
bis 5%	„ 68	„	zusammen +	175
bis — 5%	„ 52	„	„ —	142
über 5 bis 10% . .	„ 31	„	„ +	233
über — 5 bis — 10%	„ 23	„	„ —	175
über 10%	„ 13	„	„ +	184
über — 10% . . .	„ 9	„	„ —	127

202 Verbindungen { Algebraische Summe + 148 / Arithmetische Summe 1036

Die algebraische Fehlersumme ist also dadurch von — 110 in + 148 übergegangen, und würde folglich = Null werden, wenn man den Coëfficienten $a = 0{\cdot}804$ annehmen würde. Allein so lange nicht durch wiederholte Beobachtungen alle $\pm$ 10 % überschreitenden Fehler beseitigt sind, ist es wohl nicht an der Zeit, in dem Werth von a eine dritte Decimalstelle bestimmen zu wollen.

Die Formel $w = 0{\cdot}8\,n$ mit den Seite 421 angegebenen Werthen der Charakteristiken n stellt also die beobachteten Atomwärmen so genau dar, als es vorläufig möglich ist, und es steht zu erwarten, dass nach Wiederholung der stärker abweichenden Beobachtungen sich der durchschnittliche Fehler von $\pm$ 5 auf $\pm$ 4 % reduciren werde.

Eine grössere Genauigkeit wird nicht zu erwarten sein, weil selbst bei Verbindungen, welche dasselbe Element als elektronegativen Bestandtheil enthalten, und ähnliche atomistische Constitution besitzen, die beobachteten Atomwärmen mitunter bis 10 % differiren, — Unterschiede, welche mehr in der Schwierigkeit alle Fehlerquellen zu vermeiden, als in dem physikalischen Zustand (Temperatur und Dichtigkeit) und in dem Betrag der mit einbezogenen Ausdehnungswärme zu liegen scheinen.

Was die zu $a = 0{\cdot}8$ gehörigen Werthe der Charakteristik n anbelangt, so sind insbesondere die für P, Fl, und N angegebenen Werthe von n noch nicht als verlässlich anzusehen.

Ferner muss noch besonders hervorgehoben werden, dass bei der Annahme $a = 0{\cdot}8$ die Atomwärme von C und H im Verhältniss 2 : 3 steht, während dieselbe bei der Annahme $a = \frac{32}{30}$ für beide Elemente gleich gross ist. Wiederholte Beobachtungen, welche diesen Cardinalpunkt endgültig zu entscheiden im Stande sind, werden erst die Wahl zwischen den Werthen a_1 und a_2 festzustellen vermögen.

Jedenfalls ist es unzweifelhaft, dass es nicht nöthig ist, die Atomwärme der Elemente ohne allen relativen Zusammenhang zu bestimmen, wie es Kopp gethan hat, sondern dass sich diese Atomwärmen jedenfalls als Producte ganzer Zahlen mit einem bestimmten Coëfficienten darstellen lassen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass die endgiltig festgestellten Charakteristiken der Atome für die theoretische Chemie von grossem Interesse sein werden.

Was die einfachen festen Stoffe anbelangt, so zeigen nachfolgende eine ziemliche Übereinstimmung ihrer Atomwärme mit der in den Verbindungen auftretenden Atomwärme 6·4.

Element	q	c Regnault	$w = qc$	w	nach	Anmerkung
Ag	108	0·0570	6·16	6·05	*K*	
As	75	0814	6·11	6·2	*NP*	
Au	197	0324	6·38			
Bi	210	0308	6·47	6 41	*K*	
Br	80	0843	6·74			
Cd	112	0567	6·35	6·07	*K*	
Co	58·8	1067	6·27			
Cu	63·4	0952	6·04	5·90	*K*	
Fe	56	1138	6·37	6·27	*K*	
Hg	200	0319	6·38			
J	127	0541	6·87			
Jr	198	0326	6·45			
K	39·1	1655	6·47			
Li	7	9408	6·59			
Mg	24	2499	6·00	5·88	*K*	
Mn	55	1217	6·69			
Mo	96	0722	6·93			
Na	23	2934	6·75			
Ni	58·8	1092	6·42			
Os	199·2	0311	6·20			
P	31	*) 2020	*) 6·26	5·87	*R*	*) Kopp
Pb	207	0314	6·50	6·52	*K*	
Pd	106·6	0593	6·32			
Pt	197·4	0324	6·40	6·42	*K*	
Rh	104·4	0580	6·06			
Sb	122	0508	6·20	6·38	*K*	
Se	79·4	0762	6·05	6·8	*NP*	
Sn	118	0562	6·63	6·46	*K*	
Te	128	0474	6·07	6·08	*K*	
Tl	204	0336	6·85			
W	184	0334	6·15			
Zn	65·2	0956	6·23	6·08	*K*	

Mittel **6·386.**

Nicht übereinstimmend sind die Atomwärmen folgender Stoffe:

	q	c Regnault	w	Anmerkung
Al	27·4	0·2143	5·87	(5·53 *K*).
B	10·9	2350	2·56	(2·51 und 2·77 *K*).
C	12	2410	2·89	Holzkohle.
		1970	2·36	Hochofengraphit (1·99 *K*).
		1469	1·76	Diamant.
P	31	1895	5·39	gelber, zwischen — 78 und 10°.
		1698	5·26	rother, „ 15 und 98°.
S	32	1776	5·68	rhombischer (5·22 *K*).
Si	28	1730	4·84	krystallisirt (4·62 *K*).
		1655	4·63	geschmolzen (3·86 *K*).

Kopp bemerkt hiezu, dass die Atomgewichte B = 10·9, C = 12 und Si = 28, welche aus der Untersuchung der flüchtigen Bor-, Kohlenstoff- und Silicium-Verbindungen resultiren, nicht gegen andere vertauscht werden können, dass auch der Isomorphismus der Fluordoppelsalze des Zinns und Siliciums ein Beweis dafür sei, dass sich deren Atomgewichte wie 118 : 28 verhalten, und dass es vom chemischen Standpunkt aus unzulässig sei, die Atomgewichte für B, C und Si so anzunehmen, dass die Atomwärmen dem Dulong-Petit'schen Gesetze entsprechen.

Gasförmige Verbindungen.

Für alle permanenten und coerciblen Gase kann der Coëfficient a der Formel (1) mit 0·86, und die Charakteristik n der Elemente wie folgt angenommen werden:

Für H = 1 . . . . . $n = 2$
„ O = 16, C = 12, N = 14, S = 32 . . $n = 4$
„ Br = 80, Cl = 35·5 . . . . . $n = 5$
„ P = 31, Si = 28 . . . . . $n = 6$
„ As = 75, Sn = 118, Ti = 50 . . . . . $n = 8$

Als Beweis hiefür diene die nachfolgende Zusammenstellung, geordnet nach dem Werth von n:

Name und Bezeichnung des Gases		q	c Regnault	$w = qc$	n	w berechnet	Fehler %
Chlorwasserstoff . .	H Cl	36·5	0·1845	6·73	7	6·02	— 11
Kohlenoxydgas . .	C O	28	2479	6·94	8	6·88	— 1
Stickoxyd	N O	30	2315	6·94	„	„	— 1
Wasserdampf . . .	H_2 O	18	4750	8·55	„	„	— 20
Schwefelwasserstoff	H_2 S	34	2423	8·24	„	„	— 16
Ammoniak	N H_3	17	5080	8·64	10	8·60	0
Stickoxydul	N_2 O	44	2238	9·85	12	10·32	+ 5
Schweflige Säure .	S O_2	64	1553	9·94	„	„	+ 4
Kohlensäure . . .	C O_2	44	2164	9·52	„	„	+ 8
Kohlensulfid . . .	C S_2	76	1575	11·97	„	„	— 14
Methylen	C H_4	16	5925	9·48	12	10·32	+ 9
Elayl	C_2 H_4	28	3694	10·34	16	13·76	+ 33
Chloroform	C H Cl_3	119·5	1568	18·74	21	18·06	— 4
Phosphorchlorür . .	P Cl_3	137·5	1346	18·51	21	18·06	— 2
Arsenchlorür . . .	As Cl_3	181·5	1122	20·36	23	19·78	— 3
Aethylchlorür . . .	C_2 H_5 Cl	64·5	2737	17·65	23	19·78	+ 12
Aethylbromür . . .	C_2 H_5 Br	109	1816	19·79	23	19·78	0
Alkohol	C_2 H_6 O	46	4513	20·76	24	20·64	— 1
Kieselchlorid . . .	Si Cl_4	170	1329	22·59	26	22·36	— 1
Äthylcyanür . . .	C_3 H_5 N	55	4255	23·40	26	22·36	— 4
Elaylchlorür . . .	C_2 H_4 Cl_2	99	2293	22·70	26	22·36	— 1
Aceton	C_3 H_6 O	58	4125	23·93	28	24·08	+ 1
Zinnchlorid	Sn Cl_4	260	0939	24·41	„	„	— 1
Titanchlorid . . .	Ti Cl_4	192	1263	24·25	„	„	— 1
Phenylen	C_6 H_6	78	3754	29·28	36	30·96	+ 6
Essigäther	C_4 H_8 O_2	88	4008	35·27	40	34·40	— 2
Aether	C_4 H_{10} O	74	4810	35·59	„	„	— 3
Aethylsulfür . . .	C_4 H_{10} S	90	4005	36·04	„	„	— 5
Terpentinöl	C_{10} H_{16}	136	440 Pape	59·84 (68·83 R)	72	61·92	+ 3

Der Fehler der berechneten Werthe im Vergleich zu den beobachteten beträgt:

0%	bei	2	Verbindungen	
bis 5%	„	4	„	zusammen + 13
bis — 5%	„	14	„	„ — 30
über 5 bis 10% . .	„	3	„	„ + 23
über 10%	„	2	„	„ + 45
über — 10% . . .	„	4	„	„ — 61

29 Verbindungen { Algebraische Summe — 10; Arithmetische Summe 172

Der durchschnittliche Fehler beträgt somit $\frac{172}{29} = \pm 5{\cdot}93$ und bei Ausserachtlassung der über $\pm$ 10 % betragenden Fehler nur $\frac{66}{23} = \pm 2{\cdot}87$ %.

Von einfachen Gasen fügen sich der Regel:

Element		q	c	qc	n	w	%
Sauerstoff	O_2	32	0·2182	6·98	8	6·88	— 1
Stickstoff	N_2	28	2440	6·83	8	6·88	+ 1
Chlor	Cl_2	71	1214	8·62	10	8·60	0

Dagegen fügt sich nicht:

Element		q	c	qc	n	w	%
Wasserstoff. . . .	H_2	2	3·4046	6·81	4	3·44	— 50

Über andere einfache und zusammengesetzte Gase sind dem Verfasser dieser Zeilen keine Beobachtungsresultate der specifischen Wärme bekannt.

Die Formeln der einfachen Gase sind vorstehend gemäss der Volumtheorie so geschrieben, dass das Gas-Molecül gleiches Volumen mit NH_3 oder HCl besitzt, doch ändert sich der berechnete Werth von $c = \frac{w}{q} = \frac{0{\cdot}86\,n}{q}$ natürlich nicht, wenn man obige Formeln halbirt, somit auch n und q halb so gross nimmt.

Die Wärme, welche man der Gewichtseinheit eines festen Körpers mittheilen muss, wenn er bei constantem Druck um 1° erwärmt wird, also die specifische Wärme, besteht bekanntlich aus 3 Theilen: 1. aus der Vermehrung der im Körper wirklich vorhandenen Wärme, oder der rationellen Wärmecapacität, 2. aus der zu innerer Arbeit verbrauchten Wärme, und 3. aus der zu äusserer Arbeit verbrauchten Wärme.

Bei gasförmigen Körpern ist aber die gegenseitige Anziehung der Theilchen, welche im Innern der festen und tropfbar flüssigen Körper wirkt, bereits aufgehoben [1]), — die innere Arbeit gleich Null, und es besteht demnach die Wärmecapacität der Gase bei constantem Druck nur aus der rationellen Wärmecapacität und aus der Wärmemenge, welche verbraucht wird, um bei der Temperaturerhöhung um 1° die mit der Ausdehnung der Gewichtseinheit verbundene äussere Arbeit zu verrichten. Ist diese äussere Arbeit $= R$ und A das Wärmeäquivalent für die Einheit der Arbeit, so ist demnach die Differenz der beiden Wärmecapacitäten der Gase $= AR$.

Clausius bezeichnet in seinen „Abhandlungen“ die rationelle Wärmecapacität mit c, und die Wärmecapacität bei constantem Druck mit c'. Redtenbacher bedient sich der Zeichen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$, welche vorzuziehen sind, weil der Buchstabe c für Bezeichnung einer Geschwindigkeit erwünscht ist, nachdem man in der mechanischen Wärmetheorie mit v und u Volumen zu bezeichnen pflegt.

Wir haben somit die Gleichung:

$$\mathfrak{C}' - \mathfrak{C} = AR \qquad (2)\,[2]).$$

Ist p die constant bleibende Spannung, v das Gewichtseinheits-Volumen und $T = 273 + t$ die absolute Temperatur des Gases, welches um 1° erwärmt wird, und sich dabei von v auf v' ausdehnt, so ist nach dem Gay-Lussac'schen Gesetz:

---

[1]) Clausius „Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie“. Braunschweig 1864. Seite 42.

[2]) „Abhandlungen“ Seite 44.

$$\frac{v'}{v} = \frac{T+1}{T} = 1 + \frac{1}{T}$$

$$v' - v = \frac{v}{T}$$

und die nach aussen abgegebene Arbeit:

$$(3) \qquad R = p\,(v' - v) = \frac{pv}{T}$$

Nach dem Gay-Lussac und Mariotte'schen (G. u. M.) Gesetz ist aber für ein bestimmtes Gas $\frac{pv}{T}$ eine Constante, folglich bedeutet die Constante des G. u. M. Gesetzes nichts anderes, als die äussere Arbeit, welche bei der Ausdehnung der Gewichtseinheit und bei der Temperaturerhöhung *um 1°* verrichtet wird, und welche in Formel (2) mit R bezeichnet wurde.

AR ist die zu dieser Arbeit verbrauchte Wärmemenge, und

$$q\,(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = q\,AR$$

ist die für ein Molecül (zusammengesetztes Atom von dem Volumen von NH_3 oder HCl) verbrauchte Wärmemenge, und diese beträgt, vorausgesetzt, dass sich Wärmemenge und Molecülgewicht auf gleiche Gewichtseinheit beziehen, geradezu zwei Wärmeeinheiten:

$$(4)^1) \qquad q\,(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = 2$$

Diese von mir aufgestellte empirische Regel, welche ich in der Voraussetzung, dass ihr ein innerer, bisher noch nicht erkannter Grund zukommen werde, den Satz über die äussere Arbeit genannt habe, dient in einfachster Weise dazu, die rationelle Molecülwärme aus jener für constantem Druck zu berechnen, indem man hat:

$$(5) \qquad q\,\mathfrak{C} = q\,\mathfrak{C}' - 2$$

Die Richtigkeit dieser Regel wird erwiesen sein, wenn es als zulässig erkannt worden ist, die Gleichung

$$q \,.\, AR = 2$$

---

[1]) Aus oben citirtem „Beitrag zur Mechanik der Gase". Gleichung (38).

anzusetzen, welche wegen

$$R = \frac{pv}{T}$$

das G. u. M. Gesetz in der neuen Form ausdrückt:

$$\frac{pv}{T} = \frac{2}{Aq} = \frac{2k}{q} \qquad (6)\ ^{1})$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung erhellt aber folgender Massen:

Es ist zunächst $\sigma = \frac{1}{v}$ das Gewicht der Volums-Einheit, und dieses Gewicht wieder gleich dem Gewicht λ der Volums-Einheit atmosphärischer Luft von gleicher Spannung und Temperatur, multiplicirt mit der relativen Dichte δ, welche man früher gewöhnlich „specifisches Gewicht des Gases" genannt hat, also:

$$\sigma = \frac{1}{v} = \delta\lambda \qquad (7)$$

somit:

$$R = \frac{pv}{T} = \frac{p}{\sigma T} = \frac{p}{\delta\lambda T} = \frac{1}{\delta}\frac{p}{\lambda T}$$

Nun ist aber

$$\frac{p}{\lambda T} = C \qquad (8)$$

die Constante des G. u. M. Gesetzes für atmosphärische Luft, also

$$R = \frac{C}{\delta} \qquad (9)$$

Ferner ist nach der chemischen Volumtheorie das Atom-Volumen qv oder $\frac{q}{\delta\lambda}$ für alle Gase von gleicher Spannung und Temperatur bei hinreichender Entfernung vom Condensationspunkt gleich gross, also für einen bestimmten Werth von λ der Quotient $\frac{q}{\delta}$ unabhängig von der Natur des Gases, oder

$$\delta = mq \qquad (10)$$

Demnach wird zufolge (9)

$$R = \frac{C}{mq} \qquad (11)$$

---

1) Aus oben citirtem „Beitrag zur Mechanik der Gase" Gleichung (43), wobei $k = \frac{1}{A}$ das mechanische Wärme-Äquivalent bedeutet.

Statt C kann man seinen Werth aus (8) setzen, der sich für 0° und atmosphärische Spannung ergibt. Bei 0° ist nämlich die absolute Temperatur $T_0 = 273$, genauer $= \frac{1}{a}$, wenn $a = 0{\cdot}003665$ den Ausdehnungscoëfficienten bezeichnet, die atmosphärische Spannung beträgt 76^{cm} Quekksilber oder $p_0 = 10334^k$ pr $\square^m$, und das specifische Gewicht der Luft bei 0° und einer Atmosphäre ist $\lambda_0 = 1{\cdot}29366$ Kilogramm pr. Cubik-Meter [1]), also ist

$$C = \frac{p_0}{\lambda_0 T_0} = \frac{p_0 a}{\lambda_0} = \frac{10334 \,.\, 0{\cdot}003665}{1{\cdot}29366} = 29{\cdot}277$$

und

$$R = \frac{29{\cdot}277}{mq} \tag{12}$$

Jetzt handelt es sich um die möglichst genaue Bestimmung des Werthes von m. Diese kann auf keine Weise mit grösserer Schärfe geschehen, als durch Berechnung von m aus der bekannten Zusammensetzung der atmosphärischen Luft, von welcher Zusammensetzung ja ganz wesentlich die Werthe der Dichten δ abhängig sind.

Bestehen demnach 100 Volumen Luft aus x Vol. Sauerstoff und y Vol. Stickstoff im Gemenge ohne Verdichtung, so ist $x + y = 100$ und das Gewicht von 100 Vol. Luft $= 100\,\lambda$ gleich mit dem Gewicht der beiden Gemengtheile.

Es ist aber für Sauerstoff $= O_2$ das Molecülgewicht $q_1 = 32$ und für Stickstoff $q_2 = 28$ also sind die relativen Dichten:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= 32\,m \\ \delta_2 &= 28\,m \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

also hat x das Gewicht $\delta_1 \lambda x = 32\,m\lambda x$
und y „ „ $\delta_2 \lambda y = 28\,m\lambda y$

folglich ist:

$$100\,\lambda = 32\,m\lambda x + 28\,m\lambda y \text{ oder}$$
$$(8x + 7y)\,m = 25$$

also wegen
$$y = 100 - x$$
$$(x + 700)\,m = 25$$

---

[1]) Fresenius, quant. Analyse 1864. — Nach Regnault 1·293187 ^{k}.

Hieraus folgt:

$$m = \frac{25}{700 + x} \tag{14}$$

Wie genau sich hieraus der Werth von m ergibt, zeigt folgender Vergleich:

Nach Regnault und Reiset ist $x = 20{\cdot}96$ womit $m = 0{\cdot}0346760$
„ Bunsen „ $x = 20{\cdot}93$ „ $0{\cdot}0346774$
„ den neuesten Daten „ $x = 20{\cdot}81$ „ $0{\cdot}0346832$

Der erste und letzte Werth differiren nur um 0·02 Procent.

Würde man m aus der Dichte des Sauerstoffs bestimmen, so wäre nach (13)

$$m = \frac{\delta_1}{32}$$

Nun ist in der neuesten Auflage (1864) von Fresenius $\delta_1 = 1{\cdot}10832$ angegeben, woraus folgt $m = 0{\cdot}034635$ (mit welcher Zahl Fresenius auch die andern Gasdichten berechnet); und nach der bisher benützten Sauerstoffdichte nach Regnault $\delta_1 = 1{\cdot}10563$ würde sogar $m = 0{\cdot}034551$ folgen, welcher Werth in meinem „Beitrag zur Mechanik der Gase“ angenommen wurde. Dieser Werth ist jedoch gänzlich unzulässig, denn mit demselben würde aus Glchg (14) folgen:

$$700 + x = \frac{25}{0{\cdot}034551} = 723{\cdot}57$$

also $$x = 23{\cdot}57 \text{ statt } 20{\cdot}81,$$

woraus sich am deutlichsten die Schärfe der obigen Bestimmung des Coëfficienten m herausstellt.

Zur Controle findet man mit

$$m = 0{\cdot}0346832 \tag{15}$$

folgende Werthe der Dichten δ, welchen die Fehler der Beobachtung in Procenten des als genauer anzusehenden berechneten Werthes beigesetzt sind:

Tabelle über die Gasdichten.

Name und Bezeichnung des Gases		q	mq	beobachtet	von	Fehler %
Luft		$\left(\frac{1}{m}\right)$	1	1		
Wasserstoff	H_2	2	0·0694	0·0692	Regnault	−0·3
Sauerstoff	O_2	32	1·1099	1·1056	„	−0·4
Stickstoff	N_2	28	0·9711	0·9713	„	0
Chlor	Cl_2	71	2·4625	2·440	„	−0·9
Brom	Br_2	160	5·5493	5·54	Mitscherlich	−0·2
Jod	J_2	254	8·8095	8·716	?	−1·1
Schwefel	S_6	192	6·6592	6·654	Regnault	−0·1
Phosphor	P_4	124	4·3007	4·326	„	+0·6
Arsen	As_4	300	10·4050	10·37	„	−0·3
Quecksilber	Hg	200	6·9366	7·03	Mitscherlich	+1·3
Kohlengas	C_2	24	0·8324	hypothetisch		
Siliciumgas	Si_2	56	1·9423	hypothetisch		
Chlorwasserstoff	$H\,Cl$	36·5	1·2659	1·2474	Biot	−1·5
Kohlenoxyd	$C\,O$	28	0·9711	0·9678	Cruikshank	−0·3
Stickoxyd	$N\,O$	30	1·0405	1·0386	Bérard	−0·2
Wasserdampf	$H_2\,O$	18	0·6243	0·622	Regnault	−0·4
Schwefelwasserstoff	$H_2\,S$	34	1·1792	1·1912	Gay-Lussac	+1·0
Chlorammonium	$\frac{1}{2}\,(N\,H_4\,Cl)$	26·75	0·9278	0·89 ((1·01))	Bineau Deville	−4·1
Ammoniumsulphhydrat	$\frac{1}{2}\,(N\,H_5\,S)$	25·5	0·8844	0·884	Bineau	0
Ammoniak	$N\,H_3$	17	0·5896	0·590	H. Davy	+0·1
Cyanwasserstoff	$H\,N\,C$	27	0·9364	0·947	Regnault	+1·1
Stickoxydul	$N_2\,O$	44	1·5261	1·527	„	+0·1
Schweflige Säure	$S\,O_2$	64	2·2197	2·247	Berzelius	+1·2
Kohlensäure	$C\,O_2$	44	1·5261	1·529	Regnault	+0·2
Kohlensulfid	$C\,S_2$	76	2·6359	2·6447	Gay-Lussac	+0·3
Methylen	$C\,H_4$	16	0·5549	0·559	Regnault	+0·8
Phosphorchlorid	$\frac{1}{2}\,(P\,Cl_5)$	104·25	3·6157	3·66	„	+1·2
Elayl	$C_2\,H_4$	28	0·9711	0·967	„	−0·4
Cyan	$N_2\,C_2$	52	1·8035	1·86	„	+3·1
Chloroform	$C\,H\,Cl_3$	119·5	4·1446	5·30 ?	Regnault	—
Phosphorchlorür	$P\,Cl_3$	137·5	4·7689	4·742	„	−0·6
Arsenchlorür	$As\,Cl_3$	181·5	6·2950	6·30	Dumas	+0·1
Aethylchlorür	$C_2\,H_5\,Cl$	64·5	2·2371	2·235	Regnault	−0·1
Aethylbromür	$C_2\,H_5\,Br$	109	3·7805	3·754	Marchand	−0·7

Name und Bezeichnung des Gases		q	mq	beobachtet	von	Fehler %
Alkohol	$C_2 H_6 O$	46	1·5954	1·589	Regnault	—0·4
Kieselchlorid . . .	$Si Cl_4$	170	5·8961	5·939	Dumas	+0·7
Aethylcyanür . . .	$C_3 H_5 N$	55	1·9076	1·928	Pélouze	+1·1
Elaylchlorür	$C_2 H_4 Cl_2$	99	3·4336	3·45	Regnault	+0·5
Aceton	$C_3 H_6 O$	58	2·0116	2·0025	Dumas	—0·5
Zinnchlorid	$Sn Cl_4$	260	9·0176	9·1997	Dumas	+2·0
Titanchlorid	$Ti Cl_4$	192	6·6592	6·836	„	+0·7
Phenylen	$C_6 H_6$	78	2·7053	2·752	Faraday	+1·7
Äthyl	$C_4 H_{10}$	58	2·0116	2·0039	Frankland	—0·4
Essigäther	$C_4 H_8 O_2$	88	3·0521	3·060	Boullay	+0·3
Äther	$C_4 H_{10} O$	74	2·5666	2·586	?	+0·8
Äthylsulfür	$C_4 H_{10} S$	90	3·1215	3·138	Regnault	+0·5
Terpentinöl	$C_{10} H_{16}$	136	4·7169	4·76	„	+0·9

Der Beobachtungsfehler beträgt:

0%	bei	2	Verbindungen	
bis 1%	„	15	„	zusammen + 7·6
bis — 1%	„	16	„	„ — 6·2
über 1%	„	8	„	„ + 12·7
über — 1% . . .	„	3	„	„ — 6·7

Bei 44 Gasarten { Algebraische Summe + 7·4 / Arithmetische Summe 33·2

Durchschnittlicher Fehler $\frac{33·2}{44} = \pm 0·75\%$ und bei Ausserachtlasssung der über $\pm$ 1 % betragenden Fehler $\frac{14·4}{33} = \pm 0·44\%$.

Diese Tabelle stellt wohl ausser Zweifel, dass die Beobachtungen durch den in (15) bestimmten Werth von m bestmöglichst erklärt werden, und dass mithin die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= 0·0346832\, q \\ q &= 28·8324\, \delta \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Durch Einführung des Werthes (15) in (12) folgt

$$R = \frac{29·277 \times 28·8324}{q} = \frac{844·12}{q} \qquad (17)$$

Nachdem nun durch die Beobachtungen Joule's das mechanische Wärmeäquivalent, bezogen auf metrisches Mass, mit

$$k = 423{\cdot}54$$

gefunden wurde, und dieses Beobachtungsresultat keineswegs in der Einheitenstelle verlässlich ist, so ist es wohl nicht gewagt, die Gleichung (17) in der Form (6) zu schreiben:

$$R = \frac{2k}{q}$$

und den Werth von k mit

(18) $$k = 422{\cdot}06$$

anzunehmen.

Sollte es gelingen, für die von mir gefundene Relation (4) *einen* theoretischen Grund aufzufinden, so kann nur der auf dem hier betretenen Weg ermittelte Werth von k als der unzweifelhaft *richtige* angesehen werden.

Zusammenstellung der Resultate.

1. Das mechanische Wärmeäquivalent kann mit $k = 422{\cdot}06$ Meterkilogramm angenommen werden, wonach das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit (1^{mk}) $A = \frac{1}{k} = 0{\cdot}0023693$ *Calorien* beträgt, bezogen auf das Kilogramm und das 100theilige Thermometer.

2. Die relative Dichte δ der permanenten und der überhitzten coerciblen Gase hängt mit ihrem Molecülgewicht q durch die Gleichung zusammen:

$$\delta = 0{\cdot}0346832\, q,$$

wobei die chemische Formel so zu schreiben ist, dass das Gasvolumen mit jenem von $N H_3$ oder H Cl übereinstimmend ist.

Der mögliche Fehler des Coëfficienten 0·0346832 ist ganz sicher kleiner als 0·2 %, der wirkliche Fehler desselben aber sogar wahrscheinlich kleiner als 0·02 % des angegebenen Werthes.

3. Die specifische Wärme fester Körper und die Wärmecapacität C' der Gase bei constantem Druck kann direct aus der chemischen Formel berechnet werden. Es dient hiezu die im Eingang

dieses Artikels erklärte Gleichung $q\,\mathfrak{C}' = a\,n$, und es haben a und n folgende Werthe:

Für das Element	Für feste Körper	Für Gase
	$a = 0{\cdot}8$	$a = 0{\cdot}86$
$\mathfrak{C} = 12$	$n = 2$	$n = 4$
$H = 1$	$n = 3$	$n = 2$
$B = 10{\cdot}9$	$n = 3$	—
$Si = 28$	$n = 3$	$n = 6$
$\mathfrak{O} = 16$	$n = 5$	$n = 4$
$P = 31$	$n = 5$	$n = 6$
$Fl = 19$	$n = 6$	—
$N = 14$	$n = 7$	$n = 4$
$\mathfrak{S} = 16$	$n = 7$	$n = 4$
$Cl = 35{\cdot}5$, $Br = 80$, $J = 127$	$n = 8$	$n = 5$
$As = 75$, $Sn = 118$, $Ti = 50$	$n = 8$	$n = 8$
Andere Metalle	$n = 8$	—

4. Die specifische Wärme des Wasserdampfes $= H_2\mathfrak{O}$ ist demnach $= \frac{0{\cdot}86 \times 8}{18} = 0{\cdot}3822$.

5. Die rationelle Wärmecapacität $\mathfrak{C}$ der Gase kann aus der Gleichung:

$$q\,(\mathfrak{C}' - \mathfrak{C}) = 2$$

berechnet werden:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' - \frac{2}{q}$$

Für Wasserdampf folgt $\mathfrak{C} = 0{\cdot}3822 - 0{\cdot}1111 = 0{\cdot}2711$.

6. Das Gay-Lussac Mariotte'sche Gesetz kann in der Form geschrieben werden:

$$\frac{pv}{T} = \frac{2k}{q}$$

oder wegen $k = \frac{1}{A}$

$$Apv = \frac{2T}{q}$$

$$Ap.qv = 2\,T$$

oder auch, wenn $V = qv$ das Molecülvolum bei der Spannung p und absoluten Temperatur T bedeutet:

$$\frac{ApV}{T} = 2$$

welche Gleichung verglichen mit Gleichung (3) den Satz über die äussere Arbeit ausdrückt:

„Bei der Erwärmung von einem Molecül irgend eines Gases „unter constantem Druck, die Temperatur und Spannung mag so „gross sein wie immer, werden zur Verrichtung der äusseren Arbeit „für je einen Grad Celsius Temperaturerhöhung zwei Wärmeein-„heiten benöthigt, wenn das Molecülgewicht und die Wärmeeinheit „auf gleiche Gewichtseinheit bezogen werden.“

Über die Entwicklung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten.

Von **Dr. M. Allé.**

1.

Eine Function der imaginären Gundgrösse $z = \xi + i\eta$ ist immer innerhalb des Bereiches der $\xi\eta$-Ebene, wo sie synektisch verläuft, in eine Potenzreihe entwickelbar. Namentlich wenn eine Function von z innerhalb der von 2 concentrischen Kreisen gebildeten Ringfläche synektisch bleibt, so gibt es für jeden Punkt dieses Gebietes eine Entwicklung der Function nach auf- und absteigenden Potenzen von z. Die beiden Fälle, wo die Function entweder innerhalb oder ausserhalb des ganzen Gebietes eines um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises synektisch bleibt, sind Grenzfälle, die durch Null- oder Unendlichsetzen des inneren oder äusseren Kreises im allgemeinen Falle erhalten werden, und erscheinen die darauf bezüglichen Entwicklungen entweder blos nach auf- oder blos nach absteigenden Potenzen geordnet.

Die Grundgleichung dieser sämmtlichen Entwicklungen ist:

$$2\pi i . f(z') = \int_a \frac{f(z)}{z - z'} dz + \int_i \frac{f(z)}{z' - z} dz \qquad (1)$$

wo f eine innerhalb der zwischen 2 um den Anfangspunkt beschriebenen Kreisen eingeschlossene Ringfläche synektisch bleibt, z' ein bestimmter Punkt in dieser Fläche ist und die den Integralen beigefügten Buchstaben a, i anzeigen sollen, dass die Integrationen bezüglich über den Umfang des äusseren und inneren Kreises vorzunehmen sind.

Diese Entwickelbarkeit einer Function von z ist eigentlich am allgemeinsten in der Definition einer Function von z ausgesprochen, wenn dieselbe wie üblich durch die Gleichung

$$\frac{df}{d\eta} = i\frac{df}{d\xi}$$

gegeben wird.

Es ist dies nämlich eine partielle Differentialgleichung, und so wie die einfachste Function die ihr Genüge leistet z^μ ist, aus der man ein Integral der Form

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mu A_\mu z^\mu$$

zusammensetzen kann, so wird man auch ein Integral der Form

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} B_\rho \cdot \varphi_\rho(z)$$

bilden können, wenn die besondere Beschaffenheit der Function φ eine Bestimmung der Constanten B zulässt.

Nimmt man namentlich für φ diejenigen Functionen, welche näher durch die Gleichung

$$(2) \qquad (1-z^2)\frac{d^2\varphi}{dz^2} - (m+1)z.\frac{d\varphi}{dz} + n(n+m)\varphi = 0$$

bestimmt werden, und die ich in einer früheren Abhandlung im LI. Bande der Sitzungsberichte mit $X_n^m(z)$ $Y_n^m(z)$ bezeichnet habe, so bemerkt man bald, dass die besondere Natur dieser Functionen eine Darstellung der gegebenen Functionen in Reihenform nach den ersteren gestatte, indem man die $2r$mal nach z' differenzirte Gleichung 1. nämlich

$$(3) \quad 2\pi i.f^{2r}(z') = \Pi(2r)\int_a \frac{fz(dz)}{(z-z')^{2r+1}} + \Pi(2r)\int_i \frac{f(z)dz}{(z'-z)^{2r+1}}$$

mit der in oben erwähnter Abhandlung unter (16) abgeleiteten Gleichung

$$(4) \quad \frac{\Pi(2r)}{(z-z')^{2r+1}} = \sum_{0}^{\infty} [2(r+\rho)+1]\, X_\rho^{2r+1}(z').Y_\rho^{2r+1}(z)$$

verbindet.

Ehe man jedoch diese beiden Gleichungen benützt, ist es nothwendig, sich über die Grenzen der Gültigkeit der Gleichung (4) Klarheit zu verschaffen.

Zu diesem Ende bemerke ich, dass die Gleichung (4) durch Differenziren aus der Heine'schen Gleichung für Kugelfunctionen

$$\frac{1}{z-z'} = \sum_{0}^{\infty} (2\rho+1)\, X_\rho^1(z') \cdot Y_\rho^1(z) \tag{5}$$

abgeleitet ist, welche letztere so lange gilt als

$$\text{mod.}\,(z+\sqrt{z^2-1}) > \text{mod.}\,(z'+\sqrt{z'^2-1}) \tag{6}$$

d. h. so lange (6) erfüllt ist bleibt die Function rechts in (5) synektisch und ist genau dieselbe Function wie der einfache Ausdruck links in (5).

Der beliebig oft differenzirte Ausdruck rechts in (5) hat daher mit der entsprechenden linken Seite dieselben Eigenschaften gemein, und zwar für denselben Spielraum der Veränderlichen; mit anderen Worten, die Gleichung (4) gilt eben so wie (5), so lange die Bedingung (6) erfüllt bleibt.

Nicht zu übersehen ist dabei, dass in (6) das Zeichen der beiden Wurzelgrössen so zu nehmen sei, dass es bezüglich mit jenem von z und z' übereinstimmt. Dadurch werden die beiden Moduln grösser als 1.

Die eben angeführte Bedingung (6) lässt aber, wie Neumann auf sehr sinnreiche Weise gezeigt hat, eine einfache geometrische Deutung zu, durch welche die weiterhin folgenden Resultate eine höchst bequeme und anschauliche Fassung erhalten. Es geschieht dies dadurch, dass man für ξ und η neue Coordinaten einführt, namentlich wenn letztere so gewählt werden, dass sie die Parameter zweier isothermer Cylinderflächen vorstellen, deren Gleichungen durch

$$\begin{aligned} \frac{\xi^2}{\cos\theta^2} - \frac{\eta^2}{\sin\theta^2} &= 1 \\ \frac{\xi^2}{\left(\frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2}\right)^2} &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

gegeben sind.

In der $\xi\eta$-Ebene stellen sie ein System von Hyperbel- und Ellipsenschaaren mit den Brennpunkten $\xi(\pm 1)$ vor.

Aus ihnen folgt durch Auflösung

$$\xi = \frac{e^{\varepsilon} + e^{-\varepsilon}}{2} \cdot \cos\theta$$

$$\eta = \frac{e^{\varepsilon} - e^{-\varepsilon}}{2} \cdot \sin\theta$$

und damit

$$z + \sqrt{z^2-1} = \cos(\theta - i\varepsilon) \pm i \sin(\theta - i\varepsilon)$$

das heisst

$$z + \sqrt{z^2-1} = e^{\pm\varepsilon}(\cos\theta \pm i \sin\theta).$$

Denkt man sich ε positiv, so sind, während man ε von 0 bis ∞ wachsen lässt, auch die sämmtlichen Ellipsen in (7) im beständigen Wachsen begriffen, werden dem zufolge nach und nach jeden beliebigen Punkt der $\xi\eta$-Ebene überschreiten und diejenige Ellipse, welcher ein grösseres ε angehört, wird auch die Ellipse mit kleinerem ε einschliessen. Nun ist aber

$$\text{mod.}\,(z + \sqrt{z^2-1}) = \varepsilon^{\pm\varepsilon}$$

und weil das Zeichen von $\sqrt{z^2-1}$ so gewählt werden muss, dass mod. $(z + \sqrt{z^2-1}) > 1$ wird, so ist von den beiden in der letzten Gleichung vorkommenden Zeichen, die eben der Zweideutigkeit von $\sqrt{z^2-1}$ ihr Dasein verdanken, das obere zu nehmen, wodurch dann die Bedingung (6) für die Giltigkeit von (4) die einfache Form

$$\varepsilon > \varepsilon'$$

erhält.

Hieraus folgt, dass, je nachdem z' sich innerhalb oder ausserhalb einer um den Anfangspunkt mit den Brennpunkten $\xi(\pm 1)$ und durch z gehenden Ellipse befindet, von den beiden Gleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{\Pi(2r)}{(z-z')^{2r+1}} = \displaystyle\sum_0^\infty [2(r+\rho)+1]\, X_\rho^{2r+1}(z') \cdot Y_\rho^{2r+1}(z) \\ \dfrac{\Pi(2r)}{(z'-z)^{2r+1}} = \displaystyle\sum_0^\infty [2(r+\rho)+1]\, X_\rho^{2r+1}(z) \cdot Y_\rho^{2r+1}(z') \end{cases}$$

entweder bezüglich die erstere oder letztere gelte.

Ist demnach $f(z)$ eine im ganzen Bereiche der von 2 Ellipsen mit den Brennpunkte ± 1 um den Anfangspunkt gebildeten ringförmigen Fläche synektische Function, so gilt für dieses ganze Gebiet die durch Verbindung von (3) mit (8) entstehende Entwicklung

$$f^{2r}(z') = \sum_0^\infty{}_\rho A_\rho X_\rho^{2r+1}(z') + \sum_0^\infty{}_\rho B_\rho Y_\rho^{2r+1}(z') \qquad (9)$$

wo man

$$A_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_a f(z)\, Y_\rho^{2r+1}(z)\,dz$$
$$B_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_i f(z)\, X_\rho^{2r+1}(z)\,dz \qquad (10)$$

hat, und die Integration in den Coëfficienten der ersten Art über den ganzen Umfang der äusseren und an den Coëfficienten der zweiten Art über den ganzen Umfang der inneren Ellipse auszudehnen ist.

Macht man also

$$f^{2r} = F \qquad f = \int F dz^{2r} = \Psi$$

so kann man auch schreiben

$$F(z') = \sum_0^\infty{}_\rho \mathfrak{A}_\rho . X_\rho^{2r+1}(z') + \sum_0^\infty{}_\rho \mathfrak{B}_\rho . Y_\rho^{2r+1}(z'), \qquad (11)$$

wo dann

$$\mathfrak{A}_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_a \Psi(z)\, Y_\rho^{2r+1}(z)\,dz$$
$$\mathfrak{B}_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_i \Psi(z)\, X_\rho^{2r+1}(z)\,dz \qquad (12)$$

und da Ψ jedenfalls synektisch ist, sobald F es ist, so gilt die Entwickelung (11) so lange $F(z)$ in dem früher bezeichneten ringförmigen Raume synektisch bleibt. Die Entwicklung für den Fall als F innerhalb einer vollen Ellipse der angegebenen Art synektisch bleibt, erhält man aus (11), indem man nach und nach die innere Ellipse dort in die beide Brennpunkte $\xi(\pm 1)$ verbindende Gerade übergehen lässt, wo dann an der Grenze sämmtliche $\mathfrak{B}_\rho = 0$ werden, wodurch man erhält:

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} \mathfrak{A}_{\nu} \cdot X_{\nu}^{\nu-1}(z).$$

Von diesen Entwicklungen lässt sich eine Anwendung machen.

Die X und Y genannten Functionen lassen sich, wie ich in der schon früher erwähnten Abhandlung gezeigt habe, unter folgender Form darstellen:

$$(13) \qquad \begin{aligned} X_n^m(z) &= \frac{2^\nu \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)} \cdot \frac{d^\nu X_\mu^\mu}{dz^\nu} \\ Y_n^m(z) &= \frac{\Pi(2\nu)}{(-1)^\nu 2^\nu \Pi(\nu)} \cdot \frac{d^\nu Y_\mu^\mu}{dz^\nu}, \end{aligned}$$

wo $2\nu = m - 1$, $\mu = n + \nu$ gesetzt ist und ich bemerke nur noch, dass diese Gleichung (12) so wie die daraus abgeleiteten

$$(14) \qquad \begin{aligned} \frac{d^p X_n^m}{dz^p} &= m(m+2)\ldots(m+2p-2) \cdot X_{n-p}^{m+2p} \\ \frac{d^p Y_n^m}{dz^p} &= \frac{(-1)^p}{m(m+2)\ldots(m+2p-2)} \cdot Y_{n-p}^{m+2p} \end{aligned}$$

auch noch für negative m gelten, so lange wenigstens m numerisch kleiner als n ist, weil dann noch immer von den rechten Seiten der Gleichungen (13) bezüglich die erste das für endliche Werthe der Veränderlichen beständig stetig bleibende, und die zweite das für besondere endliche Werthe der Veränderlichen unstetig werdende particuläre Integral der Differentialgleichung (2) enthält, wie dies für positive m der Fall ist. Es ist somit

$$*) \qquad \begin{aligned} \frac{d^r X_{\sigma+2r}^{1-2r}}{dz^r} &= (-1)^r 1.3.5.\ldots.(2r-1) \cdot X_{\sigma+r}^1 \\ \frac{d^r Y_{\sigma+2r}^{1-2r}}{dz^r} &= \frac{1}{1.3.5.\ldots.(2r-1)} \cdot Y_{\sigma+r}^1 \end{aligned}$$

---

*) Es bedeutet also $X_{\sigma+2r}^{1-2r}(z)$ den $(\sigma+2r+1)^{\text{ten}}$ Entwicklungscoëfficienten des Ausdruckes $(1-2qz+q^2)^{\frac{2r-1}{2}}$.

und durch Anwendung von (13)

$$\frac{d^{2r}X_{\sigma+2r}^{1-2r}}{dz^{2r}} = (-1)^r[1.3.5....(2r-1)]^2 X_\sigma^{2r+1}$$
$$\frac{d^{2r}Y_{\sigma+2r}^{1-2r}}{dz^{2r}} = \frac{(-1)^r}{[1.3.5....(2r-1)]^2} Y_\sigma^{2r+1}. \qquad (15)$$

Nun ist aber $X_\sigma^{2r+1}(z)$ im ganzen Bereiche der z-Ebene, $Y_\sigma^{2r+1}(z)$ wenigstens ausserhalb eines mit dem Halbmesser $=1$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises synektisch, daher man auch in (9) oder (11) für f oder φ unbedingt $X_{\sigma+2r}^{1-2r}$ und unter der angeführten Beschränkung $Y_{\sigma+2r}^{1-2r}$ setzen kann, wodurch die beiden Gleichungen entstehen:

$$(-1)^r.[1.3.5...2r-1]^2.X_\sigma^{2r+1}(z') = \sum_0^\infty{}_\rho A_\rho X_\rho^{2r+1}(z') + \sum_0^\infty{}_\rho B_\rho Y_\rho^{2r+1}(z') \qquad (16)$$

$$\frac{(-1)^r}{[1.3.5...(2r-1)]^2}.Y_\sigma^{2r+1}(z') = \sum_0^\infty{}_\rho \mathfrak{A}_\rho X_\rho^{2r+1}(z') + \sum_0^\infty{}_\rho \mathfrak{B}_\rho Y_\rho^{2r+1}(z')$$

in denen

$$A_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_a X_{\sigma+2r}^{1-2r}(z).Y_\rho^{1+2r}(z)\,dz \qquad a)$$
$$B_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_i X_{\sigma+2r}^{1-2r}(z).X_\rho^{1+2r}(z)\,dz \qquad a')$$
$$\mathfrak{A}_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_a Y_{\sigma+2r}^{1-2r}(z).Y_\rho^{1+2r}(z)\,dz \qquad b) \qquad (17)$$
$$\mathfrak{B}_\rho = \frac{2(r+\rho)+1}{2\pi i}\int_i Y_{\sigma+2r}^{1-2r}(z).X_\rho^{1+2r}(z)\,dz \qquad b')$$

Aus der besonderen Form der Gleichungen (16) ist aber zu ersehen, dass in beiden alle Coëfficienten, mit Ausnahme je eines einzigen, A_σ und $\mathfrak{B}_\sigma$ nämlich, verschwinden müssen, während die eben genannten Coëfficienten sich derart bestimmen, dass man hat

$$(18)\quad \begin{cases} \int X_{\sigma+2r}^{1,-2r}(z).\, Y_{\sigma}^{1,+2r}(z)\,dz = (-1)^r[1.3.5\ldots 2r-1]^2 \cdot \dfrac{2\pi i}{2(r+\sigma)+1} & a) \\ \int Y_{\sigma+2r}^{1,-2r}(z).\, X_{\sigma}^{1,+2r}(z)\,dz = \dfrac{(-1)^r}{[1.3.5\ldots 2r-1]^2} \cdot \dfrac{2\pi i}{2(r+\sigma)+1} & b). \end{cases}$$

Also A_ρ und $\mathfrak{B}_\rho$ sind Null wenn ρ von σ verschieden ist, die B_ρ und $\mathfrak{A}_\rho$ hingegen sind immer Null, die Stellenzeiger mögen gleich oder ungleich sein. Überdies können die Integrationen in (17) *a)*, *a')*, (18) *a)* über jede beliebige Ellipse, die Integrationen in (17) *b)*, *b')*, (18) *b)* über jede den mit dem Halbmesser $=1$ um den Anfangspunkt beschriebenen Kreis einschliessende Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 ausgeführt werden.

2.

Die Entwicklungen der n^{ten} und $-(n+1)^{ten}$ Potenz des Ausdruckes

$$x+\cos\eta\,\sqrt{x^2-1}$$

nach den Cosinussen der Vielfachen von η sind in der Theorie der Kugelfunctionen von grosser Wichtigkeit, weil sich aus ihnen eine ganze Reihe von Eigenschaften dieser Functionen mit grosser Leichtigkeit ableiten lässt, darunter insbesondere jene Eigenschaften, die in der Form von bestimmten Integralen ihren näheren Ausdruck finden. Auf ähnliche Weise bergen die n^{te} und $-(n+m)^{te}$ Potenz desselben oben stehenden Ausdruckes neue Eigenschaften der X genannten Functionen, die durch Entwicklung der beiden Potenzen nach X-Functionen mit der Grundgrösse $\cos\eta$ zum Vorschein kommen.

Schreibt man für einen Augenblick $\cos\eta = z$, so handelt es sich um die Entwicklungen von

$$N=(x+z\sqrt{x^2-1})^n \text{ und } M=(x+z\sqrt{x^2-1})^{-n-m}$$

nach Functionen der Form $X_\rho^\lambda(z)$.

Macht man $z=\xi+i\eta$, stellt sich also z als einen veränderlichen Punkt in der $\xi\eta$-Ebene vor, so ist die Möglichkeit einer solchen Entwickelung von N und zwar für den ganzen Bereich der $\xi\eta$-Ebene nach dem Vorhergehenden ohne weiters klar, weil N eben in diesem Gebiete in Bezug auf z synektisch ist.

Was M betrifft, so wird dieser Ausdruck unendlich für $z = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ und es können zwei Fälle eintreten, je nachdem $x \gtrless 1$ ist.

Es hat demnach in diesen Fällen z die Form

$$z = -u \qquad x > 1$$
$$z = iu' \qquad x < 1,$$

wenn $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = u$ und $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = u'$ für $x \gtrless 1$ gesetzt wird, und man, wie ich im Folgenden thun werde, nur reelle x annimmt. Der kritische Punkt des Ausdruckes M liegt somit nach Unterscheidung der beiden Fälle entweder vom Anfangspunkte auf der ξ-Axe in der Entfernung u, oder auf der η-Axe in der Entfernung u'. Da überdies u stets grösser als 1 ist, so wird man in jedem Falle immer eine Ellipse um den Anfangspunkt mit den Brennpunkten $\xi(\pm 1)$ beschreiben können, der Art, dass der kritische Punkt ausserhalb ihres Umfanges liegt. Im Inneren dieser Ellipse bleibt dann die Function von z, die mit M bezeichnet wurde, synektisch und wird daher in diesem Raume die Entwicklung nach X-Functionen ausführbar sein. Nachdem nun in diesem Raume die ganze Reihe reeller Werthe von z zwischen -1 und $+1$ auch enthalten ist, so ist für diese Werthe die Entwicklung gewiss statthaft. Auf diesen Spielraum reeller Werthe zwischen -1 und $+1$ für z werde ich mich auch im Folgenden beschränken und x immer reell voraussetzen, und $\leqq 1$. Die wirkliche Ausführung dieser Entwicklungen betreffend bemerke ich zunächst, dass die beiden Ausdrücke N sowohl als M einer und derselben partiellen Differentialgleichung Genüge leisten, derselben nämlich, durch welche die beiden Functionen X_n^m und Y_n^m für die zusammengesetzte Grundgrösse

$$\cos\Theta = xx' - \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x'^2-1} \cdot \cos\varphi$$

definirt werden.

In der That, setzt man in der partiellen Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - (\beta+1)x \cdot \frac{dU}{dx} + \frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{d^2U}{d\eta^2} + (\beta-1)\cot\eta \cdot \frac{dU}{d\eta}\right\} \quad (1)$$
$$+ \alpha(\alpha+\beta)\,U = 0$$

anstatt U den Ausdruck

$$(2) \qquad (x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^{\pm\mu},$$

so wird man entsprechend den beiden Zeichen von μ auf die beiden Bedingungsgleichungen geführt:

$$-\mu(\mu+\beta)+\alpha(\alpha+\beta)=0$$
$$-\mu(\mu-\beta)+\alpha(\alpha+\beta)=0,$$

welche erfüllt sein müssen, wenn der Ausdruck 2. der Gleichung (1) genügen soll. Die letzten werden aber erfüllt für

$$\alpha=\mu$$
$$\alpha=\mu-\beta$$

und zwar ganz unabhängig von dem Werthe des β.

Schreibt man nun statt β m und macht im ersten Falle $\mu=n$, im zweiten $\mu=n+m$, so wird α jedesmal gleich n und folglich genügen die beiden Ausdrücke

$$(x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^n \text{ und } (x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^{-(n+m)}$$

derselben partiellen Differentialgleichung

$$(3) \qquad (1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2}-(m+1)x.\frac{dU}{dx}+\frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{d^2U}{d\eta^2}+(m-1)\cot\eta\frac{dU}{d\eta}\right\}$$
$$+n(n+m)U=0,$$

die für $\cos\eta=z$ auch so geschrieben werden kann:

$$(4) \qquad (1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2}-(m+1)x.\frac{dU}{dx}+\left[n(n+m)-\frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right]U$$
$$+\frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{d^2U}{dz^2}(1-z^2)-mz\frac{dU}{dz}+\rho(\rho+m-1)U\right\}=0$$

und eben keine andere ist als jene der auch $X_n^m(\cos\Theta)$ Genüge leistet, dessen Ausdruck in Reihenform nach Functionen der Form $X_\rho^{m-1}(\cos\gamma)$ ich im LI. Bande der Sitzungsberichte durch Integration

eben dieser Gleichung hergestellt habe. Man kann also von der Gleichung (4) Gebrauch machen, um die beiden Ausdrücke N und M als Integrale derselben darzustellen.

Bedient man sich einer häufig angewendeten Integrationsmethode solcher Differentialgleichungen, durch welche auch die Reihe für $X_n^m(\cos\Theta)$ gefunden wurde, so stösst man unmittelbar auf die gewünschten Entwicklungen der Ausdrücke N und M und zwar nach Functionen $X_\rho^{m-1}(z)$ geordnet.

Integrirt man nämlich die Gleichung (4) in der Form einer Summe, deren einzelne Glieder Producte je zweier Factoren sind, von denen jeder nur Function einer Veränderlichen ist, d. h. setzt man

$$U = \sum_\rho X_\rho Z_\rho, \tag{5}$$

so ergibt sich, dass (4) durch eine solche Form erfüllt werden kann, wenn die beiden Gleichungen bestehen

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2X_\rho}{dx^2} - (m+1)x.\frac{dX_\rho}{dx} + \left[n(n+m) - \frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right]X_\rho = 0\\ (1-z^2)\frac{d^2Z_\rho}{dz^2} - mz\frac{dZ_\rho}{dz} + \rho(\rho+m-1)Z_\rho = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

wo der Umfang der bis jetzt willkürlichen Grösse ρ erst durch die Natur der durch U vorzustellenden Function näher bestimmt wird.

Das vollständige Integral der zweiten Gleichung in (6) hat nach einer früheren Bezeichnungsweise folgende Gestalt:

$$Z_\rho = k_\rho . X_\rho^{m-1}(z) + k'_\rho . Y_\rho^{m-1}(z) \tag{7}$$

und was sich gleich jetzt mit Rücksicht auf (7) und die besondere Beschaffenheit von N und M vorhersagen lässt, in so fern sie in (5) enthalten gedacht werden, besteht darin, dass bezüglich N in (5) die Summirung nur bis $\rho = n$ auszudehnen sei, während M in der Form (5) vorausgesetzt als unendliche Reihe zu denken ist. Dieser Umstand bedingt eine abgesonderte Behandlungsweise der Ausdrücke N und M mit Bezug auf ihre Darstellung durch (5) und nöthigt zu einer kleinen Abschweifung über die besondere Natur der in der ersten Gleichung (6) enthaltenen particulären Integrale.

In dieser Beziehung mache ich auf die Entstehung der Gleichung

$$(8)\quad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - (m+1)x\cdot\frac{dy}{dx} + \left[n(n+m) - \frac{\rho(\rho+m-1)}{1-x^2}\right]y = 0$$

aufmerksam. Sie wurde erhalten, indem man analog den Zugeordneten der Kugelfunctionen eine Function definirte durch die Gleichung

$$(9)\quad X_n^{m,\rho} = \frac{\Pi(n-\rho)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\frac{d^\rho X_n^m}{dx^\rho} = h(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}X_{n-\rho}^{m+2\rho}$$

und mittelst der bekannten Differentialgleichung, welcher $X_{n-\rho}^{m+2\rho}$ genügt, diejenige aufsuchte, welche durch $X_n^{m,\rho}$ erfüllt wird. Es ist demnach der Ausdruck (9) das immer stetig bleibende particuläre Integral von (8), während ein zweites particuläres Integral, welches für endliche Werthe der Grundgrösse unstetig werden kann, ebenfalls bekannt ist in der Form

$$(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}Y_{n-\rho}^{m+2\rho}$$

Dieses letztere interessirt uns hier weniger, weil es in Folge seiner eben erwähnten besonderen Beschaffenheit ohnedies nicht geeignet ist in der Darstellung von N und M mitzuwirken, daher überall wo es vorkommt den Coëfficienten 0 erhalten wird.

Wenn man aber die Gleichung (9) näher betrachtet, so leuchtet es ein, dass für $\rho > n$ die darin enthaltene Definition von $X_n^{m,\rho}$ ihre Bedeutung verliert; für die Darstellung von N hätte dies nichts zu sagen, weil darin ohnedies nur solche Functionen $X_n^{m,\rho}$ vorkommen können, wo $\rho \leqq n$ ist. Allein in der Entwicklung von M könnte dieser Umstand allerdings einige Verlegenheit bereiten, wenn es nicht möglich wäre zu zeigen, dass die Reihe stetig bleibender particulärer Integrale einer Fortsetzung auch über $\rho = n$ hinaus noch fähig wäre.

Die Überzeugung von der Möglichkeit einer solchen Vervollständigung der particulären Integrale der angegebenen Art erwirbt man sich jedoch bald, indem man zunächst bemerkt, dass ein Ausdruck von der Form

$$y = (x^2-1)^{-\frac{\rho+m-1}{2}}\cdot u$$

die Bestimmung von u auf die Integration einer linearen Differentialgleichung zurückführt in deren sämmtlichen Gliedern bezüglich der Gradzahlen der Coëfficienten ein regelmässiger Abfall und zwar je um eine Einheit stattfindet. Man erhält nämlich zur Ermittlung von u

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2}+(m+2\rho-3)x.\frac{du}{dx} + [n(n+m)+(1-\rho)(\rho+m-1)]u=0, \tag{11}$$

führt man hier eine neue Veränderliche v ein durch die Gleichung

$$\frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}=v, \tag{12}$$

so wird durch λmaliges Differenziren von (11) die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2v}{dx^2}+(m+2\rho-3-2\lambda)x.\frac{dv}{dx} - \left\{\lambda^2-\lambda(m+2\rho-2)-[n(n+m)+(1-\rho)(\rho+m-1)]\right\}v=0,$$

deren letztes Glied für zwei Werthe von λ verschwindet, nämlich für

$$\lambda_1=\rho-n-1$$
$$\lambda_2=m+n+\rho-1.$$

Diesen beiden Werthen von λ entsprechend sind dann die beiden Gleichungen

$$(1-x^2)\frac{d^2v_1}{dx^2}+b_1x\frac{dv_1}{dx}=0$$

$$(1-x^2)\frac{d^2v_2}{dx^2}+b_2x\frac{dv_2}{dx}=0$$

aufzulösen, wo

$$b_1=2n+m-1$$
$$b_2=-(2n+m+1)$$

ist. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{dr_1}{dx} = C_1(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}} \qquad \frac{d^n r_2}{dx} = C_2(x^2-1)^{-\frac{2n+m+1}{2}}$$

und folglich

$$u_1 = C_1 \int (x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}} . dx^{\rho-n}$$

$$u_2 = C_2 \int (x^2-1)^{-\frac{2n+m+1}{2}} . dx^{n+m+\rho}.$$

Man erhält auf diese Art ausser der ersten Gattung particuläre Integrale der Gleichung (8), die mit X und Y bezeichnet wurden, hier zwei neue Formen von particulären Integralen, die ich für den Augenblick zur Unterscheidung mit $U_n^{m,\rho}(x)$ und $V_n^{m,\rho}(x)$ bezeichnen werde, durch die Gleichungen

$$U_n^{m,\rho}(x) = \frac{k}{(x^2-1)^{\frac{\rho+m-1}{2}}} \int (x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}} . dx^{\rho-n}$$

(13)

$$V_n^{m,\rho}(x) = \frac{k}{(x^2-1)^{\frac{\rho+m-1}{2}}} \int (x^2-1)^{-\frac{2n+m+1}{2}} . dx^{n+m+\rho},$$

wo h und k Constanten bedeuten.

Die Gleichungen (13) werden noch immer Integrale von (8) darstellen, wenn man die untere Integrationsgrenze näher bestimmt, etwa so dass

$$U_n^{m,\rho}(x) = \frac{h}{(x^2-1)^{\frac{\rho+m-1}{2}}} \int_1^x (x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}} dx^{\rho-n} \tag{14}$$

gesetzt wird, weil dadurch die ohnedies im unbestimmten Integrale enthalten gedachten Constanten nur näher bestimmt werden, und von diesem Ausdrucke lässt sich nun zeigen, dass er die zur Vervollständigung der Reihe particulärer Integrale von der Gattung $X^{m,\rho}$ noth-

wendigen Eigenschaften habe, wenigstens so lange m eine ungerade Zahl ist.

Denn erstens bleibt der Ausdruck (14) für alle positiven endlichen Werthe von x ja sogar für $x = 1$, wo er in Null übergeht, endlich, und zweitens ist er nur für $\rho > n$ von $X_n^{m,\rho}$ wesentlich verschieden, während er für $\rho < n$ mit dem letzteren zusammenfällt.

Um das erstere zu zeigen setze man

$$x-1 = 2\xi \qquad m-1 = 2\nu \qquad n+\nu = \mu$$

und erhält

$$U_n^{m,\rho}(x) = h \cdot \frac{2^{\mu-\nu}}{[\xi(\xi+1)]^{\frac{\rho}{2}+\nu}} \int_0^{\xi} \xi^{\mu}(\xi+1)^{\mu} d\xi^{\rho-\mu+\nu}$$

oder

$$U_n^{m,\rho}(x) = h \cdot \frac{2^{\mu-\nu}}{(\xi+1)^{\frac{\rho}{2}+\nu}} \cdot \xi^{\frac{\rho}{2}} \tag{15}$$

$$\left\{\frac{\Pi(2\mu)}{\Pi(\mu+\nu+\rho)}\xi^{\mu} + \binom{\mu}{1}\frac{\Pi(2\mu-1)}{\Pi(\mu+\nu+\rho-1)}\xi^{\mu-1} + \ldots + \frac{\Pi(\mu)}{\Pi(\nu+\rho)}\right\},$$

weil für m ungerade die Reihe rechts von selbst abbricht.

Dieser Ausdruck ist aber wirklich für positiv endliche x beständig endlich und wird für $x = 1$ nicht unendlich sondern $= 0$.

Was den zweiten Punkt betrifft, dass nämlich für $\rho < n$ U von X nicht wesentlich verschieden ist, so bemerke man, dass für $\rho < n$ der erste Ausdruck in (13) sich in

$$U_n^{m,\rho}(x) = h(x^2-1)^{-\frac{\rho+m-1}{2}} \frac{d^{n-\rho}(x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}}}{dx^{n-\rho}}$$

verwandeln würde, d. h.

$$\mu = n+\nu \qquad r = \rho+\nu$$

setzend

$$U_n^{m,\rho}(x) = h(x^2-1)^{-\frac{r+\nu}{2}} \frac{d^{\mu-r}(x^2-1)^{\nu}}{dx^{\mu-r}}$$

und wegen der bekannten Formel Jacobi's:

$$\frac{d^{\mu-r}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu-r}} = \frac{\Pi(\mu-r)}{\Pi(\mu+r)} \cdot (x^2-1)^r \frac{d^{\mu+r}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu+r}}$$

$$U_n^{m,\rho}(x) = h'(x^2-1)^{\frac{r-\nu}{2}} \frac{d^{\mu+r}(x^2-1)^\mu}{dx^{\mu+r}} = h''(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} \frac{d^{\rho+\nu}X_n^1}{dx^{\rho+\nu}}$$

$$= h'''(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} \frac{d^\rho X_n^m}{dx^\rho},$$

welcher Ausdruck weil $\rho < n$ mit $X_n^{m,\rho}(x)$ zusammenfällt.

Was das zweite *V* genannte Integral der Gleichung (8) anbelangt, so werde ich mich damit weiter nicht befassen, weil es in Folge des schon öfters erwähnten Grundes sich zur Darstellung von *N* und *M* eben so wenig eignet wie die *Y* genannten Functionen ähnlicher Art.

Nachdem nun das Verhalten der stetigen particulären Integrale der Gleichung (8) oder der ersten Gleichung in (6) für einen beliebigen Spielraum von ρ festgestellt ist, kehre ich zu der Entwicklung von *N* zurück. Weil bei ihrer Darstellung ρ höchstens gleich n angenommen werden kann, so reichen für die vollständigen Integrale der Gleichungen (6) aus denen sich *N* zusammensetzt, die folgenden Formen aus:

$$(16) \qquad \begin{aligned} X_\rho &= h^\rho \cdot X_n^{m,\rho}(x) + h_\rho' \cdot Y_n^{m,\rho}(x) \\ Z_\rho &= k_\rho \cdot X_\rho^{m-1}(z) + k_\rho' \cdot Y_\rho^{m-1}(z). \end{aligned}$$

Da nun der Ausdruck *N* für keinen endlichen Werth von x oder z unendlich werden kann, so müssen in der Entwicklung

$$(x+z\sqrt{x^2-1})^n = \sum_0^n{}_\rho X_\rho \cdot Z_\rho$$

alle mit *Y* bezeichneten Functionen Coëfficienten Null bekommen, wodurch man erhält

$$(17) \qquad (x+z\sqrt{x^2-1})^n = \sum_0^n{}_\rho b_n^{m,\rho} \cdot X_n^{m,\rho}(x) \cdot X_\rho^{m-1}(z),$$

wo $b_n^{m,\rho}$ noch zu bestimmende Constanten sind. Die Bestimmung geschieht dadurch, dass man bemerkt, wie für sehr grosse x die Gleichung (17) sich in

$$(1+z)^n = \sum_0^n b_n^{m,\rho} \cdot X_\rho^{m-1}(z)$$

verwandelt. Daraus folgt aber der Werth eines beliebigen Coëfficienten durch die Gleichung

$$b_n^{m,\rho} \cdot H_\rho^{m,1} = \int_{-1}^{+1} (1+z)^{n+\frac{m-2}{2}} (1-z)^{\frac{m-2}{2}} X_\rho^{m-1}(z)\, dz = J',$$

wenn man den Werth des bestimmten Integrales

$$\int_{-1}^{+1} (1-z)^{\frac{m-2}{2}} \left[X_\rho^{m-1}(z)\right]^2 dz$$

$$\left[\frac{\Pi(2\nu)}{2^\nu \Pi(\nu)\,\Pi\Pi(2\nu-1)}\right]^2 \frac{\Pi(2\nu-1+\rho)}{\Pi(\rho)} \cdot \frac{\pi}{2\nu+2\rho}$$

mit H_ρ^{m-1} bezeichnet, wie ich es im LI. Bande der Sitzungsberichte gethan habe, wo dieses Integral und noch mehrere andere zu ähnlichen Isolirungszwecken dienliche abgeleitet vorkommen.

Die Bestimmung des Integralwerthes J' geschieht dadurch, dass man $X_\rho^{m-1}(z)$ in eine nach aufsteigenden Potenzen von $1-z$ geordnete Reihe entwickelt von der Form

$$X_\rho^{m-1}(z) = \sum_0^\rho A_\rho (1-z)^\rho,$$

wodurch man findet

$$J' = 2^{p+q+1} \sum_0^\rho 2^\rho A_\rho \int_0^1 \zeta^{p+\rho}(1-\zeta)^q\, d\zeta,$$

wenn $\frac{m-2}{2} = p$ $n+p=q$ gesetzt und für z eine neue Veränderliche ζ durch die Gleichung $z=1-2\zeta$ eingeführt wird. Drückt man die in J' vorkommenden Euler'schen Integrale durch II-Functionen aus und reducirt, so findet man

$$J' = 2^{p+q+1}.$$

(18)
$$\frac{\Pi(p)\Pi(q)}{\Pi(p+q+1)} \cdot \frac{(m-1)\,m \ldots (m+\rho-2).n(n-1)\ldots(n-\rho+1)}{1.2\ldots\rho(n+m)(n+m+1)\ldots(n+m+\rho-1)}.$$

In der eben angeführten Abhandlung habe ich folgende Entwicklung abgeleitet

$$X_n^m(u) = \sum_0^n B_n^{m,\rho} \cdot X_n^{m,\rho}(x) \cdot X_n^{m,\rho}(x') \cdot X_\rho^{m-1}(z),$$

wenn

$$u = xx' - \sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x'^2-1} \cdot z$$

gesetzt wird.

Die Constanten B wurden dort auf ähnliche Weise bestimmt, indem man den x und x' sehr grosse Werthe beilegte, wodurch man erhielt:

$$\frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)} \cdot (1-z)^n = \sum_0^n B_n^{m,\rho} \cdot X_\rho^{m-1}(z)$$

und durch Isolirung

$$B_n^{m,\rho} \cdot H_\rho^{m-1} = \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)} \int_{-1}^{+1} (1-z)^{n+\frac{m-2}{2}} (1+z)^{\frac{m-2}{2}} \cdot X_\rho^{m-1}(z)\,dz.$$

Vergleicht man den Werth des Integrales rechts in der letzten Gleichung, wie er in der angeführten Abhandlung unter der Bezeichnung J vorkommt, mit J' in (18), so findet man, dass $J = (-1)^\rho J'$, folglich

$$B_n^{m,\rho} \cdot H_\rho^{m-1} = (-1)^\rho J' \cdot \frac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n)}$$

während

$$b_n^{m,\rho} \cdot H_\rho^{m-1} = J'.$$

Man ist daher im Stande $b_n^{m,\rho}$ auf folgende Art auszudrücken

$$b_n^{m,\rho} = \frac{(-1)^\rho \Pi(n)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)} \cdot B_n^{m,\rho}, \tag{19}$$

oder auch mit Benützung der schon oft gebrauchten μ und ν statt m und n, wenn zur Abkürzung

$$\frac{2^{\mu-\nu}\Pi(\mu)\Pi(2\nu)}{\Pi(2\mu)\Pi(\nu)} = L$$

gesetzt wird

$$b_n^{m,\rho} = (-1)^\rho \Pi(\mu-\nu) L . B_n^{m,\rho} \tag{20}$$

fügt man noch den Werth von $B_n^{m,\rho}$ nämlich

$$B_n^{m,\rho} = \frac{\Pi(2\nu-1)}{L^2} \cdot \frac{(-1)^\rho (2\rho+2\nu)}{\Pi(\mu-\nu-\rho)\Pi(\mu+\nu+\rho)} \tag{21}$$

hinzu, so wird auch

$$b_n^{m,\rho} = \frac{\Pi(\mu-\nu)\Pi(2\nu-1)}{L} \cdot \frac{2\rho+2\nu}{\Pi(\mu-\nu-\rho)\Pi(\mu+\nu+\rho)} \tag{22}$$

und man kann auch schreiben

$$(x+z\sqrt{x^2-1})^n = \frac{\Pi(\mu-\nu)\Pi(2\nu-1)}{L} \sum_0^n \frac{2\rho+2\nu}{\Pi(\mu-\nu-\rho)\Pi(\mu+\nu+\rho)} \tag{23}$$
$$. X_n^{m,\rho}(x) . X_\rho^{m-1}(z).$$

Die ähnliche Entwicklung von M wird dadurch hergestellt, dass man die Summe (5), die jetzt nicht mehr eine begrenzte Anzahl Glieder besitzt, in zwei Theile trennt, den ersten Theil bis einschliesslich $\rho = n$ ausdehnend, während der zweite Theil alle nachfolgenden Glieder mit Stellenzeigern $\rho > n$ begreift. Es wird also sein

$$(x+z\sqrt{x^2-1})^{-(n+m)} = \sum_0^n X_\rho . Z_\rho + \sum_{n+1}^\infty X_\rho . Z_\rho,$$

wo in der ersten Summe rechts der Form nach

$$X_\rho = h^\rho \cdot X_n^{m,\rho}(x) + h_1^\rho \cdot Y_n^{m,\rho}(x),$$

in der zweiten Summe hingegen

$$X_\rho = h^\rho \cdot U_n^{m,\rho}(x) + h_1^\rho \cdot V_n^{m,\rho}(x),$$

während in beiden Summen immer dasselbe

$$Z_\rho = k_\rho \cdot X_\rho^{m-1}(z) + k_\rho^1 \cdot Y_\rho^{m-1}(z)$$

zu setzen ist.

Ich erwähne gleich hier, dass alle in den letzten Ausdrücken mit Y und V bezeichneten Functionen nicht in Betracht kommen, weil sie sämmtlich für endliche Werthe der Grundgrösse, namentlich für Werthe < 1 unstetig werden, während die gemachte Annahme x und z reell und $\leqq 1$ das Unendlichwerden von M in diesem Bereiche von x und z ausschliesst.

Durch diese Bemerkung erhält die fragliche Entwicklung die Form

$$(v+z\sqrt{v^2-1})^{-n-m} = \sum_0^n c^\rho \cdot X_n^{m,\rho}(v) \cdot X_\rho^{m-1}(z) + \sum_{n+1}^\infty f^\rho \cdot U_n^{m,\rho}(v) \cdot X_\rho^{m-1}(z),$$

wo unter $U_n^{m,\rho}(x)$ der Ausdruck (14) oder (15) zu verstehen ist und c^ρ, f^ρ Constanten sind, die blos von $nm\rho$ abhängen und sogleich bestimmt werden sollen. Diese Bestimmung geschieht am einfachsten durch mehrmaliges Differenziren nach z, indem man nach geschehener Differenzirung und Division durch die für $x = 1$ Null werdenden Factoren wirklich $x = 1$ setzt. Dabei muss die Bestimmung der c und f getrennt vorgenommen werden, weil die X und U sich ihrem analytischen Baue nach von einander unterscheiden. Ich nehme daher zuerst eine ρmalige Differenzirung der letzten Gleichung nach z unter der Voraussetzung $\rho \leqq n$ vor. Dies gibt

$$(-1)^\rho \frac{\Pi(n+m+\rho-1)}{\Pi(n+m-1)} \cdot (x+z\sqrt{x^2-1})^{-n-m-\rho} \cdot (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}$$
$$= c^\rho \cdot (m-1)(m+1)\ldots(m+2\rho-3) X_n^{m,\rho}(x) + \Phi.$$

Bedenkt man aber, dass für $\rho < n$

$$X_n^{m,\rho}(x) = \frac{m(m+2)\ldots(m+2\rho-2)}{m(m+2)\ldots(m+2n-2)} \Pi(n-\rho) \cdot (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}} X_{n-\rho}^{m+2\rho}(x),$$

erinnert man sich ferner des Ausdruckes (15) für $U_n^{m,\rho}(x)$, so sieht man, dass nach geschehener Division durch $(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}$ alle auf das erste Glied folgenden und in Φ enthaltenen Bestandtheile der ersten und zweiten Summe dann noch immer eine gewisse mit jedem folgenden Gliede wachsende Anzahl von Factoren der Form $(x-1)^{\frac{1}{2}}$ enthalten, mithin für $x=1$ die rechte Seite der differenzirten Gleichung sich auf das erste Glied zurückzieht. Da überdies

$$X_{n-\rho}^{m+2\rho}(1) = \frac{\Pi(m+n+\rho-1)}{\Pi(m+2\rho-1)\Pi(n-\rho)},$$

so findet man

$$(24) \quad \begin{cases} c^\rho = (-1)^\rho (m+2\rho-1) \dfrac{m(m+2)\ldots(m+2n-2)}{\Pi(n+m-1)} \Pi(m-2) \\ \text{oder auch} \\ c^\rho = (-1)^\rho (2\rho+2\nu) \cdot \dfrac{1}{L} \dfrac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi(\mu+\nu)}. \end{cases}$$

Die Coëfficienten f^ρ bestimmen sich nun ganz ähnlich. Man differenzirt ρmal nach z wie früher, nur denkt man sich dabei $\rho > n$, führt dann statt x die Veränderliche $\xi = \frac{x-1}{2}$ auch auf der linken Seite ein, dividirt durch $\xi^{\frac{\rho}{2}}$ beiderseits, setzt $x=1$ d. h. $\xi=0$ und erhält so mit Benützung von (15)

$$(-1)^\rho 2^\rho \cdot \frac{\Pi(n+m+\rho-1)}{\Pi(n+m-1)}$$
$$= f^\rho \cdot h \cdot \frac{2^{\mu-\nu}\Pi(\mu)}{\Pi(\nu+\rho)} (m-1)(m+1)\ldots(m+2\rho-3)$$

und wenn hier wieder die m und n durch μ und ν ausgedrückt werden

$$f^{\rho} = c^{\rho} \cdot \frac{\Pi(\mu+\nu+\rho)}{\Pi(2\mu)} \cdot \frac{1}{h}.$$

Ich habe die Constante h in (14) und (15) absichtlich nicht näher bestimmt, um sie der sonstigen Zusammensetzung der Coëfficienten f^{ρ} gemäss passend zu wählen. Es scheint am einfachsten

$$h = \frac{\Pi(\mu+\nu+\rho)}{\Pi(2\mu)}$$

zu setzen, wodurch $f^{\rho} = c^{\rho}$ wird.

Setzt man daher fest, dass für $\rho > n$ die Function $X_n^{m,\rho}(x)$ durch

$$(25)\quad X_n^{m,\rho}(x) = \frac{1}{\Pi(2n+m-1)} \frac{\Pi(n+m+\rho-1)}{(x^2-1)^{\frac{\rho+m-1}{2}}} \int_1^x (x^2-1)^{n+\frac{m-1}{2}} \cdot dx^{\rho-n}$$

definirt werde, so nimmt die Entwicklung von M folgende Gestalt an:

$$(26)\quad (x+z\sqrt{x^2-1})^{-n-m} = \sum_0^{\infty} c_n^{m,\rho} \cdot X_n^{m,\rho}(x) \cdot X_{\rho}^{m-1}(z)$$

oder auch

$$(x+z\sqrt{x^2-1})^{-n-m}$$

$$= \frac{1}{L} \frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi(\mu+\nu)} \sum_0^{\infty} (-1)^{\rho}(2\rho+2\nu)\, X_n^{m,\rho}(x) \cdot X_{\rho}^{m-1}(z).$$

Aus den Gleichungen (17) und (26) kann man mehrere interessante Folgerungen ziehen. Sie liefern nämlich unmittelbar eine Darstellung der Functionen $X_n^m(x)$ in Form von bestimmten Integralen, die den bekannten Ausdrücken für Kugelfunctionen ähnlich sind. Setzt man nämlich in (17) wieder $\cos\eta$ an die Stelle von z und multiplicirt beide Theile der Gleichung mit $\sin\eta^{m-1}$, so erhält man beiderseits von 0 bis π nach der Veränderlichen η integrirend:

$$\int_0^\pi (x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^n \sin\eta^{m-1} d\eta$$
$$= \sum_0^n b_n^{m,\rho} \cdot X_n^{m,\rho}(x) \cdot \int_0^\pi X_\rho^{m-1}(\cos\eta) \sin\eta^{m-1} d\eta. \qquad (27)$$

Allein die Function $X_\rho^{m-1}(\cos\eta)$ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 X_\rho^{m-1}}{d\eta^2} + (m-1)\operatorname{cotg}\eta \cdot \frac{dX_\rho^{m-1}}{d\eta} + \rho(\rho+m-1) X_\rho^{m-1} = 0,$$

wie man sich durch Einführung von η statt z in die zweite Gleichung (6) überzeugt. Man bringt sie durch Multiplication mit $\sin\eta^{m-1}$ auf die Form

$$\frac{d}{d\eta}\left(\sin\eta^{m-1} \frac{dX_\rho^{m-1}}{d\eta}\right) + \rho(\rho+m-1) X_\rho^{m-1} \cdot \sin\eta^{m-1} = 0,$$

aus der dann unmittelbar folgt, dass, so lange ρ von Null verschieden, immer

$$\int_0^\pi X_\rho^{m-1}(\cos\eta) \sin\eta^{m-1} d\eta = 0 \qquad (28)$$

für $\rho = 0$ geht das Integral links über in

$$\int_0^\pi \sin\eta^{m-1} d\eta = \pi \cdot \frac{\Pi(2\nu)}{[2^\nu \Pi(\nu)]^2},$$

wenn man wieder Bequemlichkeit halber $m-1 = 2\nu$ setzt.

Durch Benützung dieser beiden letzten Formeln zieht sich aber die ganze Summe in (27) rechts auf das erste Glied zurück, so dass man erhält

$$\int_0^\pi (x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^n \sin\eta^{m-1} d\eta = b_n^{m,0} \cdot X_n^{m,0}(x) \cdot \pi \cdot \frac{\Pi(2\nu)}{[2^\nu \Pi(\nu)]^2}.$$

Bemerkt man dass

$$X_n^{m,0}(x) = L\Pi(\mu-\nu) \cdot X_n^m(x)$$

und benützt den Ausdruck (22), nachdem man darin $\rho = 0$ gesetzt hat, so findet man

$$(29) \qquad \frac{2\pi}{2\mu+1} \cdot X_n^m(x) = H_n^m \int_0^\pi (x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^n \sin\eta^{m-1} d\eta,$$

indem man abkürzend

$$\int_0^\pi \left[X_n^m(\cos\gamma)\right]^2 \sin\gamma^m d\gamma = \frac{\Pi(\mu+\nu)}{\Pi(\mu-\nu)}\left[\frac{2^\nu \Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)}\right]^2 \cdot \frac{2}{2\mu+1} = H_n^m$$

setzt.

Derselbe Hergang an der Gleichung (26) eingeleitet, führt auf einen ähnlichen Ausdruck, indem man findet

$$(30) \qquad \frac{2\pi}{2\mu+1} \cdot X_n^m(x) = H_n^m \int_0^\pi \frac{\sin\eta^{m-1} d\eta}{(x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^{n+m}}.$$

Ganz auf ähnliche Weise erhält man auch noch aus (17) und (26) durch Isolirung der späteren Glieder Integralausdrücke für die $X_n^{m,\rho}(x)$ und zwar:

$$(31) \int_0^\pi (x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^n \cdot X_\rho^{m-1}(\cos\eta) \sin\eta^{m-1} d\eta = b_n^{m,\rho} \cdot H_\rho^{m-1} \cdot X_n^{m,\rho}(x)$$

und

$$(32) \qquad \int_0^\pi \frac{X_\rho^{m-1}(\cos\eta)\sin\eta^{m-1} d\eta}{(x+\cos\eta\sqrt{x^2-1})^{n+m}} = c_n^{m,\rho} \cdot H_\rho^{m-1} \cdot X_n^{m,\rho}(x).$$

Es sind daher für $\rho < n$ zwei Integralausdrücke für $X_n^{m,\rho}(x)$ vorhanden, für $\rho > n$ jedoch nur ein einziger und dies zwar in der Gestalt der Gleichung (32).

Eine andere Anwendung der beiden Entwicklungen (17) und (26) besteht aber darin, dass man durch zweckmässige Verbindung derselben zu einem neuen Ausdrucke für X_n^m mit der zusammengesetzten Grundgrösse

$$\cos\Theta = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta' \cdot \cos\varphi$$

in Form eines Doppelintegrales gelangt.

In der That, es werde

$$\cos\omega = \cos\varphi\cos\eta + \sin\varphi\sin\eta\cos\vartheta$$

gesetzt und man betrachte das Doppelintegral

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{(x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^n}{(x'+\cos\eta\sqrt{x'^2-1})^{n+m}}\sin\vartheta^{m-2}\,.\,\sin\eta^{m-1}\,d\vartheta\,d\eta,$$

so lässt sich eine Integration, die nach ϑ nämlich, sogleich ausführen. Es handelt sich, weil ϑ nur im Zähler des Bruches unter den Integralzeichen vorkommt, zunächst um die Ermittlung von

$$\int_0^\pi (x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^n\,.\,\sin\vartheta^{m-2}d\vartheta.$$

Benützt man jetzt die Entwicklung (17), dort $\cos\omega$ statt z setzend, so erhält man

$$\int_0^\pi (x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^n\,.\sin\vartheta^{m-2}d\vartheta = \sum_0^n b_n^{m,\rho}\,.\,X_n^{m,\rho}(x)$$
$$\int_0^\pi X_\rho^{m-1}(\cos\omega)\,.\,\sin\vartheta^{m-2}d\vartheta.$$

Es ist aber allgemein

$$X_r^s(\cos\omega) = \sum_0^r B_r^{s,\rho}\,.\,X_r^{s,\rho}(\cos\varphi)\,.\,X_r^{s,\rho}(\cos\eta)\,.\,X_\rho^{s-1}(\cos\vartheta)$$

und hieraus

$$\int_0^\pi X_r^s(\cos\omega)\,.\,\sin\vartheta^{s-1}d\vartheta$$
$$= B_r^{s,0}\,.\,X_r^{s,0}(\cos\varphi)\,.\,X_r^{s,0}(\cos\eta)\,.\int_0^\pi \sin\vartheta^{s-1}d\vartheta,$$

wenn man sich der Formel (28) erinnert.

Vereinfacht man die rechte Seite der letzten Gleichung auf dieselbe Art, wie dies schon früher bei einem ähnlichen Falle geschehen ist, so findet man

$$H_r^s\int_0^\pi X_r^s(\cos\omega)\,.\,\sin\vartheta^{s-1}d\vartheta = \frac{2\pi}{2r+s}\,X_r^s(\cos\varphi)\,.\,X_r^s(\cos\eta)$$

und mit Benützung der Ausdrücke für $b_n^{m,\rho}$ und $c_n^{m,\rho}$ aus (20) und (24)

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{(x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^n}{(x'+\cos\eta\sqrt{x'^2-1})^{n+m}} \sin\vartheta^{m-2}.\sin\eta^{m-1} d\vartheta\, d\eta$$

$$= \Pi(2\nu-1)\frac{\Pi(\mu-\nu)}{\Pi(\mu+\nu)}.2\pi\sum_0^n{}^{\rho} B_n^{m,\rho}.X_n^{m,\rho}(x).X_n^{m,\rho}(x').X_\rho^{m-1}(\cos\varphi).$$

Die Summe rechts ist aber nichts anderes als die Entwicklung von X_n^m für die zusammengesetzte Grundgrösse

$$xx' - \sqrt{x^2-1}\,.\,\sqrt{x'^2-1}.\cos\varphi,$$

die für $x=\cos\vartheta$ $x'=\cos\vartheta'$ in $\cos\Theta$ übergeht, folglich hat man

$$2\pi\,.\,X_n^m(\cos\Theta) = \frac{1}{\Pi(2\nu-1)}\cdot\frac{\Pi(\mu+\nu)}{\Pi(\mu-\nu)}$$

(33)
$$\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{(x+\cos\omega\sqrt{x^2-1})^n}{(x'+\cos\eta\sqrt{x'^2-1})^{n+m}} \sin\vartheta^{m-2}.\sin\eta^{m-1} d\vartheta\, d\eta,$$

wenn man rechts $x=\cos\vartheta$ $x'=\cos\vartheta'$ setzt.

Ich bemerke nur noch, dass die Gleichung (33), welche für $m>1$ gilt, noch immer richtig bleibt, wenn man in dem unter dem doppelten Integralzeichen vorkommenden Bruche x mit x' und ω mit η vertauscht.

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND. IV. HEFT.

Jahrgang 1865. — November.

(Mit 6 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1866.

INHALT.

XXIV. Sitzung vom 3. November 1865: Übersicht 483

Stefan, Über die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen 485

XXV. Sitzung vom 9. November 1865: Übersicht 493

Popper, Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten. (Mit 1 Tafel.) 496

XXVI. Sitzung vom 16. November 1865: Übersicht 539

Leidesdorf und *Stricker*, Studien über die Histologie der Entzündungsherde. (Mit 1 Tafel.) 534

XXVII. Sitzung vom 30. November 1865: Übersicht 543

v. Littrow, Über eine Modification des Hansen'schen Registrirapparates. (Mit 1 Tafel.) 546

Lippich, Über einen neuen Fallapparat. (Mit 2 Tafeln.) . . . 549

Ditscheiner, Eine Bemerkung zu Herrn Lewis M. Rutherfurd's Construction des Spectroscopes. (Mit 1 Tafel.) 562

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

9.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

XXIV. SITZUNG VOM 3. NOVEMBER 1865.

Herr Regierungsrath A. Ritter v. Ettingshausen im Vorsitz.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Beiträge zur näheren Kenntniss der Amphipoden des adriatischen Meeres", von Herrn Prof. C. Heller in Innsbruck.

Die betreffenden Untersuchungen wurden mit Unterstützung der Akademie ausgeführt.

„Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen", von Herrn Prof. Rud. Niemtschik in Graz.

Das w. M. Herr Prof. J. Stefan überreicht eine Abhandlung „über die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen".

Das w. M. Herr Prof. R. Kner spricht über fossile Schirmquallen.

Derselbe legt ferner den I. Theil des „ichthyologischen Berichtes über eine (mit Unterstützung der Akademie) nach Spanien und Portugal unternommene Reise" von Herrn Dr. Fr. Steindachner vor.

Herr Felix Karrer übergibt eine Abhandlung „über das Auftreten von Foraminiferen in den älteren Schichten des Wiener Sandsteins".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 20 & 21. Wien, 1865; 8°.

Association Normande: Annuaire des cinq départements de la Normandie. 31ᵉ Année 1865. Caen. & Paris; 8°.

Astronomische Nachrichten. No. 1553—1554. Altona, 1865; 4°.

Baer, Karl Ernst v., Nachrichten über dessen Leben und Schriften, mitgetheilt von ihm selbst. St. Petersburg, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. No. 15—16. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 16e—17e Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Doctoren-Collegium der medicin. Facultät in Wien: 13. & 14. Jahres-Bericht. Wien, 1865; 8°.

Dusseau, J. L., Musée Vrolik. Catalogue de la collection d'anatomie humaine, comparée et pathologique. Amsterdam, 1865; 8°

Gelehrten-Gesellschaft, k. k., in Krakau: Rocznik. Tom VIII & IX. W Krakowie, 1864; 8° — Louis, Józefa, Prawo Spadkowe. Krakow, 1865; 8°.

Gesellschaft, physikalisch-medicinische: Würzburger medicinische Zeitschrift. V. Band, 1.—5. Heft. Würzburg, 1865; 8°.

— Naturforschende, in Bern: Mittheilungen aus dem Jahre 1865. No. 553—579. Bern, 1864; 8°.

— Schweizerische Naturforschende: Verhandlungen. 48. Versammlung am 22., 23. und 24. August 1864 zu Zürich. Jahresbericht 1864. Zürich; 8°.

— Schlesische, für vaterländische Cultur: Abhandlungen. Philos. histor. Abtheilung: 1864. Heft 2.— Abtheilung für Naturwissenschaften und Medicin: 1864. Breslau, 1864; 8°— 42. Jahresbericht. Breslau, 1865; 8°.

Gesellschaft, gelehrte estnische: Schriften. No. 4. Dorpat, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. No. 43 bis 44. Wien, 1865; 8°.

Grunert, Joh. Aug.: Archiv der Mathematik und Physik. XLIII. Theil, 3. & 4. Heft; XLIV. Theil, 1. Heft. Greifswald, 1865; 8°.

Heyne, Wilhelm, Das Traciren von Eisenbahnen in vier Beispielen und einem Anhange. Mit Atlas. Hermanstadt, 1864; 8° & Folio.

Institut des Provinces: Annuaire. 1865. Paris & Caen; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie von H. Will. Für 1864. I. Heft. Giessen, 1865; 8°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. No. 30—31. Wien, 1865; 4°.

Osservatorio, Reale, di Palermo: Bullettino meteorologico No. 9. Settembre 1865. Folio.

Philomathie in Neisse: 14. Bericht. Neisse, 1865; 8°.

Reader. No. 147—148, Vol. VI. London, 1865; Folio.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XV. Band. Jahrg. 1865. August- und September-Heft. Wien; 8°.

Scheffler, Hermann, Die physiologische Optik. I. und II. Theil. Braunschweig, 1864; 8°.

Sidler, Georg, Über die Wurflinie im leeren Raume. Bern, 1865; 4°.

Society, The Royal, Asiatic, of Great Britain & Ireland: New Series. Vol. I., Part 2. London, 1865; 8°.

— The Chemical: Journal. Ser. 2, Vol. III. April — Juni 1865. London; 8°.

— The Natural History, of Dublin: Proceedings for the Session 1863—64. Vol. IV., Part 2. Dublin, 1865; 8°.

— The Boston, of Natural History: Proceedings. Vol. IX., Sign. 21—24. 8°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg. Würtembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte. XX. Band, 2. & 3. Heft; XXI. Band, I. Heft. Stuttgart, 1864 & 1865; 8°.

— naturhistorischer, der preuss. Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XXI. Jahrg. III. Folge. I. Band, 1. & 2. Hälfte. Bonn, 1864; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift: XV. Jahrg. Nr. 84—87. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XIV. Jahrg. No. 26. Gratz, 1865; 4°.

Über die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen.

Von dem w. M. J. Stefan.

Das von Soleil bei seinem Saccharimeter angewandte Compensationsverfahren gründet sich auf die Voraussetzung, dass sich zu jeder Säule einer rechts drehenden Zuckerlösung eine links drehende Quarzplatte von geeigneter Dicke finden lasse, so dass die beiden zusammen einen Körper darbieten, welcher die Eigenschaft, die Polarisationsebene zu drehen, nicht mehr besitzt. In den Beschreibungen und Erklärungen des Soleil'schen Saccharimeters wird diese Voraussetzung immer als eine selbstverständlich richtige betrachtet. Sie ist dies jedoch durchaus nicht. Denn der Winkel, um den ein Körper die Polarisationsebene eines Strahles dreht, ist abhängig von der Farbe des Strahles oder von der Wellenlänge, durch welche die Farbe bestimmt ist. Sollen sich also eine Quarzplatte und eine Zuckerlösung compensiren, so müssen die Winkel, um welche diese beiden Körper die Polarisationsebene drehen, für jede beliebige Farbe gleich gross und entgegengesetzt sein. Kann daher der Winkel, um welchen eine Quarzplatte von einem Millimeter Dicke die Polarisationsebene dreht, seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge nach bestimmt werden durch das Gesetz $f(\lambda)$, so muss er für jede beliebige Zuckerlösung ausgedrückt werden können durch $kf(\lambda)$, worin k eine die Wellenlänge nicht mehr enthaltende Grösse ist, die nur mehr von der Concentration der Zuckerlösung und der Länge der vom Licht durchlaufenen Säule abhängt.

Um das Stattfinden einer solchen Beziehung direct zu erweisen, ist also nöthig, die Winkel zu bestimmen, um welche verschiedene Zuckerlösungen die Polarisationsebene von Strahlen bestimmter Farben drehen, und diese Winkel mit den entsprechenden einer Quarzplatte zu vergleichen.

Die Anordnung des zu diesen Messungen gebrauchten Apparates ist dieselbe, welche ich schon in einer früheren Abhandlung über die Dispersion des Lichtes durch Drehung der Polarisationsebene im Quarz [1]) beschrieben habe. Directes Sonnenlicht wird von einem Spiegel in den Polarisationsapparat geschickt. Dieser besteht aus zwei Nicol'schen Prismen, zwischen welchen sich die mit der Zuckerlösung gefüllte Röhre von 400 Millim. Länge befindet. Das aus dem Polarisationsapparate tretende Licht fällt auf die Spalte eines Spectralapparates. Handelt es sich um Bestimmungen am rothen oder violetten Ende des Spectrums, so wird das aus dem Polarisationsapparate kommende Licht durch eine Sammellinse, in deren Brennpunkt sich die Spalte des Spectralapparates befindet, auf diese concentrirt. Um dem Auge die Beobachtung zu erleichtern und auch das falsche Licht im Spectralapparate unschädlicher zu machen, wird im ersten Falle die Spalte mit einem rothen, im zweiten Falle mit einem blauen Glase verdeckt, oder auch ein solches Glas zwischen dem Heliostaten und dem Polarisationsapparate angebracht. Durch Drehung des analysirenden Nicols wird der im Spectrum auftretende dunkle Streifen der Reihe nach mit den einzelnen Fraunhofer'schen Linien zur Coincidenz gebracht. Die Drehung des Nicols gibt den Winkel, um welchen die Polarisationsebene jeder einzelnen Fraunhofer'schen Linie durch die Zuckerlösung gedreht wird.

Reine Stücke weissen Candiszuckers wurden in destillirtem Wasser gelöst. Drei Lösungen wurden bereitet.

I. Lösung. Es wurden 10 Grm. Zucker in 90 Grm. Wasser gelöst. Das specifische Gewicht wurde bei einer Temperatur von $21^{\circ}5$ R. $= 1{\cdot}0375$ gefunden.

II. Lösung. Es wurden 20 Grm. Zucker in 80 Grm. Wasser gelöst. Specifisches Gewicht bei 20° R. $= 1{\cdot}0804$.

III. Lösung. Es wurden 30 Grm. Zucker in 70 Grm. Wasser gelöst. Specifisches Gewicht bei $21^{\circ}5$ R. $= 1{\cdot}1254$.

Die beobachteten Drehungen sind in der folgenden Tabelle enthalten.

---

[1]) Sitzungsber. L. 88.

Drehung der Lösung.

	I.	II.	III.
A	—	33°25	—
a	—	37 44	—
B	19°75	41 08	64°25
C	21 77	45 88	71 37
D	27 44	57 69	89 63
E	34 92	73 25	114 50
b	36 38	75 75	119 30
E	42 00	87 75	136 12
G	54 42	114 25	179 00
H	—	135 75	—

Die Winkel, um welche eine 1 Millim. dicke Quarzplatte die Polarisationsebene der den Fraunhofer'schen Hauptlinien entsprechenden Strahlen dreht, sind nach einer in der oben erwähnten Abhandlung mitgetheilten Bestimmung

B	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
15°55	17°22	21°67	27°46	32°69	42°37	50°98

Dividirt man die obigen Drehungen der Zuckerlösungen zuerst durch 4, um sie auf eine Säulenlänge von 100 Millim. zu reduciren, und dann durch die entsprechenden Drehungen des Quarzes, so bedeuten die so erhaltenen Quotienten die Dicken der Quarzplatten, welche für jede einzelne Farbe im Stande sind, eine 100 Millim. lange Säule der obigen Zuckerlösungen zu compensiren. Diese Quotienten sind

	I.	II.	III.
B	0·318	0·661	1·033
C	0·316	0·666	1·036
D	0·316	0·665	1·034
E	0·318	0·667	1·042
F	0·321	0·671	1·041
G	0·321	0·674	1·056
H	—	0·666	—

Unterscheiden sich die Gesetze, welche die Abhängigkeit der Drehung von der Wellenlänge für Quarz und Zucker bestimmen, von einander nur durch einen constanten Factor, so müssten die in einer

und derselben Verticalreihe stehenden Quotienten alle gleich sein. Die Tabelle zeigt, dass diese Gleichheit nicht in aller Strenge, wohl aber in einem grossen Grade von Annäherung stattfindet. Denn die grössten Abweichungen betragen nur 1 bis 2 Procent des Quotientenwerthes. Die grösste Differenz in den Dicken der compensirenden Quarzplatten beträgt für die erste Lösung 0·005, für die zweite 0·01, für die dritte 0·02 Millim., Grössen, die beim gewöhnlichen Gebrauche des Saccharimeters von den Beobachtungsfehlern überschritten werden.

Besonders zu bemerken ist aber, dass obige Quotienten von der Linie *D* an für die gegen Roth hin liegenden Strahlen eine schwache, für die gegen Violett hin liegenden eine stärkere Zunahme zeigen. Denkt man sich die beiden Fächer, in welche die Schwingungsebenen der verschiedenen Farben durch eine Quarzplatte und eine Zuckerlösung von gleichem Drehungsvermögen für den Strahl *D* ausgebreitet werden, so auf einander gelegt, dass die Schwingungsebenen der Strahlen *D* zusammenfallen, so werden die Schwingungsebenen in dem durch die Zuckerlösung erzeugten Fächer auf der Seite des Roth dichter, auf der Seite des Violett aber weniger dicht angeordnet sein, als in dem durch den Quarz erzeugten Fächer. Der Unterschied aber wird namentlich auf der Seite des Roth nur ein geringer sein.

Eine so grosse Übereinstimmung der Rotationsdispersion, wie sie zwischen Quarz und Rohrzucker stattfindet, besteht nicht auch zwischen Quarz und anderen drehenden Substanzen. Nehmen wir das Citronenöl, ein nicht rectificirtes linksdrehendes und ein rectificirtes rechtsdrehendes Terpentinöl, für welche Wiedemann [1]) folgende 100 Millim. langen Säulen zukommende Drehungen gefunden hat.

	Citronenöl	Links drehendes Terpentinöl	Rechts drehendes Terpentinöl
B	34°0	21°5	—
C	37 9	23 4	10°9
D	48 5	29 3	14 05
E	63 3	36 8	18 7
F	77 5	43 6	23 2
G	106 0	55 9	32 75

[1]) Pogg. Ann. LXXXII, p. 222.

Bruch der Winkel, um welchen eine 100 Millim. lange Säule reinen Zuckers die Polarisationsebene dieses Strahles dreht.

Man kann zuerst die obigen Drehungen der verschiedenen Lösungen reduciren auf die einer Lösung, welche in einem bestimmten Volumen ein Procent Zucker enthält. Ist s das specifische Gewicht einer Lösung, also das Gewicht der Volumseinheit, so enthält diese ps Procent Zucker, wenn p Gewichtstheile Zucker in $100-p$ Gewichtstheilen Wasser gelöst wurden. Die gedachte Reduction geschieht also dadurch, dass man die beobachteten Drehungen jeder Lösung durch das zugehörige ps dividirt. Multiplicirt man die so erhaltenen Zahlen mit 100, so hat man die Drehungen für eine 100procentige Lösung, also für reinen Zucker. Die weitere Division durch 4, d. i. Reduction auf die Säulenlänge 100 Millim., gibt dann die molecularen Drehungsvermögen. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Zuckerlösung

	I.	II.	III.	Mittel
A	—	38°47	—	38°47
a	—	43 32	—	43 32
B	47°59	47 53	47°58	47 56
C	52 46	53 08	52 57	52 70
D	66 12	66 75	66 37	66 41
E	84 15	84 75	84 79	84 56
b	87 66	87 64	88 34	87 88
F	101 21	101 53	100 80	101 18
G	131 13	132 19	132 55	131 96
H	—	157 06	—	157 06

Vor Kurzem hat Wild in einer selbstständig erschienenen Schrift [1]) eine mit ausgezeichneter Genauigkeit ausgeführte Bestimmung des molecularen Drehungsvermögens des Zuckers für das Licht der Natriumflamme veröffentlicht. Die von ihm dafür gefundene Zahl ist 66°417, welcher das Mittel aus meinen mit weniger Sorgfalt ausgeführten Messungen ganz nahe kommt.

Durch diese Schrift wurde ich auch aufmerksam gemacht auf die schon früher von Arndtsen [2]) gemachten Bestimmungen der

---

[1]) Über ein neues Polaristrobometer (Saccharimeter, Diabetometer). Bern, 1865.

[2]) Pogg. Ann. CV, p. 314.

INHALT.

Seite

XXIV. Sitzung vom 3. November 1865: Übersicht 483

Stefan, Über die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen 486

XXV. Sitzung vom 9. November 1865: Übersicht 493

Popper, Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten. (Mit 1 Tafel.) 496

XXVI. Sitzung vom 16. November 1865: Übersicht 530

Leidesdorf und *Stricker*, Studien über die Histologie der Entzündungsherde. (Mit 1 Tafel.) 534

XXVII. Sitzung vom 30. November 1865: Übersicht 543

v. Littrow, Über eine Modification des Hansen'schen Registrirapparates. (Mit 1 Tafel.) 546

Lippich, Über einen neuen Fallapparat. (Mit 2 Tafeln.) . . 549

Dätscheiner, Eine Bemerkung zu Herrn Lewis M. Rutherfurd's Construction des Spectroscopes. (Mit 1 Tafel.) 563

XXV. SITZUNG VOM 9. NOVEMBER 1865.

Herr Prof. J. Redtenbacher im Vorsitze.

Herr Prof. Dr. C. Th. v. Siebold in München dankt, mit Schreiben vom 17. September, für seine Wahl zum auswärtigen correspondirenden Mitgliede der Classe, so wie für das übersendete Diplom.

Herr J. Popper überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academy, The National, of Sciences: Report for 1863. Washington, 1864; 8°. — Annal for 1863 — 1864. Cambridge, 1865; 8°.

— The American, of Arts and Sciences: Proceedings. Vol. VI. Sign. 23 — 38. 8°.

— of Natural Sciences of Philadelphia: Proceedings. 1864, Nro. 1 — 5. January — December. Philadelphia, 1864; 8°.

Agassiz, Alexander, Embryology of the Starfish. (From Vol. V. of L. Agassiz Contrib. to the Nat. Hist. of the U. St.) Cambridge, 1864; 4°.

Astronomical Journal. Vol. III. Nro. 21 — 24. 1854; Vol. V. November, 1856, to December 1858; Vol. VI. January 1859, to February, 1861. Cambridge & Albany, 1854, 1858, 1861; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. Nro. 17.

Cosmos 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 18e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Ermerins *Franciscus Zacharias, Hippocratis et aliorum medicorum veterum reliquiae. Vol. III. Trajecti ad Rhenum, MDCCCLXIV;* 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 45. Wien, 1865; 8°.

Harvard College: Report of the Committee of the Observers. In the Year 1864. Boston, 1865; 8°.

Istituto, R., tecnico di Palermo: Giornale di scienze naturali ed economiche publicato per cura del Consiglio di perfezionamento annesso al —. Vol. I. Fasc. 1. Palermo, 1865; 4°.

Lyceum of Natural History of New York: Annals. Vol. VIII. Nr. 2 & 3. New York, 1864; 8°. — Charter, Constitution, and By-Laws. 1864; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. IX. Heft. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 213e Livraison. Toure VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Reader. Nro. 149, Vol. VI. London, 1865; Folio.

Smithsonian Institution: Annual Report for the Year 1863. Washington, 1864; 8°. — Smithsonian Contribution to Knowledge. Vol XIV. Washington, 1865; 4°. — Results of Meteorological Observations from the Year 1854 to 1859. Vol. II., Part 1. Washington, 1864; 4°.

Society, The American Philosophical, of Philadelphia: Transactions. N. S. Vol. XIII., Part 1. Philadelphia & London, 1865; 4°. — Proceedings. Vol. IX. Nro. 71 — 72. 1864. Philadelphia, 1865; 8°. — List of the Members. January 1865. 8°.

— The Asiatic, of Bengal: Journal. N. S. Part I. Nro. 1 — 2. 1865; Part II., Nro. 1 — 2. 1865; Index and Contents of Vol. XXXIII. 1864. Calcutta, 1864 & 1865; 8°.

— The Homoeopathic Medical, — of the State of New York: Transactions. Vol II. For the Year 1864. Albany, 1864; 8°. — Annual Report. 1863. Albany, 1863; 8°.

— The Portland, of Natural History: Journal. Vol. I. Nr. 1. Portland, 1864; 8°. — Proceedings. Vol. I., Part 1. Portland, 1862; 8°.

— The Linnean, of London: Transactions. Vol XXIV., Part 3. London, 1864; Vol. XXV., Part 1. London, 1865; 4°. — Journal. Botany. Vol. VIII. Nr. 31 & 32; Vol. IX. Nr. 33 & 34. London, 1864 & 1865; 8°. — Journal of the Proceedings. Zoology. Vol. VIII. Nr. 30. London, 1865; 8°. — List. 1864. 8°.

— The Zoological, of London: Transactions. Vol. V., Part 4. London, Paris & Leipzig, 1865; 4°. — Proceedings for

8°.

Studenten-Kalender, Österreichischer. Herausgegeben von Karl Czuberka. II & III. Jahrgang. 1865 & 1866. 12°.

Trinity College, Dublin: Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at —. Vol. I. 1840—1843. Dublin, 1865; 4°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 88—89. Wien, 1865; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins: XVII. Jahrg. 10. Heft. Wien, 1865; 4°.

Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten.

Von **J. Popper.**

(Mit 1 Tafel.)

Die vorliegende Abhandlung hat zum Zwecke, die Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, wenn sie reelle Glieder und keine periodischen Functionen enthalten, zusammenhängend und systematisch zu entwickeln und das allgemeine Convergenzkriterium für den Fall anzugeben, als das allgemeine Glied der Reihe — oder die Function unter dem Integralzeichen — algebraische, Exponential-, logarithmische Functionen oder deren Combinationen enthält oder, dass doch mindestens, wenn höhere Transcendenten auftreten, diese sich für die im Unendlichen stehenden Glieder als Functionen grosser Zahlen auf die erwähnten elementaren Transcendenten näherungsweise transformiren lassen.

Der hier eingehaltene Gang ist im Wesentlichen folgender: Zuerst wird dasjenige, was sich über die Convergenz im Allgemeinen aussagen lässt, und zwar mit Zuhülfenahme einer anschaulichen Darstellung, entwickelt. Hierauf wird, um zu dem oben erwähnten Convergenzkriterium zu gelangen, eine elementare Transcendente nach der andern als allgemeines Glied einer unendlichen Reihe vorausgesetzt und das zugehörige Kennzeichen der Convergenz aufgestellt; zum Schluss ergibt sich dann durch Zusammenfassung der einzelnen das allgemeine Merkmal, welches sehr leicht anzuwenden ist und alle bisher einzeln aufgestellten — von Gauss, Cauchy, Raabe, Bertrand, O. Bonnet u. s. w. — als specielle Fälle in sich begreift.

Für die formelle Beweisführung wurde festgehalten, keinen Satz mit solchen Hülfsmitteln zu deduciren, die der Natur der Sache nach erst in der weiteren Forschung zum Vorschein kommen; hieraus erklärt sich, warum unter Anderm im dritten Abschnitte die Substitution neuer Variabeln, die in bestimmten Integralen im Allgemeinen gar keines Beweises bedarf, in der Theorie der Reihen vorerst abgeleitet werden musste.

Erste Abtheilung.

Convergenz unendlicher Reihen.

Definitionen. 1. Unter einer unendlichen Reihe wird die Reihenfolge der Glieder $u_0+u_1+u_2\ldots+u_n+\ldots$ verstanden, die nach einem gemeinschaftlichen Gesetze gebaut und ins Unendliche fortgesetzt gedacht werden. — Es können stets die Glieder als positiv vorausgesetzt werden.

2. Eine unendliche Reihe heisst convergent, α) Wenn die Summe $S_n=u_0+u_1+\ldots u_n$ für ein unendlich grosses n sich einer gewissen Grenze S nähert, hieraus folgt sogleich β) Eine Reihe ist auch convergent, wenn die Summe noch so vieler im Unendlichen stehenden Glieder unendlich wenig beträgt. — Diese Summe heisse die Ergänzung der Reihe (Euler).

Bezeichnungen. 1. Ist $\varphi(n)$ eine Function von n, so stelle $\Delta\varphi(n)$ die Differenz $\varphi(n+1)-\varphi(n)$ vor; $\Delta\varphi(n)$ heisse die erste, $\Delta^2\varphi(n)=\Delta\varphi(n+1)-\Delta\varphi(n)$ die zweite, $\Delta^r\varphi(n)$ die r^{te} Differenz von $\varphi(n)$.

2. Wenn in den Ausdrücken $\Delta\varphi(n)$, $\Delta^2\varphi(n)\ldots.n$ unendlich gross angenommen wird, und in der Entwicklung der Operationen die unendlichen Grössen der höchsten Ordnung allein beibehalten werden, so entstehen im Wesentlichen identische Ausdrücke mit den Differentialquotienten $\frac{d\varphi(n)}{dn}=\frac{\varphi(n+dn)-\varphi(n)}{dn}$, also entsprechend $\Delta\varphi(n)_{n=\infty}=\frac{\varphi(n+1)_{n=\infty}-\varphi(n)_{n=\infty}}{1}$ u. s. f.; wir nennen daher $\Delta\varphi(n)$, $\Delta^2\varphi(n)\ldots$ für $n=\infty$ die erste, zweite... Derivirte von $\varphi(n)$.

Hülfsconstructionen. I. Geometrische Darstellung einer unendlichen Reihe: In Fig. 1 sei $Ox\perp Oy$, $\sphericalangle yOz=45^\circ$, so sollen die Perpendikel $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$.. die ins Unendliche abnehmenden Reihenglieder u_n, u_{n+1}, u_{n+2},.. darstellen.

II. Geometrische Darstellung der derivirten Functionen: 1. Wenn in Fig. 1 $u_n=\frac{1}{\varphi(n)}$ und $u_{n+1}=\frac{1}{\varphi(n+1)}$ ist, so ist die Linie $O\alpha'=\frac{1}{\Delta\varphi(n)}$ und für sehr nahe an O stehende Glieder $O\alpha'=\frac{1}{\varphi'(n)}$.

Beweis. Es ist:

$$b\beta : O\alpha' = \alpha\beta : \alpha O \text{ oder auch } u_{n+1} : O\alpha' = u_n - u_{n+1} : u_n,$$

also

$$O\alpha' = \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}} \text{ und } O\alpha' \text{ auch} = \frac{1}{\varphi(n+1) - \varphi(n)} =$$

$$= \frac{1}{\Delta\varphi(n)} \text{ w. z. b. w.}$$

2. Wenn in Figur 2 Alles wie in Fig. 1 und ausserdem

$\sphericalangle y'Oz' = 45°$, ferner $\alpha'a' \perp$ auf Ox, so ist $O\alpha'' = \frac{1}{\Delta^2\varphi(n)}$,

also die reciproke zweite Derivirte von $\varphi(n)$.

Beweis. Nach Construction ist

$$\alpha'a' = \frac{1}{\Delta\varphi(n)} \text{ und eben so } \beta'b' = \frac{1}{\Delta\varphi(n+1)},$$

daher muss genau wie in I.:

$$O\alpha'' = \frac{1}{\Delta\varphi(n+1) - \Delta\varphi(n)} = \frac{1}{\Delta^2\varphi(n)} \text{ sein und lim } O\alpha'' = \frac{1}{\varphi''(n)}.$$

Zusatz. Würde, wie in Fig. 3. diese Construction fortgesetzt, so erhielte man successive:

$$O\alpha = \frac{1}{\varphi(n)},\ O\alpha' = \frac{1}{\Delta^1\varphi(n)},\ O\alpha'' = \frac{1}{\Delta^2\varphi(n)},\ O\alpha''' = \frac{1}{\Delta^3\varphi(n)} \ldots;$$

es erhöht also jeder weitere Quadrant den Index der Derivation um eine Einheit; unter Annahme der Stetigkeit der Operation des Derivirens und Feststellung der interpolirenden Function würde hiernach Fig. 4 die Derivationen mit — in der Ebene reeller — allgemeiner Ordnungszahl darstellen; für $\varphi(n) = e^{a \cdot n}$ z. B. also die logarithmische Spirale. Diese Derivirten finden in Folgendem keine Anwendung und seien daher hier nur des Zusammenhanges wegen erwähnt.

Folgesatz. Aus den bisherigen Bezeichnungen folgt: Wenn $u_n = \frac{1}{\varphi(n)}$ und ferner $\alpha)$ $\Delta\varphi(n) = 0$, so hat die vorgelegte Reihe constante Glieder; $\beta)$ für $\Delta\varphi(n) < 0$ steigende und $\gamma)$ für $\Delta\varphi(n) > 0$ fallende Glieder.

Reihe. In Fig. 5 ist Alles wie in Fig. 1; ferner $aB \parallel \alpha b$, $BC \parallel \beta c$ u. s. w., so wird offenbar

$$a\alpha = u_n;\ B\beta = u_n + u_{n+1};\ C\gamma = u_n + u_{n+1} + u_{n+2}$$

u. s. w. sein. Das Polygon $aBCD\ldots$ heisse Summenlinie der Reihe, dieselbe wird im Unendlichen zu einer krummen Linie und eine unendliche Reihe wird daher convergent, wenn die Summenlinie die Ox in endlicher Entfernung trifft.

Ableitung des Convergenskennzeichens.

Erster Abschnitt.

Lehrsatz I. Eine Reihe convergirt stets, wenn $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ bleibt (Cauchy).

Beweis. In Fig. 5 ist im $\Delta\alpha\beta b$

$$\operatorname{tg}\gamma_n = \frac{b\beta}{\alpha O - \beta O} = \frac{u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1};$$

nach der Voraussetung daher $\operatorname{tg}\gamma_n < \infty$, also $\sphericalangle\gamma < 90°$; daher schneidet die Summenlinie die Ox, also muss der Abstand des Durchschnittspunktes von O endlich sein und die Reihe convergent.

Lehrsatz II. Eine geometrische Progression convergirt, wenn der Quotient zweier auf einander folgender Glieder $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$ ist, und zwar nur in diesem Falle.

Beweis. Wenn $\sphericalangle\gamma_n = \gamma_{n+1} = \gamma_{n+2} = \ldots$ so ist

$$\frac{1}{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1} = \frac{1}{\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} - 1} = \frac{1}{\frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} - 1}$$

u. s. w., also auch $u_n u_{n+2} = u_{n+1}^2$, $u_{n+1} u_{n+3} = u_{n+2}^2$ u. s. f., d. h. die Reihe wird zu einer geometrischen Progression, deren Summenlinie also eine gerade Linie; eine Gerade kann aber die Ox nur dann in endlicher Entfernung scheiden, wenn sie nicht zu derselben parallel, also $\sphericalangle\gamma_n$ nicht $= 90°$, d. h. $\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1$, ist.

Anmerkung. Hiermit wären, in diesem Abschnitte, die Exponentialfunctionen, wenn sie das allgemeine Glied einer Reihe bilden sollten, erledigt. Wir kommen nun zur Betrachtung der algebraischen Functionen; also zu den allgemeinen Gliedern einer Reihe: $u_n = \frac{1}{n^\mu}$, wobei n schon sehr gross sein mag, und für welche Function, wegen $\lim\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ gleich der Einheit, der **Lehrsatz I**, als unbestimmt, nicht ausreicht.

Zweiter Abschnitt.

Definition. Eine harmonische Reihe ist eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede $u_n = \frac{1}{m+n.d}$, wo m constant, n der Stellenzeiger und d der constante Parameter der harmonischen Reihe sind. — Für abnehmende harmonische Reihen ist offenbar $d>0$.

Bezeichnung. Die Linie $O\alpha'$ in Fig. 5 heisse Subsecante der Summenlinie, sie wird im Unendlichen zu einer Subtangente und werde mit h_n bezeichnet.

Hülfssatz I. Zufolge $u_n = \frac{1}{n^\mu} = \frac{1}{\varphi(n)}$ und $\varphi'(n) = \mu . n^{\mu-1}$ folgt in Verbindung mit dem Folgesatz zur Hülfsconstruction 2.: α) Nehmen die im Endlichen stehenden Glieder einer unendlichen abgebraischen Reihe überhaupt nur ab, so geschieht diese Abnahme der späteren Glieder bis ins Unendlichkleine, β) und auch umgekehrt. γ) Sind bei einer solchen Reihe die Glieder im Endlichen constant, so bleiben sie es auch im Unendlichen und haben also endliche Werthe.

Lehrsatz III. Eine jede Reihe, also auch eine algebraische, ist immer divergent, wenn $h_n = \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}}$ eine endliche Grösse bleibt.

Beweis. In Fig. 5 ist $h_n = O\alpha'$; da für $\gamma = 90^\circ$, was hier wegen $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ eintritt, die Summenlinie gegen Oy convex ist, so ist h_n immer kleiner, als die Ergänzung, daher nach Definition 2, β) die Reihe divergent. — Die geometrische Bedeutung von h_n hat,

wie ich in Crelle's Journal (13. Bd.) gefunden, auch Poncelet in einer der obigen ähnlichen geometrischen Darstellung der Reihen angegeben.

Hülfssatz II. Jede Reihe mit constanter Subtangente ist eine harmonische Reihe.

Beweis. Vermöge Voraussetzung ist $h_n = h_{n+1} = h_{n+2} = \ldots$,

also $$\frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} u_{n+2}}{u_{n+1} - u_{n+2}} = \ldots,$$

also auch

$$u_n u_{n+1} - u_n u_{n+2} = u_n u_{n+2} - u_{n+1} u_{n+2} \text{ oder } u_{n+1} = \frac{2 u_n u_{n+2}}{u_n + u_{n+2}},$$

welche Formel auch aus der Definition der harmonischen Reihe folgt.

Zusatz 1. Wegen $u_n = \frac{1}{m+n.d}$ und $u_{n+1} = \frac{1}{m+(n+1)d}$ folgt $h_n = \frac{1}{d}$, also die Subsecanten gleich dem reciproken Parameter.

Zusatz 2. Für die harmonische Reihe ist, bei $u_n = \frac{1}{\varphi(n)}$, $\varphi'(n)$ constant und $\varphi''(n) = 0$, also $\frac{1}{\varphi''(n)} = \infty$; siehe Fig. 6.

Zusatz 3. Ist bei irgend einer Reihe $u_n = \frac{1}{\varphi(n)}$, $\varphi'(n) > 0$ und $\varphi''(n)$ absolut gleich 0, so muss $\varphi'(n)$ constant und die Reihe harmonisch sein oder im Unendlichen harmonisch geworden sein.

Lehrsatz IV. Jede harmonische Reihe ist divergent.

Beweis. Folgt aus Hülfssatz 2. und Lehrsatz III. unmittelbar.

Hülfssatz III. Die Reihe

$$\frac{1}{c^{\frac{1}{m}}} + \frac{1}{c^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+d}}} + \frac{1}{c^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+d}+\frac{1}{m+2d}}} + \ldots\ldots + \frac{1}{c^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+d}+\ldots+\frac{1}{m+(n+1)d}}},$$

in welcher die Exponenten von c also eine harmonische Reihe bilden, wird selbst zu einer harmonisch-divergenten Reihe (also mit constanten Subtangenten), wenn $c = e^d$ ist, wo e die Exponentielle 2·718... bedeutet.

Beweis. Es ist

$$u_n = \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{c^{\sum_0^n \frac{1}{m+nd}}} \text{ und } u_{n+1} = \frac{1}{\varphi(n+1)} = \frac{1}{c^{\sum_0^{n+1} \frac{1}{m+n.d}}},$$

demnach:

$$\varphi(n) = c^{\sum_0^n \frac{1}{m+nd}} \text{ und } \varphi(n+1) = c^{\sum_0^{n+1} \frac{1}{m+nd}};$$

also

$$\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n) = c^{\sum_0^n \frac{1}{m+nd}} \left[c^{\frac{1}{m+(n+1)d}} - 1 \right],$$

eben so wird

$$\Delta\varphi(n+1) = c^{\sum_0^{n+1} \frac{1}{m+nd}} \left[c^{\frac{1}{m+(n+2)d}} - 1 \right];$$

soll nun $\Delta^2\varphi(n)$ gleich 0 werden, wenn $n = \infty$ ist, so muss $\Delta\varphi(n) = \Delta\varphi(n+1)$ sein, also auch

$$c^{\sum_0^n \frac{1}{m+nd}} \left[c^{\frac{1}{m+(n+1)d}} - 1 \right] = c^{\sum_0^{n+1} \frac{1}{m+nd}} \left[c^{\frac{1}{m+(n+2)d}} - 1 \right]$$

oder nach Abkürzung

$$c^{\frac{1}{m+(n+1)d}} - 1 = c^{\frac{1}{m+(n+1)d}} \left[c^{\frac{1}{m+(n+2)d}} - 1 \right]$$

und da für sehr grosse n

$$c^{\frac{1}{m+nd}} = 1 + \frac{lc}{m+nd} \text{ ist:}$$

$$\frac{lc}{m+(n+1)d} = \left[1 + \frac{lc}{m+(n+1)d} \right] \cdot \frac{lc}{m+(n+2)d},$$

oder auch wegen

$$\frac{1}{m+(n+2)d} = \frac{1}{m+(n+1)d} - \frac{d}{[m+(n+1)d]^2},$$

für grosse n,

$$\frac{1}{m+(n+1)d} = \frac{1}{m+(n+2)d} + \frac{lc}{[m+(n+1)d][m+(n+2)d]}$$

identisch mit

$$0 = -\frac{d}{[m+(n+1)d]^2} + \frac{lc}{[m+(n+1)d][m+(n+2)d]},$$

also für unendliche n, $d = lc$ oder $c = e^d$; also nach Zusatz III zu Hülfssatz II die Reihe eine harmonische Reihe, wenn $c = e^d$ ist.

Anmerkung. Für $a=0$ entsteht eine geometrische Progression und man gelangt wieder zu Lehrsatz II. — Für $d=1$ wurde dieser Satz von Raabe auf einem Umwege bewiesen, auf dem die Exponentielle bereits in der Rechnung gelegt wird; siehe Baumgartner's und Ettingshausen's Zeitschr. für Math. Bd. 10.

Hülfssatz IV. Die Summe jeder harmonischen Reihe ist ein unendlicher Logarithmus.

Beweis. Die vorgelegte harmonische Reihe sei der Exponent von c in der Reihe des Hülfssatzes III; die Subtangente der letzteren Reihe ist

$$h_n = \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}} = \frac{1}{c^{\sum_0^{n+1} \frac{1}{m+nd}} - c^{\sum_0^{n} \frac{1}{m+nd}}} = \frac{1}{c^{\sum_0^{n} \frac{1}{m+nd}} \left[c^{\frac{1}{m+(n+1)d}} - 1 \right]}$$

$$\text{und für } n=\infty,\ h_n = \frac{1}{c^{\sum_0^{n} \frac{1}{m+nd}} \cdot \frac{lc}{m+(n+1)d}}.$$

Nun divergirt aber diese Reihe, wie bewiesen wurde, harmonisch, wenn $c=e^d$ ist, für diesen Fall wird also h_n eine Constante C und hiermit

$$\text{Conts.} = \frac{m+(n+1)d}{e^{d \cdot \sum_0^{n} \frac{1}{m+n.d}} \cdot d} \text{ oder: } e^{d \cdot \sum_0^{n} \frac{1}{m+n.d}} = \frac{m+(n+1)d}{d.\,\text{Const.}}$$

und hieraus endlich

$$\sum_0^{n} \frac{1}{m+n.d} = \frac{1}{d} . l[m+(n+1)d] - \frac{ld}{d} - \frac{l\,\text{Const.}\,(=h_n)}{d},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\sum_0^{n} \frac{1}{m+n.d} = \frac{1}{d} . l[m+(n+1)d] + \text{Const., w. z. b. w.}$$

Zusatz. Für $n=\infty$ ist immer

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2.n} + \ldots + \frac{1}{3.n} + \ldots + \frac{1}{m.n} = lm.$$

Denn aus der letzten Formel folgt für $d=1$ und $n=\infty$:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} = ln + \text{Const.}$, daher für $n \ldots . n.m$ gesetzt,

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n.m-1}=l\,(m.n)+\text{Const.},$$

demnach der Rest

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n.m-1}=lm \text{ oder } \frac{1}{1.n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{m.n}=lm.$$

Die erste Angabe dieser Beziehung dürfte von Euler herrühren; er summirte hierbei die harmonische Reihe mittelst Integralrechnung; eine elementare Summirung mittelst Einschliessung in Grenzen gab unter Andern Schlömilch für $d=1$ im 3. Bande seiner Zeitschr. für Math. und Physik.

Hülfssatz V. Der Quotient $\frac{lm}{m^\varepsilon}$, wo $m=\infty$ und $\varepsilon>0$ sind, ist eine unendliche Grösse.

Beweis. 1. Es ist nach dem Vorhergehenden

$$ln=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-C,$$

also

$$\frac{ln}{n}=\frac{1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}-C}{n},$$

also bedeutet dieser Quotient für $n=\infty$ das arithmetische Mittel aus unendlich vielen, unendlich kleinen Gliedern, er muss also selbst unnendlich klein sein.

2. Setzen wir $n=m^\varepsilon$, so wird nach 1. $\frac{l(m^\varepsilon)}{m^\varepsilon}$ unendlich klein. also auch $\frac{\varepsilon.lm}{m^\varepsilon}$ und $\frac{lm}{m^\varepsilon}$ unendlich klein.

Lehrsatz V. Jede rein algebraische Reihe, mit dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{n^\mu}$ ist α) für $\mu=1$ harmonisch divergent. β) für $\mu<1$ noch mehr divergent (d. h. die Subtangenten wachsen) γ) für $\mu>1$ convergent.

Beweis. α) folgt aus der Definition der harmonischen Reihe und Lehrsatz IV

β) folgt aus α),

zu γ:) vermöge Definition 2, β) im ersten Abschnitt muss für den Fall der Convergenz die Ergänzung

$$s_n^{n.m} = \frac{1}{n^\mu} + \frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \cdots + \frac{1}{(n.m)^\mu},$$

für $n = \infty$ und $m > 1$, stets unendlich klein sein; ist nun $\mu = 1 + \varepsilon$, so wird

$$s_n^{n.m} = \frac{1}{n^\varepsilon n^1} + \frac{1}{(n+1)^\varepsilon (n+1)^1} + \frac{1}{(n+2)^\varepsilon (n+2)^1} + \cdots + \frac{1}{(n.m)^\varepsilon (n.m)^1}$$

oder $$= \frac{1}{(\theta.n)^\varepsilon} \cdot \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n.m}\right],$$

wo θ zwischen 1 und m liegt, daher nach Zusatz zum Hülfssatz IV:

$$s_n^{n.m} = \frac{lm}{\theta^\varepsilon n^\varepsilon};$$

ist nun m endlich, so wird offenbar $s_n^{n.m}$ unendlich klein; ist aber selbst $m = \infty$, so muss dennoch, $\theta = \theta_1 . m$ gesetzt, wenn θ_1 einen echten Bruch bedeutet,

$$s_n^{n.m} = \frac{lm}{(\theta_1 . n)^\varepsilon m^\varepsilon} = \frac{1}{(\theta_1 . n)^\varepsilon} \cdot \frac{lm}{m^\varepsilon}$$

nach Hülfssatz V unendlich klein bleiben.

Anmerkung. Aus diesem Abschnitte ergab sich daher, wenn man sich an den Hülfssatz I erinnert, dass für die Convergenz algebraisch gebauter Reihen nichts weiter nothwendig ist, als dass 1. die gegebene Reihe der Glieder eine abnehmende ist und 2. dass auch die aus jener gebildete Reihe der $h_n . \left(= \frac{u_n u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}}\right.$ eine abnehmende wird.

Wenn wir nun bedenken, dass für die Convergenz der Reihen mit Exponentialfunctionen — nach dem ersten Abschnitte — diese Regel ebenfalls erfüllt wird, obwohl dort die zweite Bedingung schon eine Folge der ersten ist, und dass ferner bei Verbindungen von Exponentialgrössen mit algebraischen Functionen im allgemeinen Gliede einer Reihe, die noch elementare Transcendenten sind, die ersteren allein massgebend werden, so können wir nach dem Bisherigen folgendes Theorem aufstellen:

Eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied u_n algebraisch gebaute oder Exponentialfunctionen oder deren Verbindungen enthält, convergirt: Wenn 1. die Reihe u_n, 2. die Reihe $h_n = \frac{1}{\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}}$ abnimmt, was man in die Form bringen kann: α) durch Benützung der Quotienten:

$$1)\ \frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \text{ und } 2)\ \frac{h_n}{h_{n+1}} > 1;$$

β) durch Benützung der Differenzen:

$$1)\ \Delta\left(\frac{1}{u_n}\right) > 0 \text{ und } 2)\ \Delta^2\left(\frac{1}{u_n}\right) > 0$$

oder für $u_n = \frac{1}{\varphi(n)}$: für $n = \infty$ 1) $\varphi(n) = \infty$ und 2) $\varphi'(n) = \infty$ (nach Hülfssatz 1).

Wir kommen nun im

dritten Abschnitt

zur Betrachtung der letzten noch übrigen elementaren Transcendenten, den Logarithmen. Für diese reicht die obige Deduction nicht aus und wir werden daher zeigen, dass man durch Transformation des allgemeinen Gliedes auf die früher behandelten Functionen zurückgelangen könne, oder, wie dies in der Integralrechnung genannt wird, es muss die Erlaubniss und die Art der Substitution neuer Variabeln nachgewiesen werden. Dies aber so:

Lehrsatz VI. Eine Reihe mit abwechselnden Vorzeichen convergirt immer, wenn die Glieder fortwährend und bis ins Unendliche abnehmen.

Beweis. Die Summe der Reihe bis zum Gliede u_n sei S_n, so ist die ganze Summe:

$$S = S_n + u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots$$

oder

$$S = S_n + [u_{n+1} - u_{n+2}] + [u_{n+3} - u_{n+4}] + \ldots$$

und auch

$$S = [S_n + u_{n+1}] - [u_{n-2} - u_{n+3}] - [u_{n+4} - u_{n+5}] \ldots,$$

also wegen $u_n > u_{n+2} > u_{n+3} \ldots$ alle eingeklammerten Glieder positiv und daher $S_n + u_{n+1} > S > S_n$, womit schon der Satz bewiesen ist.

Lehrsatz VII. Die, von ins Unendliche abnehmenden Gliedern $\varphi(n)$ gebildete unendliche Reihe

$$(A) \qquad \delta_1\varphi(n)+\delta_2\varphi(n+\delta_1)+\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2)+\ldots$$

convergirt oder divergirt zugleich mit der Reihe

$$(B) \quad \delta_1\varphi(n+\delta_1)+\delta_2\varphi(n+\delta_1+\delta_2)+\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2+\delta_3)+\ldots$$

wenn die δ ebenfalls eine Reihe abnehmender oder auch gleichbleibender Glieder bilden. (Dieser Satz wäre offenbar auch durch die Anschauung, in welcher Reihenglieder statt, wie hier durch Linien, durch Flächen dargestellt werden, sehr leicht einzusehen.)

Beweis. Die Differenz $A—B$ ist

$$=\Delta=\delta_1\varphi(n)-\delta_1\varphi(n+\delta_1)+\delta_2\varphi(n+\delta_1)-\delta_2\varphi(n+\delta_1+\delta_2)$$
$$+\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2)-\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2+\delta_3)+\ldots.;$$

also ist Δ eine Reihe mit wechselnden Zeichen und stets abnehmenden Gliedern, nach Lehrsatz VI endlich und die Reihe A muss demnach mit B zugleich eine endliche oder unendlich grosse Summe haben.

Lehrsatz VIII. Die Reihe

$$(A) \qquad \varphi(n)+\varphi(n+1)+\varphi(n+2)+\ldots$$

convergirt oder divergirt zugleich mit der Reihe

$$(B) \qquad \delta\varphi(n+\delta)+\delta\varphi(n+2\delta)+\delta\varphi(n+3\delta)+\ldots,$$

wo δ eine beliebig kleine Grösse sein kann.

Beweis. Sei $\delta=\frac{1}{m}$, so ist

$$B=\frac{1}{m}[\varphi(n+\delta)+\varphi(n+2\delta)+..+\varphi(n+m.\delta)]$$

$$+\frac{1}{m}[\varphi(\overline{n+m\delta}+\delta)+\varphi(\overline{n+m\delta}+2\delta+..+\varphi(\overline{n+m\delta}+m\delta)]+\ldots$$

oder auch

$$B=\frac{1}{m}.m.\varphi(n+\theta_1.m\delta)+\frac{1}{m}.m.\varphi(n+m.\delta+\theta_2.m\delta)+..,$$

wo θ stets einen echten Bruch bedeutet und $\varphi(n+\theta_1.m\delta)$ das arithmetische Mittel des ersten eingeklammerten Ausdruckes,

$\varphi(n+m.\delta+\theta_2.m\delta)$ jenes des zweiten eingeklammerten Gliedes u. s. w.; demnach

$$B=\varphi(n+\theta_1.1)+\varphi(n+1+\theta_2.2)+\ldots.;$$

diese Grössen sind aber Mittelglieder zwischen jenen der Reihe A, ihre Summe also zugleich mit A endlich oder unendlich.

Lehrsatz IX. Die Reihe

$$(A) \qquad \varphi(n)+\varphi(n+1)+\varphi(n+2)+\ldots.$$

convergirt oder divergirt zugleich mit der Reihe

$$(C)\ \delta_1\varphi(n+\delta_1)+\delta_2\varphi(n+\delta_1+\delta_2)+\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2+\delta_3)+\ldots.$$

unter δ eine Reihe stets abnehmender Glieder verstanden.

Beweis. Sei $\delta_1=a_1\varepsilon$, $\delta_2=a_2.\varepsilon$, $\delta_3=a_3.\varepsilon\ldots.$, wo ε ein gemeinschaftliches Mass der δ_1, δ_2, δ_3,.... vorstellt, so ist

$$C=a_1\varepsilon.\varphi(n+a_1\varepsilon)+a_2\varepsilon.\varphi(n+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon)+a_3\varepsilon.\varphi(n+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon+a_3\varepsilon)+\ldots..$$

oder

$$C=\varepsilon[a_1\varphi(n+a_1\varepsilon)+a_2\varphi(n+\delta_1+a_2\varepsilon)+a_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2+a_3\varepsilon)\ldots+].$$

Betrachten wir nun die Hülfsreihe

$$\begin{aligned}C'&=\varepsilon\varphi(n+\varepsilon)+\varepsilon\varphi(n+2\varepsilon)+\varepsilon\varphi(n+3\varepsilon)+\ldots\\&=\varepsilon[\varphi(n+\varepsilon)+\varphi(n+2\varepsilon)+\ldots+\varphi(n+a_1\varepsilon)]+\\&+\varepsilon[\varphi(\overline{n+a_1\varepsilon}+\varepsilon)+\ldots+\varphi(\overline{n+a_1.\varepsilon}+a_2\varepsilon)]+\ldots\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}C'&=\varepsilon.a_1.\varphi(n+\theta_1.a_1\varepsilon)+\varepsilon a_2\varphi(\overline{n+a_1\varepsilon}+\theta_2.a_2\varepsilon)+\ldots..\\&=\delta_1.\varphi(n+\theta_1\delta_1)+\delta_2\varphi(n+\delta_1+\theta_2\delta_2)+\ldots...\end{aligned}$$

Zufolge Lehrsatz VII convergirt oder divergirt die Reihe

$$\delta_1\varphi(n)+\delta_2\varphi(n+\delta_1)+\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2)+\ldots$$

zugleich mit

$$C=\delta_1\varphi(n+\delta_1)+\delta_2\varphi(n+\delta_1+\delta_2)+\delta_3\varphi(n+\delta_1+\delta_2+\delta_3);$$

daher auch C zugleich mit der Reihe von Mittelgliedern

aber zufolge Lehrsatz VIII C' zugleich mit A, daher auch C mit A, was das zu Beweisende ist.

Aus dem Bisherigen folgt nun das verlangte.

Theorem: Eine Reihe, deren allgemeines Glied logarithmische Functionen enthält, kann man auf eine der in den ersten beiden Abschnitten behandelten zurückbringen, die mit der gegebenen zugleich convergirt oder divergirt.

Beweis. Man setze für den vielfachsten vorhandenen Logarithmen [log log log.....log n] eine neue Variable, die als Stellenzeiger fungirt, so entsteht ein allgemeines Gleid, das nur algebraische und Exponentialfunctionen enthält, dessen Stellenzeiger jedoch nach unendlich kleinen Intervallen fortschreitet; benützt man daher den Lehrsatz VIII, so entsteht ein allgemeines Glied, das nach Einheiten fortschreitet und keine Logarithmen mehr enthält und gleichzeitig mit dem vorgelegten convergent oder divergent erscheint.

Beispiel. Gegeben $u_n = \frac{1}{(ln)^\alpha}$; es ist hier durch Substitution einer neuen Variabeln für ln die logarithmische Function wegzuschaffen; setze also:

$ln = N$, so ist $u_n = \frac{1}{N^\alpha}$ und $u_{n+1} = \frac{1}{\left(l(n+1)\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(ln + \frac{1}{n}\right)^\alpha}$

$= \frac{1}{(N+e^{-N})^\alpha}$; für $e^{-N} = \delta$, daher $u_{n+1} = \frac{1}{(N+\delta)^\alpha} = e^N \frac{\delta}{(N+\delta)^\alpha}$.

Eben so ist

$$u_{n+2} = \frac{1}{\left(l(n+2)\right)^\alpha} = \frac{1}{\left(l(n+1) + \frac{1}{n+1}\right)^\alpha} = \frac{1}{(N_1 + e^{-N_1})^\alpha}$$

$$= e^{-N_1} \cdot \frac{e^{N_1}}{(N_1 + e^{-N_1})^\alpha},$$

wenn $l(n+1) = N_1$ gesetzt wird, und für $e^{-N_1} = \delta_1$

wird $$u_{n+2} = e^{N+\delta} \cdot \frac{e^{-(N+\delta)}}{(N+\delta+\delta_1)^\alpha}.$$

Jetzt entsteht daher folgende Reihe:

$$\frac{1}{N^2}\cdot e^N\cdot\frac{\delta_1}{(N+\delta_1)^2}\cdot e^{N+\delta_1}\cdot\frac{\delta_2}{(N+\delta_1+\delta_2)^2}\cdot e^{N+\delta_1+\delta_2}\cdot\frac{\delta_3}{(N+\delta_1+\delta_2+\delta_3)^2}$$

u. s. w.

Zufolge Lehrsatz IX kann man statt dieser auch nehmen:

$$\frac{e^N}{(N+1)^2}\cdot\frac{e^{N+1}}{(N+2)^2}\cdot\frac{e^{N+2}}{(N+3)^2}\cdots;$$

demnach das allgemeine Glied

$$U_N=\frac{e^N}{(N+1)^2}=\frac{1}{e}\cdot\frac{e^{N+1}}{(N+1)^2};$$

also von der Exponentenfunction allein abhängig und $\frac{U_N}{U_{N+1}}$, wie es der erste Abschnitt zu suchen vorschreibt,

$$\frac{U_N}{U_{N+1}}=\frac{1}{e}\cdot\frac{e^{N+1}}{(N+1)^2}:\frac{1}{e}\cdot\frac{e^{N+2}}{(N+2)^2}=\frac{1}{e}\text{ für }N=\infty,\text{ also }\frac{U_N}{U_{N+1}}<1$$

und die Reihe divergent.

Anmerkung. Die Transformation, blos als Erläuterung dienend, war an und für sich nicht nothwendig, da bei dieser Reihe für

$$u_n=\frac{1}{(ln)^\alpha}\text{ und }u_{n+1}=\frac{1}{[l(n+1)]^\alpha}$$

die Subtangente

$$h_n=\frac{1}{[l(n+1)]^\alpha-(ln)^\alpha}=\frac{1}{(ln)^\alpha+\frac{\alpha}{n}(ln)^{\alpha-1}+\ldots-(ln)^\alpha}=\frac{n}{\alpha(ln)^{\alpha-1}},$$

also für jedes α unendlich gross wird, demnach die Reihe divergiren muss.

Hiermit fassen wir das Kennzeichen der Convergenz für unendliche Reihe in Folgendem zusammen:

Gegeben ist das allgemeine Glied, blos die elementaren Transcendenten enthaltend, periodische Function, also auch Zeichenwechsel, ausgeschlossen.

I. Vor Allem bringe man die vorhandenen Logarithmen durch Substitution einer neuen Variabeln für den höchsten Logarithmus weg, so bleibt ein allgemeines Glied mit algebraischen und Exponentialfunc-

tionen allein zurück; dieses, nach Einheiten des Stellenzeigers fortschreitend, heisse U_N.

II. Zur Convergenz ist dann nothwendig, dass 1. die Reihe U_N, 2. die Reihe

$$h_N = \frac{1}{\frac{1}{U_{N+1}} - \frac{1}{U_N}}$$

ins Unendliche abnehmen. — Je nach Bedürfniss können diese zwei Bedingungen so ausgedrückt werden:

Zufolge Hülfssatz I:

$\alpha)$ $\frac{U_N}{U_{N+1}} > 1$ und $\frac{h_N}{h_{N+1}} > 1$.

$\beta)$ $\Delta\left(\frac{1}{U_N}\right) > 0$ und $\Delta^2\left(\frac{1}{U_N}\right) > 0$. Und für $u_N = \frac{1}{\varphi(N)}$ und $N = \infty$

$\gamma)$ $\varphi(N) = \infty$ und $\varphi'(N) = \infty$.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Es ist die unendliche Reihe der reciproken Primzahlen auf Convergenz zu prüfen.

Auflösung. Gegeben die Reihe

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} + \ldots\ldots\ldots$$

Da die allgemeine Form von u_n unbekannt ist, so wenden wir die einzelnen, auf einander folgenden Methoden an, die eine Divergenz anzeigen.

Also ist:

Wegen $\lim u_n$ unendlich klein — die Convergenz noch möglich,

„ $\lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$ dieselbe ebenfalls noch möglich,

„ $\lim h_n = \frac{1}{\Delta\left(\frac{1}{u_n}\right)} = \frac{1}{d}$, aber divergent; denn d bedeutet die zwar unbekannte, aber jedenfalls endliche Differenz zweier auf einander folgender Primzahlen; die Subtangente, oder eine untere Grenze der Ergänzung, bleibt demnach, so wie bei der harmonischen Reihe, immer endlich; wenn auch nicht constant, so doch zwischen endlichen Grenzen oscillirend, also nach Lehrsatz III die Reihe der reciproken Primzahlen divergent.

Anmerkung. Die Divergenz dieser Reihe hat zuerst Euler bewiesen in seiner Einleitung in der Analysis des Unendlichen (S. 312 der Übersetzung von Michelsen) und in den Peters. Com. 9. Bd. (alt).

Aufgabe 2. Es ist von einer unendlichen Reihe nur das Verhältniss

$$\frac{u_{n+m}}{u_n} = \frac{n^\alpha + A_1 . n^{\alpha-1} + A_2 . n^{\alpha-2} + \ldots .}{n^\alpha + a_1 . n^{\alpha-1} + a_2 . n^{\alpha-2} + \ldots .}$$

zweier, in beliebigem Abstande von einander stehender Glieder bekannt; man soll die Bedingungen der Convergenz angeben.

Auflösung. Die Grössen A_i und a_i in diesem Ausdrucke werden nicht zu gleicher Zeit der Nulle gleich angenommen werden müssen, wie sich durch Substitution von $n + m$ statt n sofort ergibt; ferner können wir, mindestens für sehr grosse n das allgemeine Glied algebraisch voraussetzen. Hiedurch gewinnen, wie ebenfalls eine solche directe Substitution sogleich lehrt, von allen Gliedern $A_1, A_2 \ldots$, $a_1, a_2 \ldots$ bloss jene A_i und a_i auf die Convergenz einen Einfluss; wir haben also:

Wegen $\lim \frac{u_{n+m}}{u_n} = 1$ die Convergenz im Allgemeinen möglich.

Die Subtangente $h_n = \frac{u_n u_{n+m}}{u_n - u_{n+m}} = \frac{u_n \cdot \frac{u_{n+m}}{u_n}}{1 - \frac{u_{n+m}}{u_n}} = \frac{u_n \cdot q_m}{1 - q_m}$;

nun ist aber für grosse n

$$q_m = \frac{n^\alpha + A_1 . n^{\alpha-1} + \ldots}{n^\alpha + a_1 . n^{\alpha-1} + \ldots} = 1 + \frac{A_1 - a_1}{n};$$

daher

$$h_n = \frac{n u_n}{a_1 - A_1} \left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n}\right) = \frac{1}{\Delta\left(\frac{1}{u_n}\right)}.$$

Nun hängt das Zeichen h_n nur vom Nenner $a_1 - A_1$ ab, die erste Bedingung der Convergenz ist aber nach der allgemeinen Theorie: die Glieder u_n müssen ins Unendliche abnehmen; also nach Folgesatz der Hülfsconstruction II: muss hiezu $h_n > 0$ sein; wir gewinnen daher aus der ersten Bedingung der Convergenz den Satz: Damit die vorgelegte Reihe ins Unendliche abnehmende Glieder habe, muss $a_1 - A_1 > 0$ sein.

Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

h_n müssen ebenfalls abnehmen; also muss $h_n > h_{n+m}$ sein. Nun ist

$$h_n = \frac{u_n \cdot q_m}{1-q_m}, \text{ also } h_{n+m} = \frac{u_{n+m} \cdot q_{2m}}{1-q_{2m}},$$

indem wir in allen Gliedern um m vorschreiten. Es muss also für Convergenz

$$\frac{n \cdot u_n}{a_1 - A_1}\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n}\right) > \frac{(n+m)u_{n+m}}{a_1 - A_1}\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n+m}\right)$$

oder

$$\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n}\right) > \frac{n+m}{n} \cdot \frac{u_{n+m}}{u_n}\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n+m}\right) = \left(1 + \frac{m}{n}\right) q_m \left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n+m}\right)$$

$$\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n}\right) > \left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n}\right)\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{m+n}\right)$$

oder auch durch Abkürzung mit $\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n}\right)$

$$1 > \left(1 + \frac{m}{n}\right)\left(1 + \frac{A_1 - a_1}{n+m}\right) = 1 + \frac{m}{n} + \frac{A_1 - a_1}{n+m} + \frac{m(A_1 - a_1)}{n(n+m)}$$

und für sehr grosse n

$$0 > \frac{m}{n} + \frac{A_1 - a_1}{n} \text{ oder } a_1 - A_1 > m,$$

d. h. die Reihe, für welche

$$\frac{u_{n+m}}{u_n} = \frac{n^\alpha + A_1 \cdot n^{\alpha-1} + A_2 \cdot n^{\alpha-2} + \ldots .}{n^\alpha + a_1 \cdot n^{\alpha-1} + a_2 \cdot n^{\alpha-2} + \ldots .},$$

convergirt nur, wenn $a_1 - A_1 > m$ ist; mit $a_1 - A_1 = m$ beginnt die — harmonische — Divergenz, d. h. die Constanz der Subtangente (indem dann $h_n - h_{n+m}$ wird).

Für den speciellen Fall $m = 1$ sind obige zwei Eigenschaften für die Convergenz von Gauss in der Untersuchung über die hypergeometrische Reihe gegeben worden.

Als ein hierhergehörendes Beispiel wollen wir die Binomialformel in einer einfacheren Weise als gewöhnlich auf Convergenz prüfen, indem wir uns vom Zeichenwechsel dispensiren werden:

Beispiel. Die Binomialformel

$$(1+x)^\mu = 1+\binom{\mu}{1}x+\binom{\mu}{2}x^2+\dots.$$

auf Convergenz zu untersuchen.

Auflösung. Hier ist $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\mu-n}{n+1}.x$, also tritt bei grossen n Zeichenwechsel auf; um ihn zu vermeiden, ziehen wir je zwei Glieder zu Einem zusammen; die neuen Glieder heissen U_N, also

$$U_N = u_{n+1}+u_{n+2};\ U_{N+1} = u_{n+3}+u_{n+4}\dots$$

demnach

$$U_N = u_n\left(\frac{\mu-n}{n+1}\right)\left(1+\frac{\mu-n-1}{n+2}.x\right)x,\ \text{wo } n=2(N-1)$$

und

$$U_{N+1} = u_{n+2}\left(\frac{\mu-n-2}{n+3}\right)\left(1+\frac{\mu-n-3}{n+4}.x\right)x$$

$$= u_n\frac{(\mu-n)(\mu-n-1)}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{\mu-n-2}{n+3}\right)\left(1+\frac{\mu-n-3}{n+4}.x\right)x^2;$$

also

$$Q_N = \frac{U_{N+1}}{U_N} = \frac{(\mu-n-1)(\mu-n-2)}{(n+3)(n+4)}\left[\frac{n+4+\overline{\mu-n-3}.x}{n+2+\overline{\mu-n-1}.x}\right]x^2.$$

Wenn nun n oder N sehr gross wird, so wird $\lim Q_N = x^2$, also convergirt die Binomialreihe für $x^2<1$.

Wenn aber $x^2=1$, d. h. $x=+1$ oder $x=-1$ wird, so haben wir:

1. Fall: $x=+1$; $Q_N = \frac{(\mu-n-1)(\mu-n-2)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2+n(3-2\mu)+\dots}{n^2+n.7+\dots}$

$$= \frac{N^2+N.\left(\frac{-2-4\mu}{4}\right)+\dots}{N^2+N.\frac{6}{4}+\dots};$$

nun muss aber nach Obigem für $n=1$ für Convergenz $a_1-A_1>1$ sein, also, wegen $a_1=\frac{6}{4}$ und $A_1=\frac{-2-4\mu}{4}$, $1>-\mu$ oder $\mu>-1$.

2. Fall: $x=-1$; hier ist $Q_N = \frac{(\mu-n-1)(\mu-n-2)}{(n+3)(n+4)}\cdot\frac{(2n+7-\mu)}{(2n+3-\mu)}$

$$= \frac{2n^3+n^2(13-5\mu)+\dots}{2n^3+n^2(17-\mu)+\dots} = \frac{N^3+N^2\left(\frac{1-5\mu}{4}\right)+\dots}{N^3+N^2\left(\frac{5-\mu}{4}\right)+\dots};$$

es muss also für Convergenz $\frac{5-\mu}{4}>1+\frac{1-5\mu}{4}$ oder $\mu>0$ sein.

Das Resultat ist also: Die Reihe $(1+x)^\mu$ convergirt für jedes μ, wenn $x^2<1$; für $x=+1$ muss $\mu>-1$ und für $x=-1$ muss $\mu>0$ sein, — wie bekannt.

Aufgabe III. Die Reihe $u_n=\frac{l(n+1)}{n^\mu}$ auf Convergenz zu prüfen.

Auflösung. Es ist

$$u_n=\frac{l(n+1)}{n^\mu};\quad u_{n+1}=\frac{l(n+2)}{(n+1)^\mu}=\frac{l(n+1)+\frac{1}{n+1}}{(n+1)^\mu}$$

für grosse n; setze $l(n+1)=N$, wie das allgemeine Theorem vorschreibt; so ist

$$u_{n+1}=\frac{N+e^{-N}}{e^{\mu N}}=\frac{e^{-N}(N+e^{-N})}{e^{-N}.e^{\mu N}}$$

und für $e^{-N}=\delta$ auch

$$u_{n+1}=\frac{\delta(N+\delta)}{e^{(\mu-1)N}}.\ \text{Eben so wird } u_{n+2}=\frac{\delta'(N+\delta+\delta')}{e^{(\mu-1)(N+\delta)}},$$

wo $e^{-N'}=e^{-(N+\delta)}=\delta'$ ist; und die neue Reihe ist demnach:

$$\frac{\delta(N+\delta)}{e^{(\mu-1)N}},\quad \frac{\delta'(N+\delta+\delta')}{e^{(\mu-1)(N+\delta)}},\quad \frac{\delta''(N+\delta+\delta'+\delta'')}{e^{(\mu-1)(N+\delta+\delta')}}$$

u. s. w.; oder auch, da e^δ, $e^{\delta'}\ldots$ sich der Einheit nähern:

$$\frac{\delta(N+\delta)}{e^{(\mu-1)(N+\delta)}},\quad \frac{\delta'(N+\delta+\delta')}{e^{(\mu-1)(N+\delta+\delta')}},\quad \frac{\delta''(N+\delta+\delta'+\delta'')}{e^{(\mu-1)(N+\delta+\delta'+\delta'')}},\ \text{u. s. w.}$$

Nach dem Lehrsatz IX convergirt oder divergirt sie zugleich mit

$$\frac{N}{e^{(\mu-1)N}},\quad \frac{N+1}{e^{(\mu-1)(N+1)}},\quad \frac{N+2}{e^{(\mu-1)(N+2)}},\ldots,$$

welche für grosse N zusammenfällt mit der geometrischen Progression

$$\frac{1}{e^{(\mu-1)N}}.=U_N,\ \text{indem}\ \frac{U_N}{U_{N+1}}=\frac{N+1}{N+2}\cdot\frac{e^{(\mu-1)(N+2)}}{e^{(\mu-1)(N+1)}}=e^{\mu-1}$$

als ihr Quotient >1 sein muss, d. h. die Reihe $\frac{l(n+1)}{n^\mu}$ convergirt nur für $\mu>1$.

Aufgabe IV. Die Reihe $u_n = \frac{1}{n[l(n+1)]^\mu}$ zu untersuchen.

Auflösung. Setze $l(n+1) = N$ wie oben und verfahre ähnlich; so wird

$$U_N = \frac{e^{-N}}{(N+e^{-N})^\mu}, \quad U_{N+1} = \frac{e^{-N'}}{(N'+e^{-N'})^\mu},$$

u. s. w.; für $e^{-N} = \delta$, $e^{-N'} = \delta' \ldots$

$$U_N = \delta \cdot \frac{1}{(N+\delta)^\mu}, \quad U_{N+1} = \delta' \cdot \frac{1}{(N+\delta+\delta')^\mu} \ldots;$$

convergirt also zugleich mit

$$\frac{1}{N^\mu}, \quad \frac{1}{(N+1)^\mu}, \quad \frac{1}{(N+2)^\mu} \ldots;$$

also blos für $\mu > 1$.

Aufgabe V. Die Reihe $u_n = \frac{1}{n.[ll(n+1)]^\mu}$ zu untersuchen.

Auflösung. Setze wieder $ll(n+1) = N$, so wird

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\left[ll(n+2)\right]^\mu} = \frac{1}{(n+1)\left[ll(n+1)+\frac{1}{(n+1)l(n+1)}\right]^\mu}$$

$$= e^{-e^{N'}} \cdot \frac{1}{\left[N+e^{-e^N}.e^{-N}\right]^\mu} = \frac{e^N.e^{-N}.e^{-e^N}}{\left[N+e^{-e^N}.e^{-N}\right]^\mu} = U_{N+1};$$

eben so

$$u_{n+2} = \frac{1}{(n+2)\left[ll(n+2+1)\right]^\mu} = \frac{1}{(n+2)\left[ll(n+2)+\frac{1}{(n+2)l(n+2)}\right]^\mu}$$

$$= e^{-e^{N'}} \cdot \frac{1}{\left[N'+e^{-e^{N'}}.e^{-N'}\right]^\mu} = \frac{e^{N'}.e^{-N'}.e^{-e^{N'}}}{\left[N'+e^{-e^{N'}}.e^{-N'}\right]^\mu} = U_{N+2},$$

indem successive gesetzt ward

$$ll(n+1) = N; \; ll(n+2) = N+e^{-e^N}.e^N = N';$$
$$ll(n+3) = N'+e^{-e^{N'}}.e^{N'} = N'' \text{ u. s. w.}$$

Für $e^{-N}.e^{-e^N} = \delta$; $e^{-N'}.e^{-e^{N'}} = \delta'$, u. s. w. haben wir also eine Reihe mit den Gliedern

$$e^N \cdot \frac{\delta}{(N+\delta)^\mu}; \; e^{N+\delta} \cdot \frac{\delta'}{(N+\delta+\delta')^\mu}; \; e^{N+\delta+\delta'} \cdot \frac{\delta''}{(N+\delta+\delta'+\delta'')^\mu}$$

u. s. w., oder auch nach Lehrsatz IX

$\frac{e^{N+1}}{(N+1)^\mu}$; $\frac{e^{N+2}}{(N+2)^\mu}$; $\frac{e^{N+3}}{(N+3)^\mu}$ u. s. w.; nun ist $\lim \frac{U_N}{U_{N+1}} = e^{-1}$, also < 1, demnach die Reihe $u_n = \frac{1}{n(lln)^\mu}$ für jedes μ divergent.

Zweite Abtheilung.

Über die Convergenz der bestimmten Integrale.

Definition. Ein bestimmtes Integral ist als eine Reihe anzusehen, deren Stellenzeiger und zugleich deren allgemeines Glied sich nur um unendlich wenig ändern. — Geometrisch wollen wir ein solches Integral durch eine Fläche ausdrücken; Fig. 7.

Zusatz 1. Wenn die Function $\varphi(x)$ des Integrals $\int_a^b \varphi(x)dx$ sich bei einer sehr kleinen Änderung des Stellenzeigers x um eine endliche Grösse ändert, was offenbar nur an einzelnen Stellen geschehen kann, so bleibt das Integral, wenn es überhaupt endlich ist, noch immer endlich; wenn aber an einzelnen Stellen die Änderungen des allgemeinen Gliedes plötzlich unendlich gross werden, so entstehen, wie in Fig. 8, asymptotische Flächenräume, die der Abscissenachse lateral stehen, diese müssen nun so, wie jede andere unendlich sich erstreckende Fläche — Reihe — auf Convergenz untersucht werden. — Diese besonderen unendlichen Flächenzweige sollen singuläre bestimmte Integrale heissen (Cauchy).

Zusatz 2. Wir können die Grenzen des Integrals stets als von gleichen Zeichen, also positiv, annehmen.

Lehrsatz I. Das bestimmte Integral $\int_a^\infty \varphi(x)dx$, bei dem zwischen diesen Grenzen $\varphi(x)$ nie durch Unendlich geht, convergirt zugleich mit der unendlichen Reihe

$$\varphi(x) + \varphi(x+1) + \varphi(x+2) + \ldots.$$

Beweis. Folgt aus Lehrsatz VIII der ersten Abtheilung, indem man $\delta = dx$ nimmt. Hieraus entsteht also das Theorem I.

Wenn in dem Integrale $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ zwischen a und ∞ klein unendlicher Werth von $\varphi(x)$ eintritt, so gilt, wenn $\varphi(x)$ nur die elementaren, nicht periodischen Transcendenten enthält, folgendes Kennzeichen für Convergenz: 1. Man substituire für den vielfachsten der vorhandenen Logarithmen eine neue Variable x'; so entstehe $\int_{a'}^\infty \frac{dx'}{\psi(x')}$. 2. Für Convergenz muss sodann gelten für $x' = \infty$ auch $\psi(x') = \infty$ und $\psi'(x') = \infty$. — Als Folge des Schlusstheorems der ersten Abtheilung.

Lehrsatz II. Das singuläre, bestimmte Integral $\int_b \varphi(x)dx$, in welchem $\varphi(x)$ für $x = b$ durch Unendlich geht, verschwindet in demselben Falle, in welchem $\int_a^\infty \chi(y)dy$, welches aus jenem durch die Substitution $y = \pm \frac{1}{b-x}$ entsteht, convergirt. Das singuläre Integral ist unbestimmt oder unendlich gross, wenn das letztere Integral divergirt.

Beweis. In Fig. 8 sei $OB = b$ und die Ordinate $\varphi(b) = \infty$: der entstandene asymptotische Raum auf der linken Seite von Bx' verschwindet, wenn er zu einem convergenten Integrale gehört, das bei OA z. B. beginnt und bis OB reicht. Wäre nun Bx' die Abscissenachse, so müsste für $BM'' = \alpha.\infty$ und $BN'' = \beta.\infty$, wo α wie $\beta > 0$ sind (zufolge der zweiten Definition der Convergenz einer unendlichen Reihe oder eines unendlichen Integrals) die Fläche $MM''NN''$ für beliebige α und β unendlich klein sein; denn dieselbe stellt nichts anderes, als die „Ergänzung" dar. Wenn aber die gegebenen Coordinatenachsen beibehalten werden, so muss ganz aus demselben Grunde die Fläche $MM'NN'$, die auch eine Ergänzung repräsentirt, unendlich klein sein, wobei also $BM' = m.\varepsilon$ und $BN' = n.\varepsilon$ sein mögen, wo ε sehr klein und m wie n positive, endliche und sonst beliebige Grössen sind. Es muss demnach $\int_{n.\varepsilon}^{m.\varepsilon} \psi(x_1)dx_1$ verschwinden, wenn in das gegebene Integral $x_1 = b - x$ gesetzt wird, also muss

auch für $y=\frac{1}{x_1}$ das Integral $\int_{\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\infty}^{\left(\frac{1}{m}\right)\cdot\infty}\chi(y)dy$ verschwinden; dieses letztere bedeutet aber die Ergänzung des Integrals $\int_a^{\infty}\chi(y)dy$ und nur bei Convergenz desselben kann seine Ergänzung verschwinden; daher muss, wie angegeben wurde, $\int_a^{\infty}\chi(y)dy$ convergiren, wenn $\int_b\varphi(x)dx$ verschwindet und divergiren, wenn das letztere Integral irgend einen Werth haben soll. — Da das Bisherige auch für die, rechts von Bx' gelegene, asymptotische Fläche gilt, so ist der Satz im Ganzen bewiesen.

Anmerkung. Cauchy's Behandlung der singulären, bestimmten Integrale ist also, wie man aus dem Vorhergehenden sieht, nur eine Consequenz der Ansicht von Euler über die Convergenz unendlicher Reihen; ferner ergibt sich, dass die Benützung des allgemeinen Werthes der singulären Integrale, und nicht jene des Hauptwerthes durch die Natur der Sache vorgeschrieben sei. — Siehe hingegen unter Andern Bieren's: Théorie des Intégrales définies (S. 7 und weiter) mit der einschlägigen Literatur.

Beispiel der Behandlung eines singulären bestimmten Integrals.

Man soll angeben, ob $\int_1^2\frac{dx}{xlx}$, welches für $x=1$ singulär wird, einen bestimmten, endlichen Werth habe oder nicht.

Berechnung. Zufolge Theorem I setze $lx=x'$, so entsteht $\int_0^{l2}\frac{dx'}{x'}$, also b hier $=0$; nunmehr nach Lehrsatz II $y=\frac{1}{x'}$, so wird $\int_{\frac{1}{l2}}^{\infty}\frac{dy}{y}$; da aber $\int_a^{\infty}\frac{dy}{y}$ zufolge Theorem I divergirt, so hat das singuläre Integral $\int_1^2\frac{dx}{xlx}$ einen unbestimmten Werth.

Nach dem Bisherigen sind wir nun in der Lage, das allgemeine Convergenzkennzeichen bestimmter Integrale folgendermassen auszusprechen:

Um die Convergenz des bestimmten Integrals $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ zu erforschen, bei welchem $\varphi(x)$ nur auf die nichtperiodischen, elementaren Transcendenten reducirt werden kann, verfahre man folgendermassen:

1. Etwa vorhandene Logarithmen schaffe man durch Substitution einer neuen Variabeln für den vielfachsten Logarithmus weg; hierdurch entsteht das Integral $\int_{a'}^\infty \psi(x')dx'$, welches für $x'=x'_1, x'_2, x'_3 \ldots x'_n$ singulär werden mag.

2. Man führe eine neue Variable $x''_r = \pm \frac{1}{x'_r - x'}$ in den einzelnen singulären Integralen ein, so entstehen n stetige Integrale von der Form $\int_{b_r}^\infty \chi(x'')dx''$ und bleibt noch übrig das Integral $\int_{d>x'_n}^\infty \psi(x')dx'$.

3. Jedes dieser $n+1$ Integrale mit der oberen Grenze $=\infty$ wird nun so geprüft:

$J = \int_c^\infty \frac{dy}{f(y)}$ convergirt nur dann, wenn für $y=\infty$ auch $f(y)=\infty$ und $f'(y)=\infty$ sind.

Anmerkung 1. Aus der Untersuchung der einzelnen Integrale ergeben sich im Allgemeinen Bedingungen, denen die in dem gegebenen Integrale etwa vorkommenden Parameter unterworfen sein müssen, wenn das letztere einen endlichen und bestimmten Werth besitzen soll.

Anmerkung 2. Die Convergenzkriterien, die bisher aufgestellt wurden und bei denen bald Reihen durch Integrale, bald Integrale mit Hülfe von Reihen untersucht wurden, findet man ausser den oben bei den Reihen angeführten Orten bei: Raabe in Baumgartner's und Ettingshausen's Zeitschr. für Math. 10. Bd.; Duhamel in Liouv. Journ. 4. Bd.; Bertrand in Liouv. Journ. 7. Bd.; Ossian Bonnet — auch speciell über singuläre bestimmte Integrale — in Liouv. Journ. 8. Bd.; Schlömilch und Anderen. — Das allgemeine Princip derselben bestand in der Reihenvergleichung.

Aufgaben.

Aufgabe 1. Man soll über die Convergenz des vollständigen Integrallogarithmus entscheiden.

Auflösung. Gegeben $J = \int_0^1 \frac{dx}{lx} = [0{\cdot}577.. + lo]$.

Setze nach 1. des obigen Theorems $lx = -x'$, so entsteht $J = -\int_0^\infty \frac{e^{-x'}}{x'} dx'$, welches für $x' = 0$ singulär wird; wir zerlegen also $J = -\int_0^1 \frac{e^{-x'}}{x'} dx' - \int_1^\infty \frac{e^{-x'}}{x'} dx' = J_1 + J_2$.

Untersuchung von $J_1 = -\int_0^1 \frac{e^{-x'}}{x'} dx'$; setze nach 2. des Theorems $x'' = \frac{1}{x'}$, so entsteht $J_1 = -\int_1^\infty \frac{dx''}{x'' . e^{\frac{1}{x''}}}$; es ist also für $x'' = \infty$

nach 3..... $f(x'') = x'' . e^{\frac{1}{x''}}$ ebenfalls $= \infty$

$f'(x'') = 1$; also harmonisch divergent.

Untersuchung von $J_2 = -\int_1^\infty \frac{e^{-x'}}{x'} dx'$; für $x' = \infty$ ist nun

$f(x') = x' . e^{x'} = \infty$ und auch

$f'(x') = x' . e^{x'} + e^{x'} = \infty$, also convergent.

Wir finden also: der Integrallogarithmus ist eine unendliche Grösse, und zwar ein unendlicher Logarithmus, nämlich $= J_1 = -lx'' = lx' = l(-lx)_1 = l(0)$ — wie bereits bekannt ist.

Aufgabe 2. Wann convergirt das aus der Theorie der Gammafunction bekannte Integral $J = \int_0^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x}$?

Auflösung. Da für $\mu < 1$ bei $x = 0$ ein Durchgehen durch ∞ eintritt, so zerlegen wir:

$$J = J_1 + J_2 = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x} + \int_1^\infty \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x} .$$

Untersuchung von $J_1 = \int_0^1 \frac{x^{\mu-1}dx}{1+x}$; setze also $x_1 = \frac{1}{x}$, so entsteht $J_1 = \int_1^\infty \frac{dx_1}{(x_1+1)x_1^\mu}$,

daher $f(x_1) = (x_1+1)x_1^\mu$ für $x_1 = \infty$ ebenfalls $= \infty$
und $f'(x_1) = (\mu+1)x_1^\mu$ für $x_1 = \infty$, nur dann ∞, wenn $\mu > 0$ ist.

Untersuchung von $J_2 = \int_1^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}$, also für $x = \infty$

$f(x) = x^{1-\mu}(1+x)$ selbst ∞,
$f'(x) = (2-\mu)x^{1-\mu}$ ebenfalls gleich $= \infty$, wenn $\mu < 1$ ist.

Also ist $\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}dx$ convergent für $1 > \mu > 0$ — wie bekannt.

Aufgabe 3. Die Werthe des Parameters zu finden, für welchen die Gammafunction selbst convergirt.

Auflösung. Gegeben $\Gamma(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}.e^{-x}dx$; da auch hier für allgemeine μ ein Durchgang durch Unendlich eintreten kann, zerlege $\Gamma(\mu)$ in $J_1 + J_2$; von $J_1 = \int_0^1 x^{\mu-1}e^{-x}dx$ und $J_2 = \int_1^\infty x^{\mu-1}e^{-x}dx$.

Untersuchung von J_1; setze $x = \frac{1}{x_1}$, so wird $J_1 = \int_1^\infty \frac{dx_1}{x_1^{\mu+1}e^{\frac{1}{x_1}}}$;

also $f(x_1) = x_1^{\mu+1}e^{\frac{1}{x_1}}$ für $x_1 = \infty$ auch $= \infty$ und

$f'(x_1) = (\mu+1)x_1^\mu.e^{\frac{1}{x_1}} + \ldots$ ebenfalls ∞, wenn $\mu > 0$.

Untersuchung von $J_2 = \int_1^\infty .x^{\mu-1}e^{-x}dx$; also

$f(x) = x^{1-\mu}.e^x$ für $x = \infty$ ebenfalls ∞;
$f'(x) = x^{1-\mu}.e^x + \ldots$ für $x = \infty$ ebenfalls ∞.

Also convergent die Gammafunction nur für $\mu > 0$.

Aufgabe 4. Das Integral $\int_0^1 \frac{x^m - 1}{lx}dx$ auf Convergenz zu prüfen [m positiv angenommen].

Auflösung. In diesem Falle wäre blos das singuläre Integral für $x=1$ zu untersuchen; da dies nach der allgemeinen Regel sehr einfach geschieht, so wollen wir hier einer anderen Betrachtung wegen folgenden Weg einschlagen:

Wir sehen $J=\int_0^1 \frac{x^m-1}{lx}\,dx$ als Differenz der beiden Integrale $J_1=\int_0^1 \frac{x^m}{lx}\,dx$ und $J_2=\int_0^1 \frac{dx}{lx}$ an; setzen in J_1 eine neue Variable $y=x^{m+1}$, so ist $J=J_1-J_2=\int_0^1 \frac{dy}{ly}-\int_0^1 \frac{dx}{lx}$; diese Differenz ist aber nicht $=0$, denn nach Aufgabe 1. ist jeder vollständige Integrallogarithmus $\int_0^1 \frac{dx}{lx}=-l\infty+C$, wobei das ∞ aus dem transformirten Integrale $-\int_1^\infty \frac{dx''}{x''.e^{\frac{1}{x''}}}$ für die obere Grenze des x'' genommen werden muss; also

$$J_2=-lx''+C=l(-lx)+C$$
$$J_1=-ly''+C=l(-ly)+C$$

und daher

$$J_1-J_2=l(-ly)-l(-lx);\ \text{da } y=x^{m+1},$$

so wird nun

$$J=J_1-J_2=l(m+1),$$

d. h. das gesuchte Integral ist mit m zugleich endlich und auch dem wahren Werthe nach gefunden, wie ihn Euler zuerst in seiner Integralrechnung angegeben hatte [1]).

Nach dem Vorhergehenden gewinnen wir nun zuvörderst die anschauliche Bedeutung eines merkwürdigen Umstandes aus der Theorie bestimmter Integrale:

Es gibt nämlich — nach einer von Dirichlet im 15. Bande Crelle gemachten Bemerkung — für den Satz: In einem bestimmten Integrale kann für die Variable eine beliebige andere substituirt

---

[1]) Euler's Int. R. Theil 4. Supplement 5; siehe auch eine Abhandlung von Wolfers über dieses Int. in Grunert's Archiv Bd. 37.

werden, eine Ausnahme, wenn es sich um die Differenz zweier divergenter Integrale handelt. Es ist also in diesem Falle nicht erlaubt, wenn die Auswerthung dieser Differenz, wie z. B. in dem Integral $J=\int_0^1 \frac{x^m}{lx}dx-\int_0^1 \frac{dx}{lx}$, verlangt wird, in den beiden Integralen bedingungslos zwei verschiedene Substitutionen zu machen; hierdurch würde in diesem Beispiele durch respective Einsetzung von $x^{m+1}=y$ und $x=x$ die Differenz $J=0$ statt $l(m+1)$ erhalten werden; eben so in $J=\int_0^\infty \frac{e^{-qx}}{x}dx-\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x}dx$ durch respective Substitution von $y=qx$ und $y=px$ statt $l\left(\frac{p}{q}\right)$ ebenfalls die Nulle als Werth dieser Differenz.

Die Erklärung aller dieser Eigenschaften finden sich nach Zuhülfenahme des Hülfssatzes IV und seines Zusatzes in der ersten Abtheilung. Denken wir uns nämlich $J=J_1-J_2$ gegeben und sowohl J_1 als auch J_2 logarithmisch divergent, so können wir diese beiden Integrale auch als die natürliche harmonische Reihe betrachten, die aber in jedem einzelnen Integrale verschieden weit fortgeführt erscheint. Ist also

$$J_1=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{ax}+\ldots+\frac{1}{bx}=l(bx)+C$$

und

$$J_2=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{ax}=l(ax)+C,$$

immer $x=\infty$ genommen, so wird

$$J=J_1-J_2=\frac{1}{ax+1}+\frac{1}{ax+2}+\ldots+\frac{1}{bx}=l\left(\frac{b}{a}\right).$$

Die Grössen a und b zeigen an, wie weit jedes der logarithmisch divergenten Integrale in der harmonischen Reihe fortschreitet, bestimmen also den — jedenfalls unendlichen — Stellenzeiger näher und rühren eben von den verschiedenen Substitutionen her, die gemacht wurden, um aus den ursprünglich formell verschiedenen Integralen formell gleiche zu machen; deren Differenz wird daher

natürlich — scheinbar — der Nulle gleich, wenn man die Verschiedenheit in dem Unendlichen der Grenze nicht berücksichtigt.

Offenbar ist es aber nicht nothwendig, dass die beiden bestimmten Integrale, wie oben angenommen wurde, schon in ihren endlichen Gliedern logarithmische seien, sondern sie brauchen blos erst im Unendlichen so zu werden, wie dies in den obigen Beispielen auch der Fall ist; denn die im Endlichen stehenden Glieder sind correspondirend einander gleich, — heben sich daher auf für die gesuchte Divergenz — wenn man durch Substitution im Stande ist, den Functionen unter dem Integralzeichen gleiche Form zu geben.

Diese Bedingungen alle sind bei den in der Integralrechnung vorkommenden Fällen erfüllt; so ist z. B. auch

$$J = J_1 - J_2 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\cos px}{x}\,dx$$

beschaffen; denn beide Integrale erhalten durch die Substitutionen $x = x$ und $px = y$ genau dieselbe Form; beide werden — für $x = 0$ als singulärer Werth — harmonisch unendlich, und ergaben nach den verschiedenen Methoden $J = lp$. Dies wäre nach unserer Deduction so zu finden:

$$J_1 = \int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{x_1}\right)dx_1}{x_1} = l(x_1)_\infty \text{ und für } px = y = x_1$$

$$J_2 = \int_{\frac{1}{p}\cdot 0}^{\frac{1}{p}\cdot\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x_1}\right)dx_1}{x_1} = l(x_1)_{\frac{\infty}{p}};$$

also

$$J = l\infty - l\frac{\infty}{p} = lp.$$

Eben so erfüllt die Integraldifferenz, an der Dirichlet die ersten Bemerkungen über diesen Gegenstand knüpfte, diese Eigenschaften; es ist nämlich nach Dirichlet:

$$\frac{d.\Pi(1+\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \frac{dt.e^{-t}}{t} - \int_0^\infty \frac{dt}{t(1+t)^{\mu+1}};$$

beide werden für $t = 0$ logarithmisch divergent und stammen ferner von derselben Form, weil sie ihre Entstehung der Benützung des

Ausdruckes $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t} dt = lx$ verdanken (siehe Crelle Bd. 15 oder Schlömilch Analytische Studien S. 48 oder Bieren's de Haan a. a. O. S. 337).

Diese Differenzen bestimmter divergenter Integrale bedeuten also in allen diesen Fällen das im Unendlichen stehende Stück

$$\underbrace{\frac{1}{ax+1} + \frac{1}{ax+2} + \ldots + \frac{1}{(a+1)x} + \ldots + \frac{1}{bx}}_{x=\infty}$$

der natürlich harmonischen Reihe, um welches das erste Integral weiter hinausreicht als das zweite, und bieten demnach eine Summe unendlich vieler unendlich kleiner Glieder dar.

Es handelt sich endlich darum: Welche verschiedene Substitutionen sind in zwei divergenten Integralen erlaubt?

Dirichlet hatte in dem angeführten Beispiele in dem ersten Integral anstatt $t \ldots w$ und im zweiten anstatt $t \ldots e^w - 1$ gesetzt; und eine derartige verschiedene Substitution gerechtfertigt, indem er nachwies, dass man hierbei keinen Fehler begehe.

Aber: Man bedenke, dass nach dem Obigen ein möglicher Fehler nur dadurch entstehen kann, dass der Divergenzwerth, oder, was dasselbe ist, das Unendliche der Variabeln, durch die Substitutionen alterirt wird und dass ferner für alle endlichen Werthe alle beliebige Substitution erlaubt sein müssen.

Wir gelangen hiernach zu dem Theorem:

In zwei divergenten Integralen, deren Differenz gesucht wird, sind alle jene von einander verschiedene Substitutionen erlaubt, welche sich für den Divergenzwerth der Variabeln wieder gleich gestalten.

So war Dirichlet's Substitution erlaubt, weil für den Divergenzwerth $t = 0$ sowohl $t = w$, als auch $t = e^w - 1 = 1 + w - 1 = w$ übereinstimmen; man könnte aber auch nach Belieben $t = \sin w$ und $t = \operatorname{arctg} w$ combiniren oder $t = e^w - 1$ und $t = \operatorname{tang} w$ u. s. w. Nicht aber $t = \sin aw$ und $t = \operatorname{tg} bw$.

Anhang.

Über die Constante des Integrallogarithmus.

Der Hülfsatz IV liefert eine Methode, um eine Näherungsformel und eine geometrische Deutung der bekannten Constanten des Integrallogarithmus direct zu finden:

Dieselbe ist nämlich

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+..+\frac{1}{n}-l(n+1) \text{ für } n=\infty.$$

Nun war im Hülfssatz III die Subsecante der Reihe

$$A=\frac{1}{c^{\frac{1}{m}}}+\frac{1}{c^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+d}}}+\frac{1}{c^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+d}+\frac{1}{m+2d}}}+\ldots\ldots$$

gleich

$$h_n=\frac{1}{c^{\sum_0^n \frac{1}{m+nd}\left[\frac{1}{c^{m+(n+1)d}}-1\right]}};$$

ferner divergirte diese Reihe harmonisch, d. h. ihre Subsecanten müssen im Unendlichen constant sein, wenn $C=e^d$ war.

Wählen wir nun $d=1$, so ist die Reihe

$$A=\frac{1}{e^{\frac{1}{m}}}+\frac{1}{e^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}}}+\frac{1}{e^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}}}+\ldots,$$

wo $e=2{\cdot}71828\ldots$; also deren Subsecante

$$h_n=\frac{1}{e^{\sum_0^n \frac{1}{m+n}\left[\frac{1}{e^{m+(n+1)}}-1\right]}}.$$

Ferner war nach Hülfssatz IV die Summe von

$$A=\sum_0^\infty \frac{1}{m+n.d}=\frac{1}{d}\,l[m+(n+1)d]-\frac{ld}{d}-\frac{lh_n}{d}$$

— unter Voraussetzung harmonischer Divergenz — und für

$$\left.\begin{matrix} d=1 \\ m=0 \end{matrix}\right\} A=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{1}^{n=\infty}\frac{1}{n}=l[n+1]-lh_n$$

und da zufolge Definition

$$C=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}-l[n+1],$$

so ist die gesuchte Constante $=l\frac{1}{h_n}$, und daher auch $h_n=\frac{1}{e^C}$.

Die Bedeutung von C kann daher so angegeben werden:

Wenn man die Reihe

$$\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}+\ldots.$$

nach unserer Methode darstellt, und ihre im Unendlichen constant werdende Subsecante h_n construirt, so ist der natürliche Logarithmus der reciproken Subtangente die Constante des Integrallogarithmus.

Hieraus folgt auch sogleich eine Annäherungsformel:

Denn erstens machen die Glieder $C_n=\sum_{1}^{n}\frac{1}{n}-l(n+1)$ eine steigende Reihe — mit der Grenze $h_\infty=\frac{1}{e^{C_\infty}}$ aus; was sich so beweisen lässt:

$$C_n=\sum_{1}^{n}\frac{1}{n}-l(n+1)$$

$$C_{n+1}=\sum_{1}^{n+1}\frac{1}{n}-l(n+2)$$

$$\Delta=C_{n+1}-C_n=\frac{1}{n+1}+l\left[\frac{n+1}{n+2}\right]=\frac{1}{n+1}-l\left[1+\frac{1}{n+1}\right],$$

welche Differenz selbst von $n=1$ an nie ihr Zeichen ändert und stets >0 bleibt.

Zweitens bilden die Glieder $C_1'C_2'C_3'\ldots.$ eine abnehmende Reihe mit derselben Grenze $-lh_\infty$, wenn $C_n'=\sum_{1}^{n}\frac{1}{n}-ln$ genommen wird; der Beweis ist dem Obigen ähnlich:

$$C_n' = \sum_1^n \frac{1}{n} - ln$$

$$C_{n+1}' = \sum_1^{n+1} \frac{1}{n} - l(n+1)$$

$$\Delta^1 = C_{n+1}' - C_n' = \frac{1}{n+1} + l\left[\frac{n}{n+1}\right] = \frac{1}{n+1} + l\left[1 - \frac{1}{n+1}\right],$$

welche Differenz von $n = 1$ an ebenfalls nie ihr Zeichen ändert und stets < 0 bleibt.

Hieraus folgt: für $n = 1$ ergibt sich schon eine obere und untere Grenze für C, nämlich

$$\text{aus } 1 = l2 + C_1 \ldots C_1 = 0{\cdot}337\ldots$$
$$\text{aus } 1 = l1 + C_1' \ldots C_1' = 1;$$

also liegt C zwischen 1 und 0·337.

Und endlich war

$$h_n = \frac{1}{e^{\sum_1^n \frac{1}{n}\left[\frac{1}{e^{n+1}} - 1\right]}}, \quad \text{also } -lh_n = C_n = \sum_1^n \frac{1}{n} + l\left[e^{\frac{1}{n+1}} - 1\right]$$

eine Näherungsformel für die gesuchte Constante. Z. B. für $n = 25$ lieferte sie $C_{25} = 0{\cdot}57715..$, deren wahrer Werth ist $= 0{\cdot}57721....$

XXVI. SITZUNG VOM 17. NOVEMBER 1865.

Herr Hofrath Prof. J. Hyrtl im Vorsitze.

Das h. k. k. Staatsministerium übermittelt, mit Zuschrift vom 13. November l. J., die graphischen Darstellungen der Eisverhältnisse der Donau in Oberösterreich vom Winter 1864/65.

Das k. k. Consistorium der Wiener Universität übersendet das aus Anlass der 500jährigen Jubelfeier dieser Hochschule erschienene Universitäts-Taschenbuch, die Festmedaille und die von Herrn Prof. Dr. Jos. Aschbach verfasste Festschrift.

Herr Hofrath W. Ritter v. Haidinger übermittelt einen „Auszug aus einem Schreiben des Herrn Dr. Stoliczka aus Kaschmir".

Herr Dr. K. Diesing übergibt die Fortsetzung seiner „Revision der Prothelminthen, Abtheilung: Amastigen".

Herr Dr. A. Boué überreicht eine Abhandlung: „Über das Zusammentreffen fossiler Überbleibsel aus mehreren Classen der organischen Natur".

Das c. M. Herr Director Dr. C. Jelinek legt eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung vor: „Über den jährlichen Gang der Temperatur und des Luftdruckes in Österreich und in einigen benachbarten Stationen".

Herr Prof. E. Mach aus Gratz macht eine für den akademischen Anzeiger bestimmte Mittheilung „über wissenschaftliche Anwendungen der Photographie und Stereoskopie".

Herr Dr. S. Stricker übergibt eine von ihm gemeinschaftlich mit Herrn Dr. Leidesdorf verfasste Abhandlung, betitelt: „Studien über die Histologie der Entzündungsherde".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon: Bulletin. Janvier-Mars 1865. 8°.

Akademie der Wissenschaften, königl. bayer.: Abhandlungen der historischen Classe. IX. Band, 2. Abthlg.; X. Band, 1. Abthlg. München, 1865; 4°. (Nebst den zugehörigen Separatabdrücken.) — Muffat, Karl August, Die Verhandlungen der protestantischen Fürsten in den Jahren 1590 u. 1591 zur Gründung einer Union. München, 1865; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 22. Wien, 1865; 8°.

Aschbach, Joseph, Geschichte der Wiener Universität im ersten Jahrhunderte ihres Bestehens. Festschrift. Wien, 1865; 8°.

Baer, Karl Ernst von, Das 50jährige Doctor-Jubiläum desselben am 29. August 1864. St. Petersburg, 1865; 4°.

Beyrich, E., Über eine Kohlenkalk-Fauna von Timor. (Abhdlgn. der k. Preuss. Akad. d. Wiss. 1864.) Berlin, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. Nr. 18. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 19e—20e Livraisons. Paris, 1865; 8°.

Frommhold, Carl, Elektrotherapie mit besonderer Rücksicht auf Nervenkrankheiten. Pest, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 46. Wien, 1865; 8°.

Goyda, A. N., Η Μελισσα των Αθηνων. Περιοδος δευτερα, τομος δευτερος, ψυλλαδιον Η. κατα Αυγουσον. Εν Αθηναις, 1865; 8°.

Herder, F. v., Reisen in den Süden von Ostsibirien ausgeführt in d. J. 1855—1859 durch G. Radde. Band III. Heft 1. Moskau, 1864; 8°.

Horatiis, Cesare de, Nuovi elementi della scienza acustico-musicale applicabili alla scienza delle arti. Napoli, 1865; 12°.

Hough, G. W., Description of an automatic registering and printing Barometer. Albany, 1865; 8°.

Hugueny, M. F., Recherches sur la composition et les propriétés des eaux potables. Paris & Strassbourg, 1865; 8°. — Recherches expérimentales sur la dureté des corps et spécialement sur celles des métaux. Paris & Strassbourg, 1865; 8°.

Jahresbericht am 17. Mai 1864 dem Comité der Nicolai Hauptsternwarte abgestattet. Petersburg, 1864; 8°.

[illegible] Die Auflösung der höheren numerischen Gleichungen nach einer neuen Methode. Leipzig, 1865; 4°

[illegible] Nouveaux phénomènes des corps cristallisés. [illegible] Folio.

[illegible] Jahrg. September—October 1865. Prag; 8°

[illegible] Recherches sur les combinaisons du Niobium. 1er Mémoire. (Tiré de la Bibl. Univers. [Archives des sciences phys. et nat.] Tome XXIII.) 8°

[illegible] des k. k. Genie-Comité. Jahrg. 1865. 9. Heft. Wien, 8°

[illegible] Supplement zur klimatographischen Übersicht der Erde. Mit einem Appendix. Leipzig & Heidelberg, 1865; 8°

Museum of comparative Zoology: Annual Report. 1864. Boston, 1865; 8°

Pennetier, Georges, Les microscopiques. (Extr. des Actes du Museum d'hist. nat. de Rouen 1865.) Rouen, 1865; 4°

Reader. Nr. 150. Vol. VI. London, 1865; Folio.

Real-Gymnasium, Das, erörtert vom Standpunkte einer Reform des österr. Mittelschulwesens. Prag, 1864; 8°

Regel, E., et F. ab Herder. *Enumeratio plantarum in regionibus cis- et transiliensibus a Cl. Semenovio anno 1857 collectarum. Mosquae, 1864*; 8°

Report, Annual, of the Chief Engineer of the Water Department of the City of Philadelphia etc. Philadelphia, 1861; 8°

Société philomatique de Paris: Bulletin. Tome II. Janvier—Mai 1865. Paris; 8°

Strassenkarte des Königreichs Böhmen, herausgegeben vom k. k. milit.-geographischen Institute im Jahre 1865. 4 Blätter in gr. Folio.

Taschenbuch der Wiener k. k. Universität für das Jahr 1865. Aus Anlass der 500jährigen Jubelfeier herausgegeben. Wien; 8°

Verein, naturforschender, in Brünn: Verhandlungen. III. Band. 1864. Brünn, 1865; 8°

Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Veterinärkunde. XXIV. Band, 2. Heft. (Jahrg. 1865. IV.) Wien, 1865; 8°

Vogel, August, Die Bieruntersuchung. Berlin, 1866; 8°

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 90—91. Wien, 1865; 4°

Wilcocks, Alexander, Thoughts on the Influence of Ether in the Solar System etc. Philadelphia, 1864; 4°.

Winkler, T. C., Catalogue systématique de la collection paléontologique du Musée Teyler. 3e Livraison. Harlem, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XV. Jahrg. Nr. 1. Gratz, 1865; 4°.

Wolf, Rudolf, Mittheilungen über die Sonnenflecken. XVI—XVII. 8°.

Zantedeschi, Francesco, Dell'andamento orario diurno e mensile annuo delle temperature alla superficie e all'intero del globo. Venezia, 1865; 8°.

Studien über die Histologie der Entzündungsherde.

Von **Dr. Max Leidesdorf** und **Dr. S. Stricker** in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Wir haben uns die Aufgabe gestellt, die Texturveränderungen des Gehirns nach schweren mechanischen Eingriffen mit den heute zu Gebote stehenden Mitteln zu untersuchen. Wir machten uns dabei die Erfahrung zu Nutze, dass junge Hühner Eingriffe in das Grosshirn so gut vertragen und wählten daher die genannten Thiere zu unseren bereits angedeuteten Versuchen.

Eine Operationsmethode zu beschreiben dürfte kaum nothwendig sein, da es hinreichend bekannt ist, wie leicht man bei jungen Vögeln die dünne Schädeldecke abtragen kann.

Das Wesentliche, was wir in Rücksicht auf unser Verfahren zu verzeichnen haben, ist also nur, dass wir die Hemisphären des Grosshirns gewöhnlich durch einen oder zwei ausgiebige Schnitte verletzten, jedoch ohne einen Substanzverlust zu setzen, und dann das Thier mehrere Tage bis zu zwei Wochen leben liessen.

Die mikroskopische Untersuchung wurde so angestellt, dass wir entweder die Wunde blosslegten und dann Gewebstrümmer der verletzten Hirnpartie frisch untersuchten, oder wir härteten das Hirn in doppeltchromsaurem Kali und fertigten theils Zupfpräparate und theils Querschnitte an. Die erstgenannte Untersuchungsmethode haben wir namentlich zu dem Zwecke eingeleitet, um die Formelemente auf dem geheizten Objecttische beobachten zu können.

Die gute Conservirung der Gewebselemente in doppeltchromsaurem Kali brauchen wir nicht erst anzupreisen; was wir jedoch hervorheben müssen, ist, dass die Erhärtung der Vogelhirne auf diesem Wege zu einer Consistenz derselben führt, welche durch Chromsäure nur in sehr glücklichen Fällen erreicht wird und nur sehr kurze Zeit erhalten werden kann. Wir besitzen einige Vogelhirne, welche jetzt schon mehr als zwei Monate in dem Reagens sind, und sich jetzt noch zur Anfertigung dünner durch das ganze Organ gehender Schnitte vortrefflich eignen. Die leichte Imbibition mit

Karmin gewährt ausserdem gegenüber der bekanntlich schwierigen Behandlung von in Chromsäure gehärteten Präparaten keinen geringen Vorzug.

Unser Augenmerk war zumeist darauf gerichtet, die Gewebselemente im Entzündungsherde von dem Standpunkte aus zu prüfen, auf welchem sich die heutige Zellenlehre seit der Initiative von Max Schultze befindet. Wir haben daher das Experiment und das Leben zu Hülfe genommen, weil dies uns der zweckmässigste Weg zu sein schien um zu einer elementaren Studie zu gelangen.

Einen Tag nach der Verletzung fanden wir in der nächsten Umgebung der verwundeten Hirnrinde einzelne sogenannte Körnchenzellen. Noch einen Tag später waren diese bereits zahlreicher, und nach mehreren Tagen war das Gewebe bis auf etwa eine Linie tief und der Ausdehnung des directen Eingriffes entsprechend nur aus Körnchenzellen und Fasern zusammengesetzt. Die letzteren erwiesen sich häufig als Ausläufer der ersteren und selbst mehr oder minder reichlich von Körnchen durchsetzt. Die ganze so veränderte Gewebsstrecke erschien bei schwachen Vergrösserungen im durchfallenden Lichte dunkel, im auffallenden Lichte hell, so dass sich die Ausdehnung des erkrankten Herdes auf Durchschnitten desselben mit einiger Sicherheit erkennen liess.

Die Körnchen in den Zellen und Fasern waren von ungleicher Grösse, und die Zellen selbst boten die verschiedensten Abstufungen in Bezug auf ihre Grösse, ihre Gestalt und auf die Quantität der in ihnen eingebetteten Körnchen.

Nach der hergebrachten Anschauung sollten wir sagen, dass sich uns die verschiedensten Stadien der fettigen Degeneration der Zellen dargeboten haben, dass der Herd von Körnchenzellen und Körnchenkugeln durchsetzt war.

Wir können uns aber mit der bisher aufgestellten Charakteristik dieser letztgenannten Gebilde nicht einverstanden erklären. Man sagt: Eine Körnchenzelle entstehe aus einer gesunden Zelle, welche unter Aufnahme von Fettkörnchen erst ihren Kern verliere, und dann auch die Membran, um als Körnchenkugel ihrem Zerfalle entgegen zu gehen. Und so nannte man diejenige Fettkörnchen tragende Zelle, welche noch eine Membran besitzt, eine Körnchenzelle, diejenige aber, an welcher die Membran in Folge des fortschreitenden Zerfalles bereits geschwunden ist, eine Körnchenkugel.

Was man indessen wirklich sehen kann, ist, dass die Körnchenkugel, wegen der zahlreich vorhandenen und auf der Oberfläche vorragenden Körnchen uneben begrenzt ist, während in der Körnchenzelle die Körnchen relativ weniger sind, und daher die homogene Grundsubstanz oder besser gesagt der Zellenleib in seinen äussersten Schichten keine Körnchen enthält, und eine ebene Begrenzung darbietet.

Wenn man die Körnchenzellen aus Gewebstrümmern, welche dem lebenden Thiere entnommen wurden, auf dem geheizten Objecttische bei einer Temperatur von circa 36° C. untersucht, so zeigen viele von ihnen amöbenförmige Bewegungen. Also, müssen wir sagen, sind viele von ihnen junge Zellen, denen die übrigens ganz bedeutungslose Membran fehlt. Dann fällt aber auch der Unterschied zwischen einer mit Membran umgebenen Körnchenzelle und der membranlosen Körnchenkugel weg.

Zwischen diesen beiden Formelementen ist daher vorläufig kein anderer Unterschied festgestellt, als dass das eine viel und das andere relativ weniger Fettkörnchen enthält, oder in sofern das Auftreten von Fett als ein krankhafter Vorgang bezeichnet wird, ist das eine von dem krankhaften Processe intensiver ergriffen als das andere.

Damit, dass eine Zelle mehr Fettkörnchen enthält als eine andere, ist noch nicht erwiesen, dass jene dem Zerfalle näher gerückt ist als diese, weil es überhaupt nicht erwiesen ist, dass eine sogenannte Körnchenkugel zerfallen müsse.

Wenn man aus einer solchen Fettkörner austreten sieht, so spricht das noch gar nicht dafür, dass sie aufgehört hat ein lebender Organismus zu sein. Die Epithelien der Zotten nehmen sehr oft Fettkörnchen auf und geben sie wieder ab, ohne mit dieser einen Leistung ihr Lebensende erreicht zu haben. Wenn man daher in einem Entzündungsherde freies Fett findet, so lässt sich daraus nicht schliessen, dass ein Zerfall von Zellen stattgefunden habe.

Wohl sieht man, wenn man Gewebstrümmer in Reagentien untersucht, kleine Klümpchen herumschwimmen, welche anscheinend von Zellen abgerissen sind. Solche Klümpchen sieht man aber auch wenn man Embryonal-Zellen untersucht, und doch wird Niemand sagen, dass Embryonal-Zellen im Embryo zerfallen.

Auf Durchschnitten gehärteter Präparate sahen wir niemals solche an Zerfall mahnende Klümpchen. Wir müssen daher daran

denken, dass ein wirkliches Zerfallen der Zelle erst durch das Reagens bewirkt werde, mag dieses auf dem Objectträger einwirken, oder indem sich in irgend einem Erkrankungsherde Höhlen bilden, und Flüssigkeiten ansammeln, welche als Reagens dienen. Dass aber zellige Elemente mitten im Entzündungsherde zerfallen, dafür haben wir in unserem speciellen Falle keinen Anhaltspunkt auffinden können.

Wir wollen aber den Zerfall und den Untergang einer Zelle nicht in eines zusammenwerfen. Denn wenn ein Zellenleib zu einer leimgebenden Faser umgestaltet wird, so ist er als solcher untergegangen. Das ist aber ein Process, welcher im gesunden Leben sein Vorbild findet, und welchen wir, abgesehen von den uns unbekannten chemischen Processen, auch für den Entzündungsherd aufrecht erhalten müssen.

Wenn man in einer Körnchenzelle keinen Kern sieht, so kann das nach den neuesten Erfahrungen auch nicht als ein sicheres Kriterium für den bevorstehenden oder eingetretenen Untergang gelten.

Seit man durch Haeckl einen kernlosen Rhizopodenkörper kennen gelernt hat, kann der Kern nicht mehr als ein nothwendiges Attribut der lebenden thierischen Zelle gelten.

Es ist übrigens gar nicht richtig, dass die Körnchenkugeln keinen Kern haben. In vielen derselben konnten wir den Kern durch Imbibition mit Karmin sichtbar machen. Wir können es deutlich genug demonstriren, dass Kugeln, welche im Sinne der Alten nur mehr einen Körnchenklumpen darstellen, einen roth tingirten kugeligen Kern besitzen.

Mit der zunehmenden Masse und Grösse der Körner wird der Kern allerdings schwerer sichtbar und mag sich vielleicht auch schwerer imbibiren; seine Existenz zu läugnen, sind wir aber, so weit es den Entzündungsherd des Vogelhirns betrifft, nicht berechtigt.

Wir haben schon früher angeführt dass von Körnchenzellen Ausläufer hervorkommen, welche selbst mit Körnchen erfüllt sind. Diese Ausläufer erscheinen unter mannigfachen Grössenverhältnissen, und wir können sie nicht besser charakterisiren, als wenn wir sagen, dass sie in vieler Beziehung dem embryonalen Bindegewebe gleichen.

Wenn man die Körnchenzellen oder Kugeln und die Körnchenfasern genau betrachtet, so drängt sich dabei die Vermuthung auf, dass die letzteren aus den Körpern der ersteren hervorgegangen sind, und diese Vermuthung findet in dem Umstande, das die Körnchen-

zellen amöbenartige Bewegungen ausführen können, nicht geringe Unterstützung.

Die Untersuchung älterer Entzündungsherde hat übrigens eine solche Anschauung weit über die Grenzen der Vermuthung hinausgeführt.

An einem Thiere, welches am 14. Tage nach der Verletzung getödtet wurde, fanden wir die dem wunden Knochenrande adhärirende Hirnrinde in der überwiegenden Menge aus feinen Fibrillen zusammengesetzt, zwischen welchen nur mässig zahlreich eingestreute Körnchenzellen lagen. Die Fibrillen selbst zeigten stellenweise kleine mit Körnchen vollgepfropfte Verdickungen; viele von ihnen konnte man bis zu Körnchenzellen verfolgen; diese zeigten aber jetzt einen deutlichen Kern und waren die Körnchen mit geringen Ausnahmen kleiner als an jüngeren Herden.

Dass viele Fibrillen neugebildet waren, konnte, nach ihrer Anzahl zu schliessen, keinem Zweifel unterliegen, und eben so wenig konnten wir über ihre Genese in Zweifel bleiben. Ihr Zusammenhang mit Körnchenzellen, und die in ihrem Verlaufe noch eingestreuten Körnchen lassen uns hier keine Wahl übrig.

Wir haben demgemäss den Nachweis geliefert, dass Körnchenzellen in einem durch Trauma hervorgerufenen Entzündungsherde der Hirnrinde erstens einmal ihren Lebenseigenschaften nach auf der Stufe junger Zellen stehen können, und zweitens dass sie ihr Schicksal nicht unfehlbar zum Zerfalle führt, sondern dass ein Theil ihres Körpers zur Faserbildung verwendet werden kann, zur Bildung von Fibrillen, welche an alten Herden die Hauptmasse des Gewebes ausmachen.

Wenn wir sagen, dass ein Theil der Zelle zur Faserbildung verwendet wird, so stützen wir uns dabei vornehmlich auf die Bilder, wo der kugelige Kern nur von Spuren von Protoplasma umgeben ist, wo der Kern förmlich in einer Fibrille eingebettet ist, und nur die in der letzteren angehäuften Körnchen noch daran erinnern, dass wir es mit den Resten einer Körnchenkugel zu thun haben. Hier ist also der Zellenleib förmlich in die Faser übergegangen.

An einem Hirne, welches einem am sechsten Tage nach der Verletzung des linken vorderen Grosshirnabschnittes getödteten Thiere entnommen war, schien es, als beschränkten sich die Veränderungen hauptsächlich auf das Gefässsystem. Die Gewebstrümmer

von der Oberfläche der durch den Entzündungsprocess entstandenen unebenen Vertiefung erwiesen sich zumeist als Convolute von capillaren Blutgefässen.

Wir haben solche Gefässe unter der Immersionslinse untersucht, und waren dabei nicht wenig überrascht von dem mannigfachen Detail, welches die Wände derselben darboten. Wir wollen uns einer genauen Schilderung desselben enthalten, weil sie Herr Dr. Heitzmann durch die gelungene naturgetreue Abbildung besser charakterisirt hat, als es durch Worte möglich ist.

Es erweist sich zunächst, dass die Wand eines solchen Capillargefässes auf der Oberfläche uneben ist, dass sie Spitzen und Höcker trägt, und dass in ihr selbst grössere und kleinere das Licht ungleich brechende Inseln vorkommen.

An vielen Orten erweisen sich die in die Wand eingelagerten Körper als Fett, an anderen Orten liess sich über ihre chemische Zusammensetzung kein Urtheil fällen. Von Stelle zu Stelle gingen von den Wänden seitliche Ausläufer ab, welche, allmählich sich verjüngend, endlich mit einer Spitze aufhörten. Ein solcher Ausläufer ist in Fig. 2 abgebildet, und es zeigt sich, dass auch dieser nicht eben ist, sondern wieder secundäre Spitzen trägt.

Zuweilen sind solche Ausläufer sehr lang, schwellen zu einem Knoten an, verjüngen sich wieder, um dann wieder anzuschwellen und endlich entweder mit einer freien Spitze aufzuhören, oder sich in ein anderes Gefäss einzusenken.

Wir bekamen zuweilen Präparate zu Gesichte, welche viel eher einem Fasergerüste als einem Capillargefässnetze ähnlich sahen. Bei genauer Untersuchung erweisen sich aber die meisten Fasern als Ausläufer von Capillargefässen.

Wie schon erwähnt wurde, waren die Gefässwände selbst von Körnchen durchsetzt; manchesmal hingen ihnen äusserlich Körnchenkugeln so fest an, dass man sie durch Wälzen des Präparates nicht abreissen konnte; manchesmal wieder waren die Anschwellungen der Ausläufer der Gefässe durch die Einlagerung von grösseren und kleineren Körnchen den Körnchenkugeln ähnlich, doch haben wir an solchen niemals einen Kern gesehen.

Wenn auch die Einlagerung von Fettkörnchen in die Gefässwände und das Auswachsen derselben schon früher oft genug beobachtet wurden, so glauben wir doch das Factum diesesmal besonders hervor-

heben zu müssen. Wände, welche, um mit Virchov zu sprechen, nutritiv und formativ verändert werden können, Wände, welche Fettkörnchen in sich entweder aufnehmen oder erzeugen, und welche weiter so massenhaft auswachsen können, müssen in die Reihe der cellulären Elemente gesetzt werden. Mit solchen Elementen müssen wir bei der parenchymatösen Entzündung rechnen, gerade wie wir es mit den Bindegewebskörperchen und mit anderen Zellen thun.

Wenn wir uns fragen, was die Ausläufer der Gefässwände bedeuten, so können wir nur darauf antworten, dass sie im gesunden Organismus in den Anlagen neuer Gefässe ihr Vorbild haben. Desswegen ist es aber nicht ausgemacht, dass in einem Entzündungsherde alle soliden Ausläufer der Capillargefässe auch wirklich hohl werden, wenn das Thier übrigens lange genug lebt. Ja in Rücksicht darauf, dass ein Entzündungsherd, in sofern er als solcher zur Beobachtung kommt, noch solide Gefäss-Ausläufer überhaupt enthalten kann, müssen wir sagen, dass die Capillargefässe mit zu den Mutterorganen gezählt werden müssen, welche das den Herd durchsetzende Fasergerüste abgeben.

Wenn wir weiter daran erinnern, dass Gebilde, welche wie Körnchenkugeln aussehen, an Capillargefässen oder an Ausläufern derselben hängen, so können wir die Gefässe strenge genommen in die Reihe jener Muttergebilde setzen, aus welchen drei zur wesentlichen Charakteristik des Herdes gehörende Elementarformen hervorgehen, nämlich neue Capillargefässe, solide Fasern und Körnchenkugeln.

Es mag noch weiter von Belang sein hervorzuheben, dass eine Gattung von Formelementen andere erzeugen kann, welche ihr wenigstens eine Zeit hindurch unähnlich sind, weil ja die solide Faser eine andere Elementarform ist als das hohle Capillarrohr. Es ist dies von Belang hervorzuheben, weil uns mannigfache Bilder die Vermuthung anregen, dass auch Nervenzellen in Entzündungsherden Fortsätze tragen, welche nicht nothwendig als präexistente gedeutet werden müssen.

Eine bestimmte Aussage getrauen wir in dieser Beziehung allerdings nicht zu machen.

Wenn wir in einem alten Entzündungsherde zahlreiche noch Körnchen tragende Fibrillen finden, welche an einer Stelle einen grossen kugeligen Kern mit einer ihn umgebenden dünnen Protoplasmaschichte besitzen, wer will da aussagen, ob wir einen Rest

eines Bindegewebskörperchens oder einer Ganglienzelle vor uns haben. Wer weiss denn, wie sich der Kern eines Bindegewebskörperchens krankhaft verändern kann. Wenn endlich der Kern einer Ganglienzelle angehört, wer sagt uns dann, ob die Faser, in welcher er liegt, nicht eine schon früher dagewesene Nervenfaser ist, welche eben in der Nachbarschaft der Ganglienzelle und bevor jene noch markhältig geworden ist, mit dieser erkrankte.

Wenn man indessen sieht, dass an einer erkrankten Hirnrinde bis auf eine gewisse Ausdehnung ausser den Gefässen mit ihren Anhängseln nichts anderes angetroffen wird als Körnchenzellen, von welchen die weitaus überwiegende Menge mit dem offenbar zum grossen Theile neugebildeten Faserwerke zusammenhängt, wenn man sieht, wie die Körnchenzellen ihrem Kerne nach zu schliessen an Ganglienzellen mit verkleinertem Protoplasma erinnern, so kann man sich gewiss der oben angedeuteten Vermuthung kaum entschlagen.

Die Erfahrung, dass in chronischen Entzündungsherden die Nervenzellen allmählich durch ein faseriges Gewebe ersetzt werden, kann eine solche Vermuthung gewiss nur unterstützen.

Wir haben somit gesehen, dass in einem durch Trauma bewirkten parenchymatösen Entzündungsherde alle zelligen Elemente fremdartige Körnchen, welche zumeist als Fett angesprochen werden dürfen, eingelagert enthalten. Wir haben ferner gesehen, dass ein Theil dieser Elemente mit höchst wahrscheinlich neugebildeten oder besser neu ausgesendeten Fasern zusammenhängt.

Die nur spärlich in die Fasern eingestreuten, fast durchaus kleinen Körnchen an alten Entzündungsherden weisen darauf hin, dass mit der fortschreitenden Faserbildung die Körnchen kleiner werden und endlich schwinden. Das Vorbild für den gesammten Vorgang ist im embryonalen Leben gegeben. Jede Embryonalzelle ist zu einer sehr frühen Zeit des Lebens eine Körnchenzelle. Es ist aber ein überwundener Standpunkt, dass der Contour, welcher die Körnchen einschliesst einer Membran angehöre. Die Entwickelungsgeschichte hat indessen auch die Phasen durchgemacht, welche heute die pathologische Anatomie zu überwinden hat, und sie wird dies hoffent-

lich so bald, als man anfangen wird die Körnchenzellen häufiger im Leben als in der Leiche zu studiren.

Die embryonale Körnchenzelle kann ihr Leben nach zwei Richtungen hin äussern. Entweder sie theilt sich, oder sie verändert ihre Form; in letzterer Beziehung kann sie Körnchen tragende Fortsätze ausschicken; die Körnchen werden resorbirt und die Fortsätze bleiben als Fasern zurück.

Nach diesem Vorbilde glauben wir in dem von uns behandelten speciellen Falle das krankhaft veränderte oder erregte Leben der Zelle auffassen zu müssen. Das Auftreten von Fettkörnchen scheint uns das erste Zeichen dieser Veränderung, der Übergang des Zellenleibes in die Faser das letzte Glied in der Reihe zu sein.

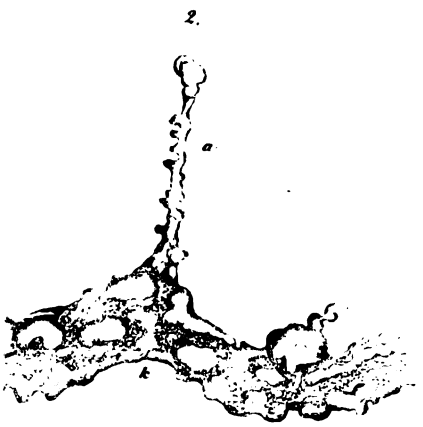
Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Aus einem Gefässconvolute eines sechs Tage alten Entzündungsherdes, unter dem starken Einsatze eines Plössl'schen Mikroskopes gesehen. *a* Ausläufer mit Körnchen tragenden Anschwellungen.

„ 2. *K* Ein verändertes Capillargefäss mit einem Ausläufer *a* unter der Immersionslinse Nr. 10 ocular 4 gesehen.

„ 3. Körnchenhaltige Fasern mit Kernen aus einem 14 Tage alten Entzündungsherde unter derselben Vergrösserung gesehen wie sub Fig. 1. *Z. Z.* Körnchenkugeln mit Kernen.

1.


2.
a
b

3.

XXVII. SITZUNG VOM 30. NOVEMBER 1865.

Herr Prof. J. Redtenbacher im Vorsitze.

Die ungarische Akademie der Wissenschaften übersendet, mit Circular-Schreiben vom 15. November, zwei Eintrittskarten zu der am 11. December l. J., bei Gelegenheit der feierlichen Inauguration des neuen Akademie-Gebäudes, abzuhaltenden Gesammtsitzung.

Herr Director K. v. Littrow zeigt und erläutert einen von den hiesigen Mechanikern Mayer und Wolf nach seiner Angabe hergestellten Registrir-Apparat neuer Construction.

Herr Prof. J. Stefan legt eine Abhandlung „über einen neuen Fallapparat" von Herrn Dr. Ferd. Lippich, Prof. am st. st. Joanneum in Graz, vor.

Herr Prof. R. Kner übergibt die Fortsetzung der „Ichthyologischen Notizen" von Herrn Dr. F. Steindachner.

Herr Prof. J. Petzval überreicht eine Abhandlung des Herrn L. Zmurko, k. k. Prof. der Mathematik an der technischen Akademie in Lemberg: „Über die Flächen zweiter Ordnung mit Zugrundelegung eines mit beliebigen Axenwinkeln versehenen Coordinatensystems nebst einer Einleitung aus der analytischen Geometrie im Raume".

Diese Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

Der Secretär macht eine kurze Mittheilung über die Auffindung des Indiums in der Blende von Schönfeld bei Schlaggenwald und eine weitere Verbesserung in der Gewinnung dieses Metalles.

Herr Dr. L. Ditscheiner übergibt eine Notiz, betitelt: „Eine Bemerkung zu Herrn Lewis M. Rutherfurd's Construction des Spectroskops".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Astronomische Nachrichten. Nr. 1555—1560. Altona, 1865; 4°.

Baird, S. F., Review of American Birds, in the Museum of the Smithsonian Institution. Part I. Washington; 8°.

Christiania, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1865. 8° & 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. Nr. 19—20. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 21e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften, königl. böhmische in Prag: Sitzungsberichte. Jahrg. 1860. Juli—December; Jahrg. 1863. Januar—December; Jahrg. 1864. Prag; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 47—48. Wien, 1865; 8°.

Hippokrates. Zeitschrift für die medicinischen Wissenschaften von Kalliburces. III. Band, 1. & 2. Heft. Athen, 1865; 4°.

Land- und forstwirthschaftliche Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 32—33. Wien, 1865; 4°.

Maelen, van der, Ph., Carte de la Belgique, des Pays-Bas et d'une partie des pays environnants. (6 Feuilles.) — Carte de l'Europe. (1 Feuille.) — Carte d'Anvers et de ses environs. (1 Feuille.) — Carte de voies navigables de la Belgique. (1 Feuille.) — Carte de chemins de fer de Belgique. (1 Feuille.) — Carte des charbonages des environs de Charleroi. (6 Feuilles.) Folio.

Mayr, Gustav L., Diagnosen neuer Hemipteren. II. (Verhandlgn. der k. k. zool.-bot. Ges. in Wien. 1865.) 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Jahrg. 1865. Ergänzungsheft Nr. 16. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique. 214e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Osservatorio del R. Istituto tecnico die Ancona. Bullettino. Nr. 8 & 9. 1865; Folio.

Pacini, Filippo, Sulla causa specifica del Colera asiatico etc. Firenze, 1865; 8°.

Pechmann, Eduard, Die Abweichung der Lothlinie bei astronomischen Beobachtungsstationen und ihre Berechnung als Erforderniss einer Gradmessung. (Fortsetzung.) Wien, 1865; 4°.

Plantamour, E., Résumé météorologique de l'année 1864 pour Genève et le Grand St. Bernard. (Tiré de la Bibliothèque Universelle. Août 1865.) Genève, 1865; 8°.

Reader. Nr. 151—152. Vol. VI. London, 1865; Folio.

Reichsforstverein, österr.: Monatsschrift für Forstwesen. XV. Bd. Jahrg. 1865. October-Heft. Wien; 8°.

Schenzl, Guido, Magnetische Ortsbestimmungen im Königreiche Ungarn. 8°.

West, Lambert von, Wo Newton und Huygens fehlten. Zwei Beweise. Wien, 1865; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 91—95. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XV. Jahrg. Nr. 2. Gratz, 1865; 4°.

Über eine Modification des Hansen'schen Registrirapparates.

Von dem w. M. Karl v. Littrow.

(Mit 1 Tafel.)

Als es sich darum handelte für die Arbeiten der mitteleuropäischen Gradmessung galvanische Registratoren anzuschaffen, entschied ich mich sofort für den von Herrn Geheimrath Hansen angegebenen und zunächst von Herrn Mechaniker Ausfeld in Gotha ausgeführten Apparat, da dieser unter den bekannten Vorrichtungen ähnlicher Art den vereinten Forderungen von Bequemlichkeit und Genauigkeit mir bei weitem am meisten zu entsprechen scheint. Die längere Anwendung bestärkte mich vollends in dieser Wahl und liess nur kleine Abänderungen wünschen, die, ohne das vortreffliche Princip wesentlich zu berühren, zum Theile wegen des hier von dem Apparate zu machenden Gebrauches, nämlich für geographische Längenbestimmungen bald an diesem, bald an jenem Orte und meistens in Feldobservatorien, willkommen gewesen wären, zum Theile vielleicht nur auf die beiden Individuen dieser Instrumente, welche ich gerade näher kennen gelernt hatte, oder auf Dinge sich bezogen, wie sie jeder Beobachter sich besonders zurechtzulegen sucht.

In ersterer Beziehung, welche das Erforderniss der Transportabilität und leichten Aufstellung betraf, verfiel ich anfangs auf den Gedanken, das Gewicht durch eine Feder zu ersetzen, die sich in ihrer Wirksamkeit von selbst regulirt, somit das Centrifugalpendel überflüssig und überdies das Triebwerk einfacher machen würde. Allein die Kostspieligkeit und geringe Verlässigkeit einer solchen Feder liess mich von diesem Wege bald abstehen. Da theilte uns Herr Obertelegraphist Urban, welcher während des vergangenen Sommers bei den Wiener Gradmessungsarbeiten zugetheilt war, mit, dass die hiesigen Herren Mechaniker Mayer und Wolf vor Kurzem zur Bestimmung der Geschwindigkeit von Locomotiven galvanische Registratoren angefertigt hätten, die durch einen Elektromotor in

Bewegung gesetzt werden. Es leuchtet auf den ersten Blick ein, dass solche Einrichtung für die oben angedeutete Verwendung des Apparates nicht nur alle Vortheile böte, welche man durch Einführung der Feder statt des Gewichtes zu erreichen suchen könnte, sondern noch manche andere Vorzüge hätte: der Apparat bedürfte des Aufziehens nicht mehr und bliebe fortwährend in Thätigkeit, so lang eben die Batterie wirkte; um die Maschine zu arretiren oder in Gang zu setzen, hätte man eben nur den Strom des Elektromotors zu unterbrechen oder zu schliessen, ersparte also auch das Volumen, welches der zu diesem Zwecke bestimmte Theil der bisherigen Construction erfordert.

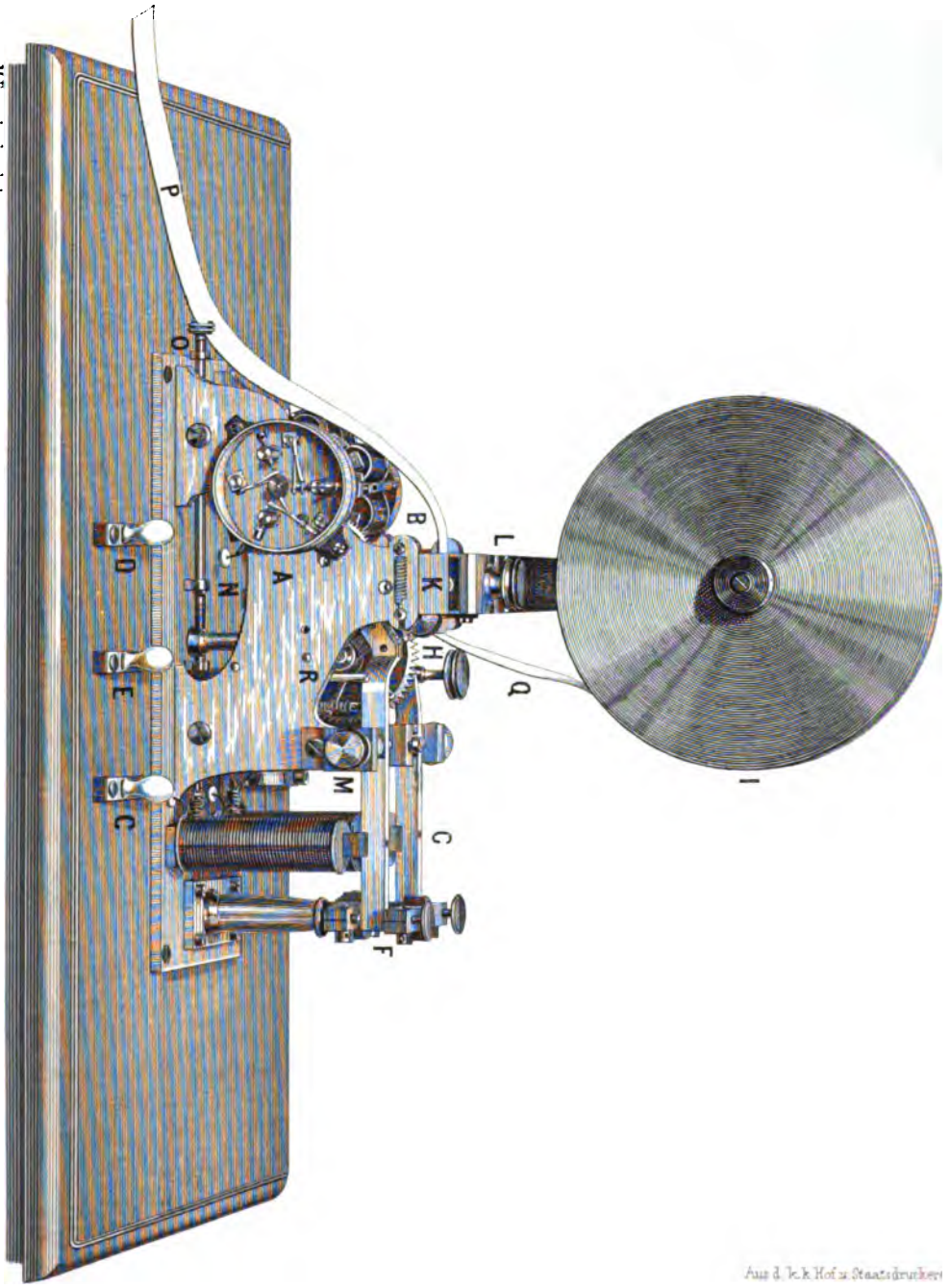
Es kam nun auf einen Versuch an, namentlich um zu erfahren, ob die Secundenpunkte bei constantem Strome auch für längere Zeiträume, wie hier gefordert wird, hinreichend äquidistant ausfielen. Herr Urban hatte die Güte die einleitende Vermittlung mit den Künstlern zu übernehmen und bei dieser Gelegenheit auch einen Gedanken des Herrn Dr. E. Weiss für die Markirung der Secundenpunkte ausführen zu lassen, der aus der weiter unten folgenden Beschreibung des Apparates erhellen wird. Nach mehreren, von uns nöthig befundenen Abänderungen erhielt das Instrument die aus beigeschlossener, im Verhältnisse von $^1/_8$ der wirklichen Grösse ausgeführter Zeichnung ersichtliche Gestalt, in welcher es einstweilen allen Anforderungen vollkommen genügte, und in der ich es daher zu weiteren Anwendungen und Prüfungen vorlegen kann.

Wir haben drei kleine Meidinger'sche Batterien, deren eine den Elektromotor *AB* mittelst seiner Contactvorrichtung *A* und seiner Spulen *B* in Bewegung setzt, wenn ein Verbindungsstift *D* eingesteckt wird; deren zweite auf ähnliche Weise bei *E* mit der Uhr und ihrem Hebel *F* in Verbindung tritt; deren dritte für den Signalhebel *G* mittelst *C* wirkt. Das Rad bei *H* gibt mit seinen 60 spitzigen Zähnen, von denen der erste dreifach, jeder zehnte doppelt, die übrigen einfach sind, die Secundenpunkte, so dass man auf dem Papierstreife *PQ* Secundenzehner und Minuten sofort unterscheidet, wenn durch einen Sperrhaken das Rad nach jeder Secunde um einen Zahn weiter gedreht wird. Zu der überraschenden Äquidistanz der Secundenpunkte trägt wohl auch der kräftige Impuls bei, den die Gleitwalzen hier erhalten. Es wird so offenbar die Störung durch das Eingreifen der Signalspitze u. a. weniger merklich.

Die Elektromagnete stehen in unserer Ansicht hinter einander, wirken also gleichmässig auf die Hebel. Die Spitze für die Signalpunkte ist wie bei Ausfeld mit einem Gelenke versehen, um auch dann nur Punkte zu geben, wenn man in die Linie hinausarbeitet, daher länger geschlossen halten muss. Die Rolle *I* steht unmittelbar über dem Apparate, läuft um eine feste Achse und lässt sich für die Verpackung des Apparates bei *L* abschrauben. Bei *M* und *N* sind Theile von den an der Rückseite des Apparates angebrachten Klemmen sichtbar, die zur Einschaltung der Leitungsdrähte dienen. Die Verbindungsdrähte zwischen diesen Klemmen und dem Apparate sind auf der unteren Fläche des Brettes *DC* durch einen zweiten Boden gedeckt. Von den zu *D* gehörenden Klemmen führt ein Doppeldraht zum Signalgriff, um den Beobachter von seinem Instrumente aus in den Stand zu setzen, durch Schliessung oder Unterbrechung des betreffenden Stromes den Elektromotor in Gang zu setzen oder zu arretiren. Mittelst der Schraube *O* wird die Hubhöhe des Secundenrades regulirt. *H* ist ein Schlüssel, der sich auf die Schrauben *H, R* aufstecken lässt, welche die Spannung der Hebelspiralen bestimmen. Das Galvanoskop blieb weg, da man so bedeutenden Raum ersparte und das, was es leistet, auf andere Art sich verschaffen kann. Das Ganze, bis auf die Rolle *I* ist in einem Glaskasten eingeschlossen, dessen obere Wand sich bei *K* aus einander schieben lässt, um einen neuen Papierstreif zwischen die Walzen zu bringen oder sonst an dem Apparate etwas vorzunehmen.

Das Kistchen, in welchem der Apparat für Reisen verwahrt wird, nimmt kaum den sechsten Theil des Raumes ein, den der Apparat sonst in seiner Packkiste erforderte. Selbstverständlich stellen sich auch die Kosten für die so modificirte Vorrichtung weit geringer.

Die merkwürdige und, wie ich glaube, noch nicht gehörig ausgebeutete Eigenschaft des Elektromotors sich gleichsam selbst zu reguliren (siehe Dr. Julius Dub, Der Elektromagnetismus p. 419 u. ff.) d. h. ohne besondere Nebenvorrichtung eine und dieselbe Geschwindigkeit und zwar sofort zu geben so lange der Strom constant ist, hat mich auf den Gedanken gebracht, das Princip auf Triebwerke bei Äquatorialen anzuwenden. Ein Versuch dazu ist im Gange.



Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei

Sitzungsb. der k. Akad. d. W. math.naturw. Cl. L.II. Bd. II. Abth. 1865.

Über einen neuen Fallapparat.

Von **Ferdinand Lippich,**
Professor der Mechanik am l. Joanneum zu Graz.

(Mit 2 Tafeln.)

Obgleich die Atwood'sche Fallmaschine unstreitig sehr geeignet ist die Gesetze zu demonstriren nach welchen die Bewegung eines von einer constanten Kraft ergriffenen Körpers erfolgt, so ist doch die zu erreichende Genauigkeit keine sehr grosse, und die Absicht ihres Erfinders, einen hinreichend richtigen Werth der Acceleration für den freien Fall der Körper, selbst durch Versuche an sorgfältig construirten Apparaten zu erhalten, nicht erreicht worden. Auch die Morin'sche Fallmaschine kann von einem ähnlichen Vorwurf nicht freigesprochen werden, denn der fallende Körper ist durchaus kein frei fallender, indem die Reibung an den Führungsdräthen und an dem zeichnenden Stifte eine bedeutende Verzögerung bewirkt, und ausserdem nicht einmal während der ganzen Bewegung bei vorzüglichster Construction, der Schwierigkeit der Erfüllung aller Bedingungen wegen, als constant angesehen werden kann. Wenn man aber auch von messenden Versuchen ganz abstrahiren und sich nur mit einer angenäherten Demonstrirung der Fallgesetze begnügen wollte, so sind doch beide Apparate immer noch schwerfällig zu handhaben und nebstbei wenig compendiös.

Die Anwendung der elektromagnetisch registrirten Chronoskope hat es ermöglicht so kleine Zeiträume zu messen und eine solche Einrichtung zu treffen, dass Fallversuche mit Benützung sehr mässiger Höhen ausgeführt werden konnten. Jedenfalls ist dieses Verfahren das directeste und bei gehöriger Berücksichtigung aller möglichen Fehlerquellen einer grossen Genauigkeit fähig; allein der Umstand

dass selbst das von Hipp verbesserte Wheatstone'sche Chronoskop die Zeit nur bis auf $\frac{2}{500}$ Secunden genau angibt, schliesst wieder zu kleine Fallhöhen aus. Ich erlaube mir in dieser Beziehung die von Öhlschlager veröffentlichten Versuche [1]) in Erinnerung zu bringen. Derselbe erhielt als Mittel aus 10 Beobachtungen, und wobei die Angaben des Chronoskopes um höchstens $\frac{4}{500}$ Secunden differirten, folgende Fallhöhen und zugehörige Fallzeiten:

h, Fallhöhe in Millimeter	1500	1000	500	100	20
t Fallzeit in $\frac{1}{500}$ Secunden . .	278·7	230·0	160·2	69·7	29·5

Dividirt man nun einerseits die Fallhöhen, andererseits die Quadrate der zugehörigen Fallzeiten durch einander, so erhält man folgende Tabelle:

$\frac{h}{h'}$	$\frac{1500}{1000} = 1{\cdot}5$	$\frac{1500}{500} = 3$	$\frac{1500}{100} = 15$	$\frac{1500}{20} = 75$	$\frac{1000}{500} = 2$
$\frac{t^2}{t'^2}$	1·47	3·03	15·99	89·25	2·06
$\frac{h}{h'}$	$\frac{1000}{100} = 10$	$\frac{1000}{20} = 50$	$\frac{500}{100} = 5$	$\frac{500}{20} = 25$	$\frac{100}{20} = 5$
$\frac{t^2}{t'^2}$	10·89	60·79	5·28	29·49	5·58

Es ist ersichtlich, dass die Genauigkeit wenigstens für die kleineren Fallhöhen keine sehr grosse ist. Eine Änderung von etwa $\frac{3}{500}$ in der Fallzeit für $h = 20^{mm}$, würde $\frac{t^2}{t'^2}$ auf den richtigen Werth bringen. Aus $h = 1500^{mm}$ und $t = \frac{278{\cdot}7^s}{500}$ berechnet sich die Acceleration zu 9·66, offenbar ein viel zu kleiner Werth, der wohl kaum durch den Luftwiderstand erklärt werden kann.

[1]) Das Wheatstone'sche Chronoskop, verbessert vom Uhrmacher Hipp in Reutlingen. Pogg. Ann. Bd. LXXIV, pag. 589.

Bedenkt man nun, dass diese Versuche zeitraubend, und die Apparate kostspielig sind, so dürfte man wohl zugeben, dass auch diese Methode, mag man sie nur zur Demonstration der Fallgesetze oder auch zur Werthermittlung der Acceleration benützen, noch manches zu wünschen übrig lassen dürfte.

Es möchte daher immerhin erwünscht sein, einen Apparat bei der Demonstration der Fallgesetze benützen zu können, der das Gute der besprochenen Vorrichtungen vereinigend, und ihre Mängel beseitigend, etwa den folgenden Bedingungen genügen würde:

1. Die Fallgesetze an einem vollkommen frei fallenden Körper nachzuweisen.
2. Bei diesem freien Fall eine möglichst kleine Fallhöhe zu benützen, um den Apparat so compendiös als thunlich zu erhalten.
3. Durch einen einzigen Versuch die gewöhnlich demonstrirten Gesetze mit hinreichender Schärfe zur Anschauung zu bringen.
4. Die Möglichkeit zu bieten, den Werth der Acceleration wenigsten auf die ersten Decimalstellen richtig zu erhalten.
5. Den Preis des Apparates nicht höher als den der jetzt angewendeten Atwood'schen Fallmaschine zu stellen.

Ich glaube diesen Anforderungen durch die zu beschreibende Vorrichtung vollständig genügt zu haben, indem es vermöge derselben möglich ist, eine Fallhöhe von etwa 300 — 320^{mm} zu benützen, der Werth der Acceleration als Mittel aus 3 Versuchen auf die beiden ersten Decimalen richtig erhalten wurde, und der Preis des Apparates 35 fl. ö. W. nicht zu übersteigen braucht.

I.

Der Grundgedanke, der zur Construction des Apparates verwendet wurde, besteht im Folgenden: Denken wir uns einen Körper in der Nähe einer vertical stehenden Fläche herabfallend, — mit diesem soll eine Vorrichtung verbunden sein, die nach gleichen Zeitabschnitten ein Zeichen auf die Fläche macht; die Abstände dieser Zeichen müssten sofort das Gesetz erkennen lassen, nach welchem die zurückgelegten Wege mit den Zeiten wachsen. In dieser Weise könnte aber der Versuch, soll der Körper frei fallen, nicht ausgeführt werden. Ich habe daher die Vorrichtung, welche die Zeichen in gleichen Perioden erzeugt, fest aufgestellt, dafür die Fläche, auf

welcher die Zeichen erscheinen, sich bewegen lassen. Als Zeichen können nicht einfache Punkte gewählt werden, weil die hiebei zu erreichende Genauigkeit in der Abmessung der Fallräume zu gering wäre, überdies der fallende Köper weggestossen werden würde. Man umgeht aber alle diese Schwierigkeiten, indem man als Vorrichtung, welche die gleichen Zeiten markirt, einfach einen schwingenden Stab verwendet, der, vertical gestellt, an seinem Ende einen horizontalen Stift trägt, der senkrecht zu seiner Schwingungsebene angebracht ist. Vor diesem Stabe fällt eine Schiene, welche mit berusstem Papier bespannt ist, den Stift leise berührend herab, während die Papierebene der Schwingungsebene parallel liegt. Auf der Russfläche kommt eine wellenförmige Curve zu Stande, aus der man sofort die Fallgesetze entnehmen kann. Die erhaltene Zeichnung wird auf bekannte Weise (etwa durch Hindurchziehen des Papierstreifens durch eine Lösung von Mastix in Weingeist) fixirt. Es ist natürlich am vortheilhaftesten, das Fallen der Schiene in dem Momente beginnen zu lassen, in welchem der Stab durch seine Gleichgewichtslage hindurch geht.

Damit aber der Versuch sicher und leicht gelinge, muss der Apparat gewisse Bedingungen erfüllen.

1. Muss die Schiene so fallen, dass die Papierfläche, auf welche die Curve gezeichnet werden soll, in einer Verticalebene bleibt, die der Schwingungsebene des Stabes parallel ist, dass keine Schwankungen um eine zur Papierfläche verticalen Axe vorkommen, die Anfangsgeschwindigkeit wirklich Null ist, und die Auslösung plötzlich erfolgt.

Zu dem Ende wird die Schiene schon bevor sie frei gelassen wird eine vollkommen verticale Lage haben müssen, was leicht erzielt wird, indem man sie so aufhängt, dass der Aufhängefaden in der halben Dicke befestiget wird, wobei dann, wenn die Schiene symmetrisch gearbeitet ist, nur bei verticaler Stellung der Endflächen der Schwerpunkt vertical unter den Aufhängepunkt zu liegen kommt. Ferner muss im Momente des Auslösens sorgfältig jeder Zug oder Stoss auf den Aufhängefaden vermieden werden. Endlich wird es nothwendig sein dass die Schiene leicht zur Ruhe komme und keinerlei Schwingungen um eine horizontale oder verticale Axe mache, was einerseits durch eine bifilare Aufhängung an kurzen weit abstehenden Fäden, andererseits durch eine Beruhigungsvorrichtung erzielt wird.

2. Ist die Schiene vor dem Schreibstift heruntergefallen, so muss sie so aufgefangen werden, dass die Russschichte am Papier nicht beschädigt werde. Es wird also eine Fangvorrichtung nothwendig. Damit aber der Stoss der aufgefangenen Schiene nicht zu heftig werde, ist die Schiene nicht zu massiv zu machen.

3. Das Papier muss leicht abgenommen und so auf die Schiene gespannt werden können, dass es eine vollkommene Ebene darbietet.

II.

Ich will nun die Beschreibung eines Apparates geben, wie er für die anzuführenden Versuche im Wesentlichen wirklich ausgeführt wurde, und der mir den billiger Weise zu stellenden Forderungen vollkommen zu genügen scheint.

Das Fussgestell besteht aus einer Klemme *K* (Fig. 1 *a*, *b*, Taf. I), die drei Arme mit Stellschrauben *a* (Fig. 1 *a*, *b*, Fig. 4) trägt und mit der Druckschraube *S* an einer Tischplatte *T* festgestellt werden kann. Von diesem Fussgestelle erheben sich zwei Säulen, welche die Aufhängevorrichtung für die Schiene tragen. Diese selbst (Fig. 1, *a* und Fig. 2) ist durchbrochen gearbeitet, hat am oberen Ende zwei Arme mit Röllchen *r*, welche zum Aufhängen auf den Faden *fff* dienen und ermöglichen, dass sich die Mittellinie der Schiene immer von selbst vertical stelle; damit der Faden nicht streife, sind die Arme bei *m* ausgeschnitten. Die beiden kleinen Wellen *w*, *w'* ermöglichen ein genügend ebenes Aufspannen des Papierstreifens. Für diesen muss ein nicht zu schwaches und möglichst glattes Papier genommen werden, der Streifen wird um die beiden Rollen geschlungen, zusammengeklebt, und dann durch die Welle *w'*, deren Zapfen sich in einen Schlitz bewegen und die Schraubenmuttern *s* tragen, möglichst stark, angespannt.

Auf dem Fussgestelle ist ferner angebracht der elastische Stab *Z*, am oberen Ende mit der Schraube *z* versehen, die bei *k* den Schreibstift mit Wachs angeklebt trägt. Als solchen habe ich nach vielen Versuchen am besten einen Coconfaden verwendet, den man $2-3^{mm}$ aus dem Wachs hervorragen lässt; die Curve die er zeichnet ist sehr rein und von durchaus gleicher Dicke. Der Stab erhält noch ein Laufgewicht, um seine Schwingungsdauer nach Belieben reguliren zu können. An einer der Säulen ist noch der Hebel *H* um *o* drehbar,

durch welchen der Stab in ausgebogener Stellung festgehalten und losgelassen werden kann. In diese Stellung wird der Stab vor dem Einhängen der Schiene gebracht. Er bewirkt zugleich in dem Momente, in welchem er durch seine Ruhelage hindurchgeht, die Auslösung des Aufhängefadens. Dieser ist nämlich um die beiden Cylinder *c* (Fig. 1 *a*, *b* und Fig. 3) an der Stelle ihrer Nuthen geschlungen, und seine Enden zwischen den kürzeren Arm des Hebels *pgt* und einem vorspringenden Theil der Platte eingeklemmt, welche an den oberen Enden der Säulen angebracht wird (Fig. 1 *a*, *b* und Fig. 3). Dieser Hebel hat bei *g* seine Axenlager und erfährt bei *t* einen Zug von hinreichender Grösse, der an der Schnur *tt'* durch die Spannung der ovalen Feder *F* hervorgebracht wird. Die Spannung in der Feder entsteht dadurch, dass sie den Stift *nn* trägt, der mit dem Näschen *n* in den Vorsprung der Platte *P*, die sich zwischen den beiden Säulen befindet (wie auch Fig. 5 zeigt), eingehängt wird, während die Länge der Schnur *tt'* so abgeglichen ist, dass hiebei die Feder in die Länge gezogen werden muss. Die Schraubenmutter *t*, mittelst welcher ein Stift, an dem die Schnur geknüpft, mit dem Hebel verbunden ist, erlaubt die Spannung nach Bedarf zu reguliren. Der Stift *nn* hat eine solche Länge, dass der elastische Stab denselben beim Durchgang durch die Ruhelage zur Seite stossen muss. Ist dieses erfolgt, so hebt die Feder *d* den Hebel *pgt* in die Höhe und der Aufhängefaden wird, ohne den geringsten Stoss oder Zug erlitten zu haben, frei. Der auf *P* aufgesetzte Theil *b* verhindert ein Anschlagen der Feder *F* an die fallende Schiene.

Noch ist am Fussgestelle das Säulchen *A* aufgesetzt, welches an seinem oberen Ende die Schraube *z'* mit dem Schreibstift *k'* zeigt, zum Zeichnen der Mittellinie. Es hat sich jedoch als bequemer und viel genauer herausgestellt, diese Mittellinie durch Construction zu finden, indem man an die Wellenlinie die beiden äussersten Tangenten zieht und ihren Abstand an den Anfangs- und Endpunkten halbirt, die Halbirungspunkte verbindet. Hinter diesem Säulchen ist weiter eine Feder *C* mit ihrem unteren Ende befestigt, die durch die Schraube *h* eine entsprechende Ausbiegung erhält; diese Feder endigt an ihrem oberen Ende in zwei Seitenarme, welche die vorspringenden gleichlangen Spitzen *B* (Fig. 1 *a*, *b* und Fig. 4) tragen. Dieser Theil hat einen doppelten Zweck. Liegt nämlich die Feder *C* beim Einhängen der Schiene ganz an das Säulchen *A* an, so stehen die

Spitzen B so weit vor, dass sich die Schiene mit ihrem unteren Ende an dieselben anlegt, daher verhindert wird eine pendelförmige Bewegung anzunehmen und dabei an die Schreibspitzen z, z', anzuschlagen. Dann kann durch Zurückbiegen der Feder C die Schiene ganz allmählich in ihre verticale Stellung geführt und, nachdem man hierauf die Schreibspitzen in leise Berührung mit der Papierfläche gebracht hat, wieder abgehoben und vor der Auslösung der Feder Z vollkommen beruhigt werden. Endlich sind am unteren Ende der Klemme K noch die Fangvorrichtungen D (Fig. 1 *a*, *b*, und Fig. 4) zu erwähnen, welche bei X schwach gespannte Darmsaiten tragen, auf welche die oberen Arme der Schiene auffallen. Ein Senkblei l dient dazu dem Apparat mittelst der Stellschrauben die verticale Stellung zu geben, damit die Schiene sicher gefangen werde. Man kann aber das Fangen der Schiene auch einfach dadurch bewirken, dass man diese in ein untergestelltes cylinderförmiges Gefäss fallen lässt, auf dessen Boden man eine starke Schichte Tücher u. dgl. gelegt hat. Durch diese Aufstellung des Apparates braucht derselbe nur eine um Weniges geringere Höhe zu erhalten, als die ganze Fallhöhe beträgt. Die vorliegenden Figuren zeigen den Apparat in $^1/_3$ der wirklichen Grösse. Es wäre jedoch für demonstrative Versuche, die keine grosse Genauigkeit erfordern, auch $^1/_2$ des Maassstabes der Zeichnung nicht zu klein. Es genügt die Schwingungsdauer des Stabes so zu reguliren, dass 4—6 ganze Schwingungen auf die Länge des Papierstreifens gehen.

III.

Es hat gar keine Schwierigkeiten mit dem eben beschriebenen Apparate brauchbare Curven zu erhalten. Fig. 1 auf Taf. II ist die genaue Copie einer solchen Curve, man kann aus ihr die Fallgesetze auf folgende Art entnehmen. Da man weiss, dass das Fallen in dem Momente begann, in welchen der Stab durch die Gleichgewichtslage hindurchging, so zieht man sich die Mittellinie MM', welche die Curve in gewissen Punkten schneidet. Man kann nun die Wege, die in den auf einander folgenden gleichen Zeiten τ, z. B. einer ganzen Schwingung durchlaufen wurden, mit einander vergleichen, indem man den Weg s, der während der ersten Schwingung zurückgelegt wurde, nach abwärts aufträgt; man erhält so den Zeiten 2τ, 3τ, 4τ .... entsprechend die Wege $4s$, $9s$, $16s$, ... vollkommen genau. Natür-

lich ist nicht zu vergessen, dass ein geringer Fehler im Abgreifen des ersten Fallraumes für die weiteren Punkte einen immer grösseren Einfluss gewinnt, und man daher besser thut, etwa den Weg (25—36) in 11 Theile zu theilen und mit der so erhaltenen Zirkelöffnung die Eintheilung auf die Mittellinie zu machen. Man kann aber auch die Distanzen 0,1; 0,4; 0,9; 0,16; u. s. f. direct mit einem Stangenzirkel messen, und die Längen mit den zugehörigen Zeiten vergleichen. So wurden an einer Curve folgende Daten erhalten.

s, Fallhöhen in Millimeter .	8·1	32·8	74·1	131·6	205·6	296·1
Fallzeiten	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	6τ

Dividirt man einerseits die Fallhöhen, andererseits die Quadrate der Fallzeiten durch einander, so erhält man folgende Tabelle:

$\frac{s}{s'}$	4·05	9·15	16·24	25·24	36·55	2·26
$\frac{t^2}{t'^2}$	$\left(\frac{2\tau}{\tau}\right)^2 =$ 4·00	$\left(\frac{3\tau}{\tau}\right)^2 =$ 9·00	$\left(\frac{4\tau}{\tau}\right)^2 =$ 16·00	$\left(\frac{5\tau}{\tau}\right)^2 =$ 25·00	$\left(\frac{6\tau}{\tau}\right)^2 =$ 36·00	$\left(\frac{3\tau}{2\tau}\right)^2 =$ 2·25
$\frac{s}{s'}$	4·01	6·27	9·03	1·78	2·77	4·00
$\frac{t^2}{t'^2}$	$\left(\frac{4\tau}{2\tau}\right)^2 =$ 4·00	$\left(\frac{5\tau}{2\tau}\right)^2 =$ 6·25	$\left(\frac{6\tau}{2\tau}\right)^2 =$ 9·00	$\left(\frac{4\tau}{3\tau}\right)^2 =$ 1·78	$\left(\frac{5\tau}{3\tau}\right)^2 =$ 2·78	$\left(\frac{6\tau}{3\tau}\right)^2 =$ 4·00

in welcher die unter einander stehenden Werthe zusammengehören. Bedenkt man, dass die Zahlen aus einem einzigen Versuch abgeleitet sind, die Messung mit einem Stangenzirkel kaum die Zehntel eines Millimeters sicher anzugeben erlaubt und ein Fehler in der Messung der ersten Fallhöhe einen grossen Einfluss ausübt auf die Zahlen, die durch Vergleichung mit den grösseren Fallräumen erhalten wurden, so lässt wohl die Übereinstimmung nichts zu wünschen übrig.

Man kann ferner aus der Curve auch das Gesetz ersichtlich machen, dass die Geschwindigkeiten der Zeit proportional wachsen. Es ist hiezu nur nöthig zu erinnern, dass die Curve durch Zusam-

mensetzung zweier Bewegungen entstanden ist, der Fallbewegung und der schwingenden des Stabes; die Geschwindigkeit, mit welcher die Curve in irgend einem Punkte durchlaufen wurde, ist also die Resultirende aus der verticalen Componente der Fallbewegung und der horizontalen der Schwingungsbewegung. In den Punkten 0, 1, 4, 9, 16, ... hat aber der Stab immer dieselbe Geschwindigkeit, wenn sich anders die Amplituden der Schwingung nicht ändern, was bei den erhaltenen Curven während der kurzen Fallzeit sehr nahe zutraf. Zieht man daher in irgend einem Abstande von der Mittellinie und parallel zu dieser die PP' errichtet in den Punkten 1, 4, 9, 16, ... Senkrechte zur Mittellinie, so dass 1I, 4II, 9III, ... der Geschwindigkeit des oscillirenden Stabes in den entsprechenden Augenblicken proportional genommen sind, legt ferner an den Punkten 1, 4, 9, 16, ..., Tangenten an die Curve und verlängert sie bis zum Durchschnitt mit PP', so müssen die Abschnitte Ia, IIb, IIIc, IVd, u. s. f. den Geschwindigkeiten der fallenden Schiene proportional sein, und man kann sich durch Auftragen der Strecke Ia auf die folgenden von dem oben angeführten Gesetze überzeugen.

Nimmt man für die Curve die Schwingungsdauer des Stabes als Zeiteinheit, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher der Stab seine Gleichgewichtslage passirt, $2\pi a$, wenn a die Amplitude bedeutet. Durch Messung der Amplitude wurde für die Curve auf Taf. II Fig. 1 gefunden

$$2\pi a = 42{\cdot}72.$$

Wählt man für 1I diese Länge, wie es in der Construction auch geschehen ist, so muss $(\mathrm{I}a) = 2(0,1)$ sich herausstellen. Die auf die Mittellinie aufgetragene Theilung kann sodann gleich dazu dienen die richtige Lage der Durchschnittspunkte a, b, c, d, e, zu controliren, wie es in der Figur angedeutet ist.

Drei von den erhaltenen Curven wurden dazu benützt um einen Werth für Acceleration daraus abzuleiten. Der nach Verlauf von 6 ganzen Schwingungen zurückgelegte Weg wurde durch Messung mit einem Stangenzirkel und nach gehöriger Berücksichtigung der nach dem Abnehmen erfolgten Contraction des Papierstreifens gefunden:

$$296{\cdot}24^{mm}, \quad 296{\cdot}26^{mm}, \quad 296{\cdot}05^{mm}.$$

Mittelst der graphischen Methode wurden die Anzahl Schwingungen des Stabes per Secunde aus 5 Beobachtungen gefun-

den, wobei wegen der schnellen Abnahme der Amplituden bei den einzelnen Beobachtungen im Maximum nur 14 Secunden hindurch das Aufzeichnen der Schwingungen erfolgen konnte. Die erhaltenen Zahlen waren:

$$24{\cdot}417,\ 24{\cdot}400,\ 24{\cdot}417,\ 24{\cdot}411,\ 24{\cdot}425.$$
$$\text{Mittelwerth} = 24{\cdot}414.$$

Aus diesen Zahlenwerthen ergeben sich für die Acceleration die folgenden Werthe in Meter ausgedrückt:

$$9{\cdot}80935,\ 9{\cdot}81007,\ 9{\cdot}80313$$
$$\text{Mittelwerth} = 9{\cdot}80751.$$

Benützt man zur Berechnung der Acceleration die Formel:

$$g = 9{\cdot}80557\ (1 - 0{\cdot}002588 \cos 2\varphi)$$

und nimmt für die Polhöhe von Prag $\varphi = 50^\circ\ 5'\ 19{\cdot}22$ [1]), so erhält man:

$$g = 9{\cdot}81005,$$

eine Übereinstimmung, die den angewendeten Messungsmethoden gegenüber wohl Nichts zu wünschen übrig lässt.

Um jedoch ein Urtheil über die durch einen Versuch zu erhaltende Genauigkeit zu gewinnen, setze ich die aus

$$g = \frac{2s}{t^2}$$

folgende Fehlergleichung her, welche, wenn man die obigen Zahlen benützt, und statt t die Anzahl Schwingungen in einer Secunde, n, einführt, sein wird:

$$dg = 33{\cdot}120 ds + 0{\cdot}804 dn.$$

---

1) Böhm, über die geographische Breite von Prag. Abhandl. der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften V. Folge, 10. Band.

Setzt man $ds = 0{\cdot}0002$, $dn = 0{\cdot}01$ voraus, so wird

$$dg = 0{\cdot}014,$$

wobei jedoch der Fehler in der Zeitbestimmung wohl zu hoch angeschlagen sein dürfte.

IV.

Es mag hier noch ein Versuch besprochen werden, welcher den Zweck hatte den Einfluss des Luftwiderstandes auf die Bewegung eines fallenden Körpers ersichtlich zu machen, wiewohl der Apparat hiefür nicht eingerichtet war, und nur mehr oder weniger unvollkommene Vorrichtungen ausreichen mussten.

Zu beiden Seiten der Schiene wurden an ihrem oberen Ende zwei Scheiben aus Pappe so befestiget, dass ihre Ebenen senkrecht auf der Schiene stand.

Für den ersten Versuch wurde als Grösse der widerstehenden Fläche $200\square^{cm.}$ gefunden, das Gewicht des ganzen fallenden Körpers war 97·7 Grm. Es wurde die in Fig. 2 Taf. II dargestellte Curve erhalten. Die bei den Durchschnittspunkten der Mittellinie mit der Wellenlinie stehenden Zahlen bedeuten die Weglängen vom Ausgangspunkt, wobei der Fallraum 0,1 in Fig. 1 als Längeneinheit gewählt wurde. Man bemerkt ein continuirliches Zurückbleiben gegen die entsprechenden Weglängen beim Fall ohne Widerstandsplatten. Mehrere so erhaltene Curven stimmten vollständig unter einander überein.

Bei einem zweiten Versuch war die Widerstandsfläche $808\square^{cm.}$, das Gewicht des fallenden Körpers 133·1 Grm.; ihm entspricht die Fig. 3 auf Taf. II. Hier muss sogleich auffallen, dass die Wege anfänglich grösser sind als beim Fall ohne Widerstandsplatten. Man wird wohl geneigt sein diese paradoxe Erscheinung einer Störung zuzuschreiben, allein eine zweite Curve, die obendrein eine halbe Stunde später als die erste erhalten wurde, stimmte so genau überein, dass einer zufälligen störenden Ursache oder einer absteigenden Strömung in der Luft diese Beschleunigung zuzuschreiben schwer halten dürfte. Leider konnten bis jetzt diese Versuche nicht fortgesetzt werden.

Man sieht sofort ein, dass das dem beschriebenen Fallapparate zu Grunde liegende Princip sehr geeignet wäre, die Gesetze des Falles im widerstehenden Mittel zu studiren, und einen Vortheil gegenüber den bisher üblichen Methoden gewähren würde. Letztere lassen uns darüber ganz in Unkenntniss, was beim Beginne des Falles vor sich geht, indem sie nur den grösseren Zeiträumen entsprechenden Weg kennen lehren. Bei der vorliegenden Methode wird aber die Natur der Bewegung von ihrem Anfange an sichtbar.

Weil ich nun glaube, dass das auseinandergesetzte Princip sich auch zu genauen messenden Versuchen dürfte verwenden lassen, so will ich zum Schlusse noch auf einige Punkte zurückkommen, die bei der Construction des Apparates zu berücksichtigen wären.

Die Auslösevorrichtung. Wenn man die Curven, die dem freien Fall der Schiene ohne Widerstandsplatten entsprechen, mit aller Sorgfalt der Messung unterwirft, so findet man immer, dass die ersten Fallräume gegenüber den folgenden etwas zu klein sind, wie auch aus den oben angeführten Zahlen zu erkennen ist. Dieses rührt offenbar davon her, dass der Aufhängefaden erst über die beiden Cylinder *c* (in den Figuren auf Taf. I) gezogen werden muss, und dieses zu einem Reibungswiderstande Veranlassung gibt. Durch eine kleine Modification könnte die Auslösevorrichtung von diesem Übelstande befreit werden, und würde sich am besten eine elektromagnetische Auslösung hiezu eignen.

Die Fallschiene. Diese würde zweckmässiger ganz aus Glas, auf welches die Curve unmittelbar zu zeichnen wäre, hergestellt werden; man wäre so vom Verziehen des Papieres frei, und es würden die Construction der Mittellinie und die Messungen etwa mit Hülfe eines Comparators eine grosse Schärfe erreichen.

Der schwingende Stab. Damit die Durchschnitte der Wellenlinie mit der Mittellinie nicht unter zu kleinen Winkeln erfolgen, muss man trachten die Schwingungsdauer des Stabes möglichst klein, die Amplitude möglichst gross zu machen. Um beides zu vereinigen, wäre die Anwendung eines Elektromagneten; wie er auch bei Stimmgabeln angewendet wird, um sie durch beliebig lange Zeit im Tönen zu erhalten, zweckmässig. Ferner würde sich überhaupt eine Stimmgabel besser als ein Stab eignen, weil dadurch zu heftige Erschütterungen des ganzen Apparates vermieden würden. Endlich ist noch ein Umstand zu erwähnen. Da der Schreibstift immer mit

einer gewissen Stärke an die Russfläche andrücken muss, so bewirkt er einen Reibungswiderstand beim Fallen der Schiene, und lenkt diese überdies aus ihrer genauen verticalen Stellung ab. Bei einer Glasschiene würden diese beiden Umstände einen äusserst geringen Einfluss üben; vielleicht wäre es aber möglich dieselben ganz zu beseitigen, indem man die Curve auf photographischem Wege erzeugt. Auf den Stab oder die Stimmgabel müsste ein Linsensatz befestiget werden, welcher die darauf geleiteten Sonnenstrahlen in einem Punkte vereinigt, der genau auf die präparirte Fläche der Glasschiene fällt. Bei der kräftigen chemischen Wirkung des directen Sonnenlichtes wäre trotz der schnellen Bewegung, besonders bei Anwendung von Instantancollodium, das Gelingen des Versuches zu erwarten.

Prag, im Juli 1865.

Nachtrag.

In einer vorläufigen Notiz, die bereits im Januarhefte 1865 der Zeitschrift „Lotos“ enthalten ist, habe ich die Grundidee des besprochenen Fallaparates mitgetheilt, in der Meinung sie sei noch nirgend in Anwendung gekommen. Erst nachdem die vorliegende Arbeit vollendet und zur Vorlage der kais. Akademie übergeben werden sollte, wurde ich auf einen Apparat Laborde's aufmerksam gemacht, den derselbe im Cosmos 1860. XVII. (Application du principe de l'enregistration des vibrations moléculaires à l'étude des divers phénomènes physiques) beschrieben hat, und dem dieselbe Idee zu Grunde liegt, die ich für noch neu hielt. Was jedoch die Construction des Laborde'schen Apparates anbelangt, so unterscheidet sie sich von meiner wesentlich dadurch, dass die Schiene, auf welcher die Curve gezeichnet wird nicht frei, sondern in einer Führung zwischen zwei Säulen fällt. In Folge dessen muss, um den Einfluss der Reibung zu vermindern, mit der Schiene ein Gewicht in Verbindung gebracht werden, was schon den Apparat ganz unbrauchbar zu Versuchen macht, die den Einfluss des Luftwiderstandes erkennen lassen sollen. Übrigens ist es auch nicht ersichtlich, in wie ferne es gelungen, den Einfluss des Reibungswiderstandes und die nothwendig durch die

Führung in die Fallbewegung hineingebrachten Ungleichförmigkeiten auf ein zulässiges Minimum zu bringen, da keine messenden Versuche hierüber vorliegen.

Da es mir nun scheint, dass die oben angegebene Einrichtung meines Apparates, im Principe, eine weit grössere Genauigkeit zulassen muss, seine Brauchbarkeit durch Versuche erprobt wurde, und endlich eine Anwendung zu Versuchen über den Fall im widerstehenden Mittel vom Laborde'schen Apparat nicht erreicht werden kann; so glaube ich, trotzdem ich auf die Priorität der Erfindung keinen Anspruch machen kann, meine Construction und die mit ihr erzielten Resultate veröffentlichen zu sollen, würde sie auch nur als eine Verbesserung der Laborde'schen anzusehen sein.

Gratz, im October 1865.

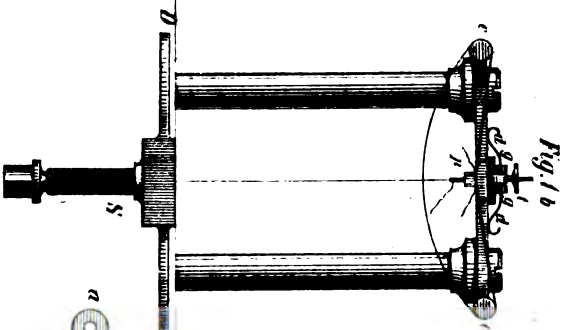


Fig. 1 b

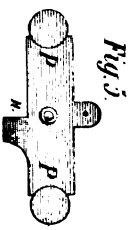


Fig. 3

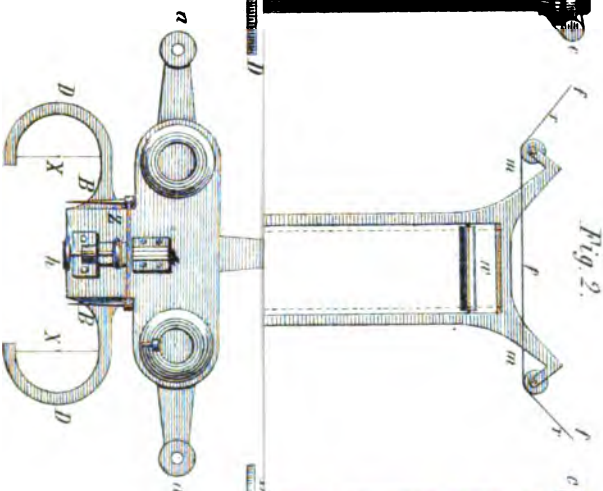


Fig. 2.

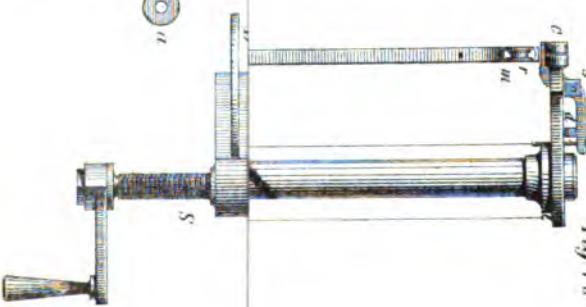


Fig. 1 a

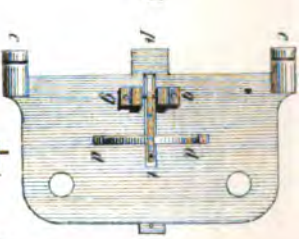


Fig. 3

Aus d. k. k. Hof- u. Staats-Druckerei.

Eine Bemerkung zu Herrn Lewis M. Rutherfurd's Construction des Spectroscopes.

Von **L. Ditscheiner.**

(Mit 1 Tafel.)

Im 39. Bande von Silliman's Journal hat Herr Lewis M. Rutherfurd die Construction eines Spectroscopes, welche jetzt auch in Pogg. Ann. B. 124. S. 363. übergegangen, veröffentlicht, mittelst welcher es durch nur eine Bewegung, nämlich das Drehen einer Axe, ermöglicht werden soll, eine Reihe von Prismen gleichzeitig für einen durch sie gehenden Strahl von gewisser Farbe in die Minimumstellung bringen zu können. Zur Erreichung dieses Zweckes sind die Prismen, von denen übrigens vorausgesetzt wird, dass sie alle einen gleichen brechenden Winkel und gleiche Brechungsquotienten besitzen, so mit einander verbunden, dass die ihre brechenden Winkel halbirenden Linien stets in einem Punkte sich schneiden, durch welchen auch die drehbare mit einem kleinen Zahnrade versehene Axe geht. Dieses Rädchen greift in eine gezahnte Stange ein, welche von einem der Prismen ausgehend, eine Bewegung des letzteren in der Richtung seiner Mittellinie gestattet. Durch das Drehen der Axe nähern oder entfernen sich dann alle Prismen von derselben, jedoch nur so, dass sie immer in einem Kreise, dessen Mittelpunkt in dieser Axe liegt, angeordnet bleiben. Alle Prismen ändern bei dieser Drehung ihre Lage gegen den einfallenden Strahl, jenes ausgenommen, welches mit der gezahnten Stange versehen ist, indem dieses immer nur parallel zu sich selbst verschoben wird.

Eine einfache Betrachtung aber zeigt, dass diese Vorrichtung allein nicht hinreicht um die gleichzeitige Minimumstellung aller Prismen für die verschiedenen gefärbten Strahlen zu erreichen, son-

dern dass bei dem Übergange von einer Farbe zur andern, neben der Axendrehung, wie sie die Rutherfurd'sche Construction gestattet, noch eine Drehung des ganzen Systems um eine Axe möglich sein muss, bei welcher Drehung jedoch die Prismen ihre Lage gegen einander nicht verändern. Denken wir uns nämlich wie in Fig. 1 mehrere Prismen A, A', A'', A''' . . . auf die genannte Weise verbunden, so dass sie für einen in der Richtung Ca aus dem Collimator kommenden Strahle von einer bestimmten Farbe gleichzeitig ihre Minimumstellung einnehmen, dass also seine Richtungen ab, $a'b'$, $a''b''$ . . . . in den verschiedenen Prismen senkrecht auf den Radien AO, $A'O$, $A''O$ . . . . stehen. Da es ferner bei der Voraussetzung parallel aus den Collimator kommender Strahlen gleichgültig ist, ob die Bewegung des ganzen Systems in der Weise stattfindet, dass O der Mittelpunkt bleibt und sich das Prisma mit der gezahnten Stange, welches wir als jenes $A''M'M'''$ ansehen wollen, diesem Mittelpunkte in der Richtung $A''O$ nähert oder entfernt oder ob dieser Mittelpunkt sich diesem Prisma in eben derselben Richtung nähert oder sich von ihm entfernt, so wollen wir der Einfachheit dieses letztere beibehalten. Soll nun ein Strahl mit grösseren Brechungsquotienten durch das ganze System beim Minimum aller Prismen hindurchgehen, so wird sich der Mittelpunkt O dem fixen Prisma nähern, das ganze System also dann in die Lage, wie sie die punktirten Linien andeutet, kommen. Die vom Collimator kommenden Strahlen werden dann in der Richtung C_0a_0 auf das erste Prisma fallen müssen, eine Richtung, die von der ursprünglichen Ca offenbar verschieden und die nur einzuhalten, wenn entweder der Collimator oder das ganze System, natürlich ohne Änderung der gegenseitigen Lage der Prismen, um jenen Winkel gedreht wird, welchen Ca und C_0a_0 mit einander bilden.

Dass der Winkel, welchen der Radius $A''C$ des fixen Prismas mit dem einfallenden Strahle Ca bildet, für verschieden gefärbte Strahlen ein anderer sein muss, ergibt übrigens auch eine einfache Rechnung. Bezeichnen wir nämlich den brechenden Winkel aller Prismen mit A, ferner die gleichen Winkel AOA', $A'OA''$, ... mit φ, den Winkel bei C, welchen Ca mit $A''C$ bildet, für die Minimumstellung aller Prismen, mit m, so wie den Einfallswinkel unter derselben Bedingung mit α, so ergibt sich aus dem Dreiecke CcO die Relation

$$m = 2\varphi + \alpha - \frac{A}{2} - 90$$

nach unserer Construction des Systems ist aber auch

$$\varphi = 2\alpha - A$$

somit

$$m = 5\alpha - \frac{5}{2}A - 90$$

wo die positiven Winkel m von der Linie Ca aus nach rechts gezählt werden. Da ferner $\sin \alpha = \mu \sin \frac{A}{2}$, so ist m als von A und μ abhängig dargestellt.

Ist nur jene Bewegung, welche nach der Rutherfurd'schen Anordnung möglich ist, gestattet, ferner die Collimatoraxe gegen das Prismensystem nicht veränderlich, so erhält man bei der Beobachtung durch das Fernrohr für jede beliebige Farbe durch Drehung der Axe allerdings eine Minimumablenkung des aus dem letzten Prisma austretenden Strahles, aber diese Minimumablenkung ist eine andere, sie ist relativ grösser, als jene welche sich bei der Minimumstellung aller Prismen ergibt, und welch' letztere immer gefordert wird.

Der Beweis hiefür ist, wenn es sich um eine grössere Anzahl von Prismen handelt, wohl an und für sich nicht schwer zu liefern, die Formeln selbst aber nehmen Dimensionen an, für welche hier der Raum zu klein würde; wir müssen uns also begnügen ihn hier nur für zwei Prismen zu liefern, die nach dem Rutherfurd'schen System verbunden sind. Es seien zu diesem Behufe A und A', Fig. 2, diese beiden Prismen, der einfallende Strahl sei Ca. Dieser falle bei a unter dem Winkel α auf die erste Prismenfläche, wird dort unter dem Winkel β gebrochen und tritt an der zweiten Prismenfläche unter dem Winkel γ aus. Eine ganz ähnliche Bedeutung haben die Winkel α', β' und γ' für das zweite Prisma A'', welches wir als das fixe, mit der gezahnten Stange versehene, ansehen wollen. Der Strahl Ca bildet mit der Linie OA'' bei c wieder den Winkel m. Der Rutherfurd'schen Construction zu Folge ist der Winkel $AMA' = A + \varphi$, unter φ wieder den Winkel AOA' verstanden, wobei, wie sich aus der Zeichnung ergibt,

$$\varphi = 90 + \frac{A}{2} - \alpha - m.$$

Wir erhalten dann folgende Relationen:

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\mu}$$

$$\sin\gamma = \mu \sin(A-\beta)$$

und wegen $\alpha' = 90 + \frac{3}{2}A - \alpha - m - \gamma$

$$\sin\beta' = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}A - \alpha - m - \gamma\right)}{\mu}$$

$$\sin\gamma' = \mu \sin(A-\beta')$$

Die Ablenkung welche der aus dem zweiten Prisma austretende Strahl gegen jenen *Ca* durch die Brechung erfahren hat, ist

$$\delta = 90 - m - \frac{A}{2} + \gamma'.$$

Um jenen Winkel α zu finden, für welchen die Deviation des Strahles mit dem Brechungsquotienten μ ein Minimum wird, hat man, da m und A von α unabhängig sind,

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \frac{d\gamma'}{d\alpha} = 0.$$

Führt man diese Differenziation aus, so findet man schliesslich

$$\frac{\cos(A-\beta')\sin\left(\frac{3}{2}A-\alpha-m-\gamma\right)}{\cos\gamma'\cos\beta'}\left(1-\frac{\cos(A-\beta)\cos\alpha}{\cos\gamma\cos\beta}\right) = 0$$

Jeder dieser Factoren kann Null werden, aber nur das Nullwerden eines derselben liefert die Minimumstellung des Systems. Denn ist $\cos(A-\beta') = 0$ also $A - \beta' = 90°$, so ergibt sich ein unmögliches γ', da $\sin\gamma'$ grösser als 1 würde, indem μ grösser als 1 vorausgesetzt wird. Der zweite Factor $= 0$ gesetzt, gibt $\frac{3}{2}A - \alpha - m - \gamma = 0$ oder $\alpha' = 90°$, also streifenden Eintritt am zweitem Prisma, offenbar ein Maximum der Deviation bedingend. Der dritte Factor wird 0, sobald $\alpha = \gamma$ und somit $\beta = \frac{A}{2}$ wird. In

diesem Falle steht also das erste Prisma in seiner Minimumstellung bezüglich des einfallenden Strahles, es ist also $\alpha = \mu \sin \frac{A}{2}$. Der Winkel α' ergibt sich sonach als

$$90 + \tfrac{3}{2} A - 2\alpha - m,$$

ein Werth der offenbar bei einem gegebenen Werthe von m von α verschieden ist, was nothwendig eine grössere Deviation zu Folge hat, als jene welche für $\alpha' = \alpha$, d. i. bei der Minimumstellung aller Prismen, stattfindet.

Würde man das erste Prisma als das fixe angenommen haben, so würde das Minimum der Deviation für das ganze System, bei der Minimumstellung des zweiten Prismas stattgefunden haben.

Wäre nach dem zweiten, fixen Prisma noch ein bewegliches, ähnlich dem ersten angebracht, so hätte man den oben angeführten Relationen noch folgende

$$\sin \beta'' = \frac{\cos\left(\frac{3}{2}A - \alpha - m - \gamma'\right)}{\mu}$$

$$\sin \gamma'' = \mu \sin (A - \beta'')$$

anzufügen, während die Deviation ist

$$\delta = 180 - 2m - \alpha + \gamma''$$

und

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = 1 - \frac{d\gamma''}{d\alpha} = 0$$

für die Minimumstellung. Die ausgeführte Differenziation lehrt dann, dass für diesen Fall keines der drei Prismen im Minimum steht. Dasselbe würde sich wohl für vier und mehr Prismen eben so zeigen lassen.

Soll also das Rutherfurd'sche System bei Spectralapparaten mit mehreren Prismen Anwendung finden, so wird, wenn man nicht lieber zur Littrow'schen Construction (Sitzungsber. 47, 26) greifen will, das ganze Prismensystem auf ein um eine Axe drehbares Tischen, ähnlich jenen, wie sie für Goniometer mit einem Prisma in Anwendung sind, gestellt werden müssen. Bei der Aufsuchung der Minimumstellung aller Prismen wird, nachdem man an der Axe, bis

zu den auf diese Art erreichbaren Minimum gedreht hat, auch noch das Tischchen zu drehen sein, um die genauere Stellung der Prismen zu erreichen. Eine Wiederholung dieser Operationen dürfte dann die Minimumstellung vollkommen geben. Ein Nachtheil des Rutherfurd'schen Systems, der übrigens auch durch Anwendung dieses Tischchens nicht gehoben wird, liegt darin, dass durch die Axendrehung die Prismen von der Collimatoraxe so entfernt werden, dass nur ein geringerer Theil der Strahlen durch dieselben gelangen kann.

Bei dem grossen Spectralapparate, welcher in der Werkstätte des k. k. polyt. Institutes von Herrn G. Starke für Herrn Prof. Schrötter ausgeführt wurde, ist für drei 60° Flintglas-Prismen diese Rutherfurd'sche Construction in Anwendung gebracht worden. Durch die Güte des Herrn Prof. Schrötter war es mir möglich, die durch die Rechnung erhaltenen Resultate experimentell zu prüfen. Nachdem für die *D*-Linien das System so gestellt war, dass alle Prismen für die genannten Strahlen ihre Minimumstellung inne hatten, wurde zur Linie *F* gegangen und dieselbe durch Drehung der Axe aufs Minimum gestellt. Wurde nun irgend eines der Prismen für sich gedreht, so ergab sich immer eine Stellung desselben, bei der die Deviation kleiner war, als die mit dem Rutherfurd'schen System erreichte. Als dann eine Anordnung getroffen wurde, bei welcher das ganze System gegen den einfallenden Strahl gedreht werden konnte, war, nachdem die Minimumstellung auf die oben angegebene Art gefunden worden, die Drehung eines einzelnen Prismas nicht mehr im Stande eine geringere Deviation zu liefern.

Fig. 1.

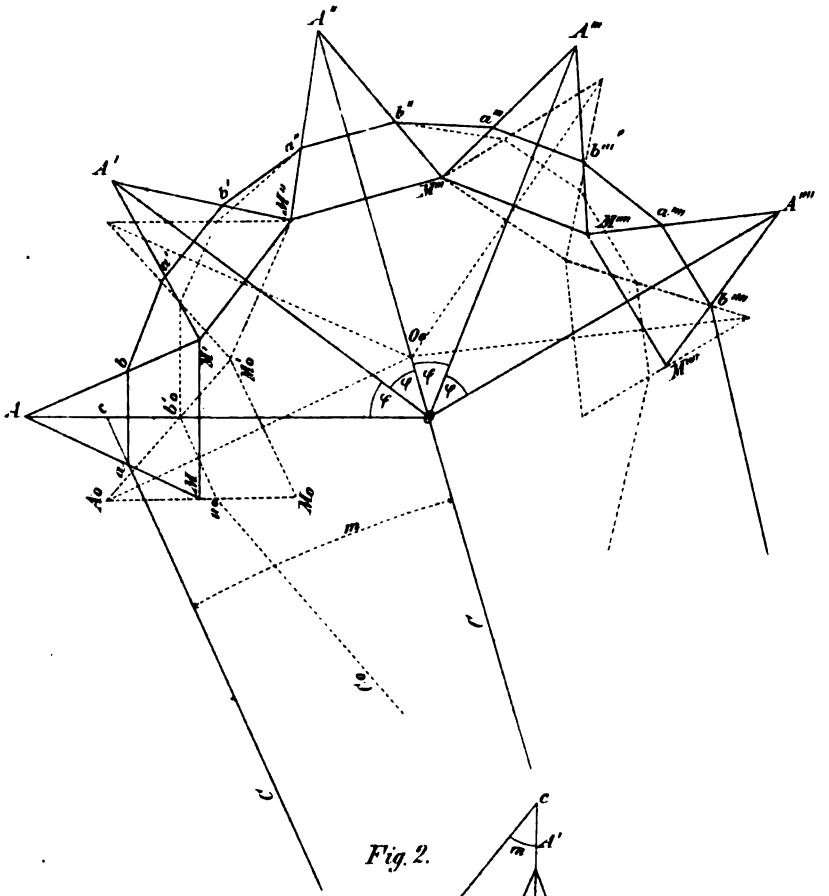
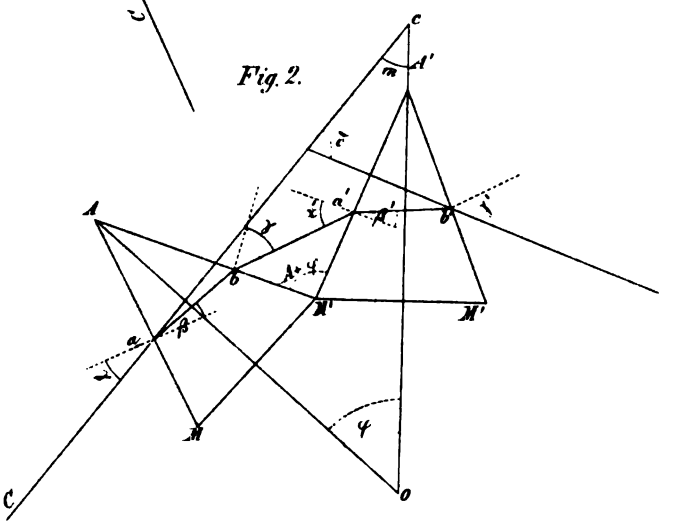


Fig. 2.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND. V. HEFT.

Jahrgang 1865. — December.

(Mit 6 Tafeln.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN, BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1866.

INHALT.

Seite

XXVIII. Sitzung vom 7. December 1865: Übersicht 571

Niemtschik, Directe Constructionen der Centouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen. (Mit 5 Tafeln.) 573

Czermak, Über den *Spiritus asper* und *lenis*, und über die Flüsterstimme, nebst Bemerkungen zur phonetischen Transscription der Kehlkopflaute 623

XXIX. Sitzung vom 14. December 1865: Übersicht 642

Buchner, Über das Fluorthallium 644

Török, Beiträge zur Kenntniss der ersten Anlagen der Sinnesorgane und der primären Schädelformation bei den Batrachiern. (Mit 1 Tafel.) 646

Reissig, Über das Verhalten des Jodsilbers im Lichte . . 655

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LII. BAND.

ZWEITE ABTHEILUNG.

10.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

XXVIII. SITZUNG VOM 7. DECEMBER 1865.

Herr Prof. J. Redtenbacher im Vorsitze.

Der Secretär theilt mit, dass Herr Hofrath W. Ritter v. Haidinger schwer erkrankt sei.

Das c. M. Herr Prof. Dr. J. Czermak in Jena übersendet eine Abhandlung: „Über den *Spiritus asper* und *lenis*, und über die Flüsterstimme nebst Bemerkungen zur phonetischen Transscription der Kehlkopflaute".

Herr Dr. Schiewek hinterlegt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

Herr Bergrath Dr. Fr. Ritter v. Hauer legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Die Cephalopoden der unteren Trias der Alpen".

Für die Denkschriften werden vorgelegt:

Von Herrn Director M. Hörnes die „geognostische Karte des ehemaligen Gebietes von Krakau mit dem südlich angrenzenden Theile von Galizien" nebst der darauf bezüglichen Abhandlung von weiland Ludwig Hohenegger, zusammengestellt durch Herrn Cornelius Fallaux, erzherzoglichen Schichtenmeister in Teschen;

von dem c. M. Herrn Prof. E. Suess eine „Monographie der Echinodermen des Eifler Kalks" von Herrn Dr. Ludw. Schultze in Bonn;

von dem c. M. Herrn Prof. Dr. C. Ritt. v. Ettingshausen der I. Theil einer Abhandlung über „die fossile Flora des Tertiärbeckens von Bilin".

Herr Dr. W. Reissig spricht „über das Verhalten des Silberjodides, wenn es entweder für sich allein oder in Contact mit einer wässerigen Lösung von salpetersaurem Silberoxyd oder mit einer solchen von Ferrocyankalium der Belichtung ausgesetzt wird".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift. 3. Jahrg. Nr. 23. Wien, 1865; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1561. Altona, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome LXI. Nr. 21. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 22e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 49. Wien, 1865; 8°.

Jahresbericht, Erster, über die Wirksamkeit der beiden Comités für die naturwissenschaftliche Durchforschung von Böhmen im Jahre 1864. Prag, 1865; 8°.

Land- und forstwirthschaftl. Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 34. Wien, 1865; 4°.

Leseverein, akademischer, in Prag: Bericht für das Geschäftsjahr 1864—65. Prag, 1865; 8°. (Böhmisch.)

Lotos. XV. Jahrgang. November 1865. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. Artillerie-Comité. Jahrg. 1865. 8. Heft. Wien; 8°.

Moniteur scientifique. 215e Livraison. Tome VIIe, Année 1865. Paris; 4°.

Reader. Nr. 153, Vol. VI. London, 1865; Folio.

Reichenbach, K. Freiherr von, Ein einziger Versuch über Sensitivität und Od. 8°.

Société Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'orient. IXe Année, Nr. 7. Constantinople, 1865; 4°.

Verein, naturhistorisch.-medicinischer, zu Heidelberg: Verhandlungen. Band IV, 1. Heidelberg, 1865; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 96—97. Wien, 1865; 4°.

Wright, Thomas, A Monograph on the British Fossil Echinodermata from the Cretaceous Formations. Vol I, Part 1. London, 1864; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XVII. Jahrg. 11. Heft. Wien. 1865; 4°.

Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen.

Von **Rudolph Niemtschik,**
Professor am st. l. Joanneum zu Gratz.

(Mit 5 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. November 1865.)

1. Um die Contouren einer Rotationsfläche bildlich darzustellen, wurden bisher im Allgemeinen die Projectionen einer Reihe von Parallelkreisen oder auch von anderen Linien der bezüglichen Fläche gezeichnet und an dieselben gemeinschaftlich berührende Linien (die fraglichen Contouren) gezogen. Die Projectionen von den Parallelkreisen sind jedoch in den meisten Fällen Ellipsen, und zwar: in orthogonalen Projectionen, wenn die Parallelkreise gegen die Zeichnungsfläche geneigt sind und in perspectivischen Zeichnungen, wenn die Parallelkreise gegen die Zeichnungsfläche geneigt sind oder auf derselben senkrecht stehen.

Das perspectivische Bild K' eines gegen die Bildfläche geneigten Kreises K kann allerdings auch ein Kreis sein, wenn nämlich K' ein antiparalleler Schnitt zu der Leitlinie K des Kegels AK ist, dessen Spitze das Centrum A der Projection vorstellt. Wenn aber eine Kante dieses Kegels AK zur Zeichnungsfläche parallel ist, so ergibt sich K' als eine Parabel, und wenn zwei Kanten des Kegels AK zur Zeichnungsfläche parallel sind, so erscheint K' als Ast einer Hyperbel.

Bevor also die Contouren einer Rotationsfläche gezogen werden konnten, musste früher im Allgemeinen eine Reihe von Ellipsen oder anderen Hilfscurven construirt werden, welcher Umstand namentlich in perspectivischen Darstellungen einen grossen Zeitaufwand erforderte; trotzdem aber konnten die Contouren doch nicht mit der durch geometrische Constructionen erreichbaren Genauigkeit gezogen werden, weil auf die besprochene Weise die einzelnen Punkte der Contouren nicht geometrisch richtig, sondern vielmehr nur nach dem

Augenmasse angegeben wurden. Aus diesem Grunde konnten auch die wesentlichen Punkte z. B. der höchste und der tiefste Punkt, die Rückkehrpunkte u. s. w. der Contour nicht genau und nicht im Voraus, sondern erst dann bestimmt werden, nachdem früher die Contour oder wenigstens ein Theil derselben gezeichnet war.

In orthogonalen (und axonometrischen) Projectionen sind die Contouren von Rotationsflächen bis jetzt nach dem eben besprochenen Verfahren gezeichnet worden. In perspectivischen Darstellungen sind die Contouren gewöhnlich nach demselben Verfahren, zuweilen aber auch nach der „Durchschnittsmethode" bestimmt worden, nämlich mit Benützung von zwei orthogonalen Projectionen der darzustellenden Fläche, ihrer Berührungslinie mit dem sie umhüllenden Sehkegel und der Durchschnittslinie *D* dieses Sehkegels mit einer als Bildfläche angenommenen Ebene, aus welcher dann die Punkte von *D* in die perspectivische Zeichnung übertragen und nachher durch die fraglichen Contouren verbunden wurden. Dieser Vorgang erfordert aber eine grössere Zeichnungsfläche und auch einen grossen Zeitaufwand, wesshalb die sonst ein genaues Resultat liefernde Durchschnittsmethode seltener Anwendung gefunden hat.

Die angeführten Übelstände der beiden Darstellungs-Methoden gaben Veranlassung zu weiteren Forschungen nach directen Constructionen.

Eine directe Construction von Punkten der perspectivischen Contouren von Rotationsflächen, jedoch nur für den Fall, wenn die Rotationsaxe in der Bildfläche liegt, findet sich in Prof. G. Schreiber's geometrischen Port-Folio, Carlsruhe 1843. Aber sehr selten lassen sich alle zur Bestimmung der Contouren erforderlichen Punkte auf diese Art direct angeben und in anderen Fällen hat Professor Schreiber ebenfalls die perspectivischen Projectionen von Parallelkreisen benützt oder die Durchschnittsmethode angewendet.

Andere directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächeu waren bis jetzt nicht bekannt.

Im Jahre 1860 habe ich bei einer Concursprüfung alle wesentlichen Punkte der perspectivischen Contouren von allgemeinen Rotationsflächen ebenfalls direct und ohne Benützung der perspectivischen Projectionen von Parallelkreisen construirt und so weit es in der verfügbaren Zeit möglich war, auch die Grundsätze des dort ange-

wandten Verfahrens angegeben. Seit dieser Zeit habe ich das Verfahren immer mit Vortheil benützt und bei der vielfältigen Anwendung desselben zugleich einige Vereinfachungen so wie auch neue directe Verfahren zur Bestimmung der Contouren von Rotationsflächen ermittelt, welche nun den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bilden.

Vermittelst der im Folgenden angegebenen Constructionen kann in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen jeder Punkt der Contour einer in beliebiger Lage gegen die Bildfläche befindlichen Rotationsfläche und die zugehörige Tangente direct, einfach und sehr genau dargestellt werden. — Durch Benützung von Tangenten wird immer ein genaueres Resultat erhalten.

Einen besonderen praktischen Werth hat auch das in den Fig. 19, 22 und 23 angewandte Verfahren, nach welchem die Punkte der einen Hälfte der Contour mittelst der Punkte der anderen Hälfte auf eine sehr einfache Weise, selbst ohne Benützung des Cirkels, genau übertragen werden können.

Zuerst werden hier die Constructionen der Contouren von Rotations-Kegeln und Cylindern und nachher jene von allgemeinen Rotationsflächen behandelt, weil zur Darstellung der letzteren die Contouren von Rotations-Kegeln und Cylindern benützt werden.

Überdies werden hier noch separat directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen der zweiten Ordnung durchgeführt. Die Contouren von solchen Flächen sind bekanntlich Curven zweiter Ordnung. Die einzelnen Punkte dieser Contouren werden aber nicht so wie die Punkte der Contouren von allgemeinen Rotationsflächen bestimmt, sondern es werden die Axen oder conjungirte Durchmesser und andere Bestimmungsstücke der Contouren direct construirt und dann daraus die Contouren selbst gezeichnet.

Durch die letzteren Constructionen ist zugleich eine andere Aufgabe gelöst, nämlich: die Axen oder conjungirte Durchmesser und andere Bestimmungsstücke der perspectivischen Bilder von Curven zweiter Ordnung zu con-

struiren. — Es muss hier bemerkt werden, dass die Auflösung der bezüglichen Aufgabe nicht aus der Abhandlung „Centralprojection der Linien zweiter Ordnung“ von Prof. K. Moshammer (Sitzgsb. d. kais. Akad. der Wissensch. Bd. XLIX) entlehnt ist, sondern dass ich im October 1863 Herrn Moshammer die Construction (Taf. V, Fig. 30) der conjungirten Durchmesser des perspectivischen Bildes einer in allgemeiner Lage gegen die Zeichnungsfläche befindlichen Ellipse mit der Bemerkung mitgetheilt habe, dass auf gleiche oder ähnliche Weise die conjungirten Durchmesser und andere Bestimmungsstücke der perspectivischen Bilder der übrigen Kegelschnittslinien construirt werden können und dass ich diese Constructionen gleichzeitig mit jenen der Contouren von den Flächen der zweiten Ordnung veröffentlichen werde. Allerdings hat dann Moshammer gesagt, eine Construction für den Fall, wenn die beobachtete Curve eine Ellipse ist, gefunden zu haben; ob sich dieselbe aber auch auf die übrigen Fälle anwenden lasse, wusste Moshammer damals noch nicht und hat mir seine Construction auch nicht mitgetheilt. Die bezügliche Abhandlung wurde der k. Akademie der Wissenschaften in Wien am 4. Februar 1864 vorgelegt und ich erhielt einen Abdruck davon noch viel später. Weil sich dort keine Bemerkung über die eben angeführte Thatsache vorfindet, wurde dieselbe hier berührt.

A. Orthogonale Darstellung.

a) Rotations-Kegel und Cylinder.

2. Contouren von Kegel- und Cylinderflächen sind Projectionen von Berührungskanten dieser Flächen mit den zu der Projectionsebene senkrechten Ebenen, mithin die Tracen von solchen projicirenden Ebenen; sie sind stets Tangenten an die entsprechende Projection der Basis der betreffenden Fläche und können also, wenn letztere vorhanden ist, unmittelbar durch die Kegelspitze oder parallel zu der Cylinderaxe gezogen werden. Ist aber die Projection der Basis nicht dargestellt und handelt es sich um die Bestimmung der Contouren allein, dann ist es für diesen Zweck nicht nothwendig, die Projection der Basis zu construiren. Aber auch in den Fällen, wo die Basis für andere Zwecke dargestellt werden soll, ist es zweckmässiger, zuerst die Contouren und nachher die Basis zu zeichnen, weil dann letztere mit Berücksichtigung der sie berührenden Contouren genauer gezogen werden kann.

In den nachstehenden Beispielen wurden die Contouren ohne Benützung der Projection der Basis dargestellt. Das dabei angewandte Verfahren beruht auf der Eigenschaft, dass Contouren von Kegel- und Cylinderflächen zugleich Tangenten sind an die Contouren der von diesen Flächen umhüllten Kugeln.

3. Die Kegelaxe $s''m''$, $s'm'$ (Taf. I, Fig. 1 und 2) ist parallel mit der verticalen und geneigt gegen die horizontale Projectionsebene. s'', s' ist die Kegelspitze, m'', m' der Mittelpunkt und $a''b''$, $a'b'$ der mit der verticalen Projectionsebene parallele Durchmesser der zu sm senkrechten Kegelbasis amb. $a''b'' \perp s''m''$; $a''m'' = b''m'' = am = mb$.

$s''a''$ und $s''b''$ sind die Verticalcontouren des Kegels $samb$. Die Horizontalcontouren können auf folgende Weise construirt werden.

Man bestimme den Durchschnittspunkt t'', t' (Fig. 1) der verticalen Geraden $s''t''$, $s't'$ mit der Ebene MNO der Kegelbasis und drehe denselben sammt der Basis um den horizontalen Durchmesser ef in die horizontale Ebene t_1ef. Dadurch kommt t'', t' nach t_1'', t_1' und die Basis erscheint im Grundrisse in der wahren Grösse als der Kreis $m'd_1'c_1'$. Dann ziehe man an den Kreis $m'd_1'c_1'$ die Tangenten $t_1'c_1'$, $t_1'd_1'$, welche die Drehungsaxe $e'f'$ in u' und v' treffen und den Kreis $m'd_1'c_1'$ in c_1' und d_1' berühren und führe $t_1'c_1'u'$, $t_1'd_1'v'$ nach $t'c'u'$ und $t'd'v'$ zurück. $c_1'c' \| d_1'd' \| s'm'$. — $t'c'$ und $t'd'$ sind die Horizontalcontouren und c', d' ihre Berührungspunkte mit der Basis $a'b'm'$. — Einfacher ist aber das folgende Verfahren.

Man ziehe in Taf. I, Fig. 2 die Gerade $a''n'' \perp s''a''$ und projicire n'' nach n'. Mit dem Halbmesser $a''n''$ beschreibe man aus n' den Kreis $c'n'd'$, welcher die Horizontalcontour der den Kegel sab in der Basis amb berührenden Kugel nab vorstellt und ziehe an $c'n'd'$ die Tangenten $s'c'$, $s'd'$ als die fraglichen Horizontalcontouren des Kegels $sabc$. Die Berührungspunkte c' und d' sind die horizontalen Projectionen der in der Kegelbasis befindlichen Endpunkte c und d von sc und sd.

Indem die Punkte c und d im Durchschnitte des grössten Horizontalkreises ncd der Kugel nab mit der Kegelbasis abm liegen und da im Aufrisse die beiden Linien ncd und amb als Gerade $n''c''d''$ ($\| XX_1$) und $a''b''$ erscheinen, so ist der gemeinschaftliche Punkt c'', d'' von $n''c''d''$ und $a''b''$ die verticale Projection von c und d

und man findet also c' und d' einfach im Durchschnitte der projicirenden Geraden $c''d''c'$ mit dem Kreise $c'n'd'$.

4. Ist der Rotationskegel $\alpha\mu\beta amb$ (Taf. I, Fig. 2) abgestutzt und μ'', μ' der Mittelpunkt, so wie $\alpha''\beta''$, $\alpha'\beta'$ der zur verticalen Projectionsebene parallele Durchmesser der oberen Leitlinie $\alpha''\mu''\beta''$, $\alpha'\mu'\beta'$, so sind $\alpha''a''$ und $\beta''b''$ die Verticalcontouren desselben.

Um die Horizontalcontouren zu finden, bestimme man zuerst den Kreis $c'n'd'$ wie zuvor. Dann errichte man $\alpha''\nu'' \perp \alpha''a''$, projicire ν'' nach ν', beschreibe mit dem Halbmesser $\alpha''\nu''$ aus ν' den Kreis $\gamma'\nu'\delta'$, d. i. die Horizontalcontour der den Kegel in der oberen Leitlinie $\alpha\beta\gamma\delta$ berührenden Kugel $\nu\alpha\beta\gamma\delta$ und ziehe berührend an $\nu'\gamma'\delta'$ und $n'c'd'$ die Horizontalcontouren $c'\gamma'$, $d'\delta'$. Die Berührungspunkte γ', δ' sind wieder die horizontalen Projectionen der in der oberen Leitlinie befindlichen Endpunkte γ und δ von γc und δd.

5. Die Kegelaxe $s''m''$, $s'm'$ (Taf. I, Fig. 3) ist gegen beide Projectionsebenen geneigt. m'', m' ist der Mittelpunkt und r der Halbmesser der Kegelbasis.

Man bestimme auf der zu sm parallelen Verticalebene $MN0$ die orthogonale Projection $s'''m'''$ der Kegelaxe sm und lege sie um MN in die Zeichnungsfläche nach $s'''m'''$, errichte $a'''m'''b''' \perp s'''m'''$, mache $a'''m''' = m'''b''' = r$ und ziehe $s'''a'''$ und $s'''b'''$. Die so erhaltene Projection $s'''a'''m'''b'''$ des Kegels betrachte man nun als einen Aufriss und construire dazu den Grundriss $s'c'd'$ wie in Fig. 2. Man errichte nämlich $a'''n''' \perp s'''a'''$, projicire n''' nach n', beschreibe aus n' mit dem Halbmesser $a'''n'''$ den Kreis $c'n'd'$ und ziehe berührend an denselben die Horizontalcontouren $s'c'$ und $s'd'$.

Nachher projicire man n' nach n'', beschreibe aus n'' mit dem Halbmesser $a'''n'''$ den Kreis $e''n''f''$ und ziehe berührend an $e''n''f'$ die Verticalcontouren $s''e''$ und $s''f''$.

6. Kann die Spitze des abgestutzten Kegels $\alpha\mu\beta amb$ (Taf I, Fig. 3), dessen obere Leitlinie $\alpha''\mu''\beta''$, $\alpha'\mu'\beta'$ den Mittelpunkt μ'', μ' und den Halbmesser r_1 hat, nicht benützt werden, so bestimme man μ'''; $\alpha'''\mu'''\beta''' \perp \mu'''m'''$; $\mu'''\alpha''' = \mu'''\beta''' = r_1$; $\alpha'''\nu''' \perp \alpha'''a'''$; ν' und ν''. Dann beschreibe man mit dem Halbmesser $\alpha'''\nu'''$ aus ν' und ν'' die Kreise $\gamma'\nu'\delta'$, $\varepsilon''\nu''\varphi''$ als die Contouren der den Kegel in der oberen Leitlinie $\alpha\mu\beta$ berührenden Kugel und ziehe berührend an $c'n'd'$ und $\gamma'\nu'\delta'$ die Horizontalcontouren $\gamma'c'$, $\delta'd'$ und berührend

an $e''n''f''$ und $\varepsilon''\nu''\varphi''$ die Verticalcontouren $\varepsilon''e''$ und $\varphi''f''$ des Kegels.

Die Berührungspunkte γ', δ', ε'', φ'' liegen in den betreffenden Projectionen der oberen Leitlinie.

7. Wenn statt der kreisförmigen eine elliptische oder parabolische oder hyperbolische Basis eines Rotationskegels gegeben ist, so wird man auch, ohne die Projectionen der Basis selbst zu construiren, immer einen Kreisschnitt des betreffenden Kegels bestimmen und dann die Contouren desselben wie in den früheren Fällen darstellen können.

Sind a und b die Endpunkte der grossen Axe der elliptischen Basis $abcd$ eines Rotationskegels $sabcd$, dessen Spitze s bildet, so ziehe man die Geraden sa, sb und die Halbirungsgerade so des Winkels asb, welche letztere die Rotationsaxe des Kegels ist. Dann lege man durch a (oder b) eine Ebene E senkrecht zu so, welche so in o und den Kegel in einem Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt o und dessen Halbmesser ao (oder bo) ist.

Ist die Basis des Rotationskegels sab eine Parabel abc mit dem Scheitel a und der Axe ab, so ziehe man die Geraden $sb \parallel ab$, sa und so, welche letztere den Winkel asb halbirt und die Rotationsaxe des Kegels bildet. Senkrecht zu so lege man durch a die Ebene E, welche so in o und den Kegel in einem Kreise schneidet, für welchen o den Mittelpunkt und oa den Halbmesser bildet.

Wenn endlich die Basis des Rotationskegels eine Hyperbel mit den Scheiteln a und b ist, so ziehe man wieder zuerst die Rotationsaxe so, welche den Neben-Winkel von asb halbirt und lege dann senkrecht zu so durch a (oder b) die Ebene E, welche so in o und den Kegel in einem Kreise schneidet, der o als Mittelpunkt und ao (oder bo) als Halbmesser hat.

8. Liegt die Spitze s in unendlicher Entfernung von der Basis, so ist die beobachtete Fläche ein Cylinder, und es fällt in Fig. 2, $a''n''$ nach $a''m''$ und in Fig. 3, $a'''n'''$ nach $a'''m'''$. Die Contourkanten sind dann mit der Projection der Rotationsaxe parallel und jede Contourkante eines Rotationscylinders hat also von der entsprechenden Projection der Cylinderaxe den Abstand $m''a'' = m'''a''' = r =$ dem Halbmesser der Basis amb.

b) Allgemeine Rotationsflächen.

9. Berührt ein Kreis-Kegel (oder Cylinder), z. B. *sabmcd* (Taf. I, Fig. 3), dessen Leitlinie der Kreis *abmcd* ist, in dem Kreise *abmcd* eine beliebige Rotationsfläche, welche dieselbe Rotationsaxe *sm* hat, so berühren die Contouren $s'c'$, $s'd'$, $s''e''$, $s''f''$ und $s'''a'''$, $s'''b'''$ des Kegels (oder Cylinders), also auch die Contouren $n'c'd$, $n''e''f''$ und $n'''a'''b'''$ der von *samb* in dem Kreise *abmcd* umhüllten Kugel *nab* die gleichnamigen Contouren der Rotationsfläche und zwar in den Punkten c', d', e'', f'', a''', b'''.

Betrachtet man also eine Rotationsfläche als Umhüllungsfläche von Kreiskegeln, beziehungsweise von Kreiscylindern und Kugeln und bestimmt (nach den in 2..8 angegebenen Verfahren) die Contouren der einzelnen Lagen von umhüllten Kegeln, Cylindern und Kugeln, so wie die Berührungspunkte der Kegel- und Cylindercontouren mit den entsprechenden Kugelcontouren; so sind erstere berührende Linien und letztere zugleich Punkte der Contouren der Rotationsfläche.

Die Tangenten und die Punkte der Contouren von Rotationsflächen können daher nach den angegebenen Verfahren direct, einfach und sehr genau construirt werden und es ist demnach zum Behufe der Construction der Contouren von Rotationsflächen nicht nothwendig, die Projectionen einer Reihe von Parallelkreisen (welche im Allgemeinen Ellipsen sind) oder anderen Curven der Fläche darzustellen.

10. Steht die Rotationsaxe einer Fläche senkrecht auf einer Projectionsebene, so ist die Contour in dieser Projectionsebene ein Kreis, in der anderen Projectionsebene aber der mit dieser Ebene parallele Meridian der Rotationsfläche.

11. Ist die Rotationsaxe mit beiden Projectionsebenen parallel, so bildet die Horizontalprojection des horizontalen Meridianes die Horizontalcontour und die Verticalprojection des verticalen Meridianes die Verticalcontour der Rotationsfläche.

12. Die Axe $p''o''$, $p'o'$ (Taf. I, Fig. 4) der Rotationsfläche $\alpha\beta\gamma p$ ist parallel mit der verticalen Projectionsebene, die verticale Projection $\delta''a''p''b''\gamma''$ des zu dieser Projectionsebene parallelen Meridianes $\delta apb\gamma$ bildet also die Verticalcontour.

Man ziehe eine beliebige Gerade $a''m''b'' \perp p''o''$ als verticale Projection des Parallelkreises *amb* der Fläche und ziehe die Tangente $b''s''$ und die Normale $b''n''$ zu der Verticalcontour $\delta''p''\gamma''$.

Der Kegel *samb*, dessen Spitze *s* und dessen Basis *amb* ist, berührt die Rotationsfläche in dem Kreise *amb*. Die Horizontalcontouren $s'c'$ und $s'd'$ des Kegels *samb* sind Tangenten an die mit dem Halbmesser $a''n''$ aus n' gezogene Horizontalcontour $n'c'd'$ der Kugel *nabcd* und an die Horizontalcontour $x'q'y'$ der Rotationsfläche, und zwar in den Punkten c' und d'. *c*, *d* sind Durchschnittspunkte des Parallelkreises *amb* mit dem grössten Horizontalkreise *ncd* der Kugel *nabcd*. Die verticalen Projectionen $a''b''$ und $n''c''d''$ ($\| XX_1$) von den Kreisen *amb* und *ncd* treffen sich in c'', d''. — c', d' ergeben sich also auch im Durchschnitte des Kreises $n'c'd'$ mit der Geraden $c''d'c'$.

Dieses Verfahren wiederhole man bei mehreren Parallelkreisen, bis eine entsprechende Reihe von Punkten und Tangenten der fraglichen Contour $x'q'y'$ erhalten wird, um dieselbe mit der erforderlichen Genauigkeit ziehen zu können.

Überdies bestimme man die wesentlichen Punkte e', f', i', k', q', x', y' und z'.

g'', h'', l'', t'' sind Berührungspunkte der Verticalcontour mit zu $o''p''$ parallelen Geraden. $g''r''h'' \| l''u''t'' \perp o''p''$. r'' und u'' sind Durchschnitte von $g''h''$ und $l''t''$ mit $o''p''$. r', u' sind die horizontalen Projectionen von r und u. Man ziehe $e'r'f' \| i'u'k' \perp o'p'$, mache $r'e' = r'f' = r''g''$ und $u'i' = u'k' = u''l''$; so sind e', f', i', k' Berührungspunkte der Horizontalcontour mit zu $o'p'$ parallelen Geraden. Der in $o'p'$ befindliche Punkt q' der Horizontalcontour ergibt sich im Durchschnitte von $o'p'$ mit der zur Projectionsaxe senkrechten Tangente $q''q'$ an die Verticalcontour. Die Curve $q''r''c''d''$ $u''x''y''z''$ ist die verticale Projection der Horizontalcontour $q'x'y'z'$. Die Rückkehrpunkte x', y' liegen in der zur Projectionsaxe senkrechten Tangente $x''y'x'$ an die Curve $q''r''..z''$. z'' ist der Berührungspunkt von $z''z'$ mit $\delta''\alpha''p''\gamma''$. z' liegt im Durchschnitte der $o'p'$ mit $z''z'$. $\alpha'\beta' = \gamma''\delta''$.

13. Die Axe $o''p''$, $o'p'$ (Taf. I, Fig. 5) der Rotationsfläche $\alpha\beta\varepsilon\varphi p$ ist gegen beide Projectionsebenen geneigt.

Dieser Fall kann auf den vorigen zurückgeführt werden, indem man die Rotationsfläche auf eine mit *op* parallele Verticalebene *MNO* projicirt und dann diese Projection um die Horizontaltrace *MN* der Ebene *MNO* in die horizontale Projectionsebene legt. In der Lage stellt $o'''p'''$ die Projection der Axe und $\alpha'''\beta''' \ldots b'''p'''g'''$ die Projection des mit *MNO* parallelen Meridianes $\alpha\beta \ldots bpg$ und

zugleich die Contour der Rotationsfläche auf der umgelegten Ebene *MNO* vor.

Die Projection $\alpha'''\beta'''\ldots b'''p'''g'''$ betrachte man als einen Aufriss und construire die Horizontalcontour wie in dem vorigen Falle und dann die Verticalcontour.

Zuerst bestimme man die wesentlichen Punkte u', w', i', k', α', β', γ', δ', l', und x'', y'', l'', q'', z'', ε'', φ'', ψ'', k''.

$r\mu t\ uwxy$ ist die Einziehungslinie, $gvhiklq$ der grösste Parallelkreis der Rotationsfläche. $r'''\mu'''t''' \parallel g'''\nu'''h''' \perp o'''p'''$. Man bestimme μ', ν', μ'', ν'', ziehe $u'\mu'w' \parallel i'\nu'k' \perp o'p'$ und $x''\mu''y'' \parallel l''\nu''q'' \perp o''p''$, mache $\mu'u' = \mu'w' = \mu''x'' = \mu''y'' = \mu'''r'''$; $\nu'i' = \nu'k' = \nu''l' = \nu''q'' = \nu'''g'''$. Die Tangenten in den Punkten u', w', i', k' der Horizontalcontour sind parallel zu $o'p'$. Die Tangenten in den Punkten x'', y'', l'', q'' an die Verticalcontour sind parallel zu $o''p''$. Der Punkt l' liegt im Durchschnitte der $o'p'$ mit der zu *MN* senkrechten Tangente $l'''l'$ an die Contour $\alpha'''\beta'''g'''h'''$.

Um den in $o''p''$ befindlichen Punkt z'' der Verticalcontour zu finden, könnte man den auf der verticalen Projectionsebene senkrechten Meridian um $o''p''$ in die Zeichnungsfläche legen und an den umgelegten Meridian eine zu $o''p''$ senkrechte Tangente zz' bis zum Durchschnitte mit $o''p''$ ziehen. Für diesen Zweck kann aber auch der Meridian $\alpha'''\beta'''\ldots g'''h'''$ benützt werden. Man ziehe zuerst eine Gerade o_1v_1, welche mit $o'''p'''$ denselben Winkel einschliesst, den op mit der verticalen Projectionsebene bildet, und dann die Gerade $o'''o_1$, so wie die Tangente zz_1 an die Contour $\alpha'''\beta'''\ldots g'''h'''$ senkrecht zu o_1v_1 und übertrage das Stück o_1z_1 nach $o''z''$.

Die Ellipsen $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$; $\varepsilon''\varphi''\psi''k''$ sind die Projectionen des Parallelkreises $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon k$. $\varepsilon''o''\psi'' \perp o''p''$; $\delta'o'\gamma' \perp o'p'$; $\delta'o'\gamma' = \varepsilon''\psi'' = \alpha'''\beta'''$; $\alpha'''\alpha' \parallel \beta'''\beta' \parallel o'''\gamma'\delta'$; $\alpha'''k_1 \parallel \beta'''\varphi_1$; $o'''o_1 \perp o_1v_1$; $o''\varphi'' = o''k'' = o_1\varphi_1 = o_1k_1$. Die Tangente $\alpha'''s_1'''$ an den Meridian $\alpha'''\beta'''\ldots g'''h'''$ trifft die $o'''p'''$ in s_1'''. Die Berührungspunkte von den durch s_1' gezogenen Tangenten an die Ellipse $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ sind zugleich Berührungspunkte der Ellipse $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ mit der Horizontalcontour. Eben so berührt die Verticalcontour die Ellipse $\varepsilon''\varphi''\psi''k''$ in jenen Punkten, in welchen die Ellipse von den durch s_1'' gezogenen Geraden berührt wird.

Ferner bestimme man eine entsprechende Reihe von Zwischenpunkten wie c', d', e'', f''. Zu dem Behufe ziehe man einen beliebigen Parallelkreis $a'''m'''b''' \perp o'''p'''$, so wie die Tangente $a'''s'''$ und die

Normale $a'''n'''$ der Contour $\alpha'''\beta'''\ldots p'''$ und bestimme s', s'', n', n''; dann beschreibe man aus n', n'' mit dem Halbmesser $a'''n'''$ die Kreise $c'n'd'$, $e''n''f''$, führe an dieselben die Tangenten $s'c'$, $s'd'$, $s''e''$, $s''f''$ und bemerke die Berührungspunkte c', d', e'', f''. u. s. w.

c) Rotationsflächen der zweiten Ordnung.

14. Ausser den im Vorhergehenden besprochenen Kegeln und Cylindern gehören zu den Rotationsflächen der zweiten Ordnung: die Kugel, das Ellipsoid, das Paraboloid, das Hyperboloid mit einem und jenes mit zwei Netzen. Die Contouren von diesen Rotationsflächen sind stets Curven von der zweiten Ordnung, deren Axen sich immer leicht construiren lassen.

15. Die Contour der Kugel ist bekanntlich ein Kreis, nämlich die Projection ihres grössten mit der betreffenden Projectionsebene parallelen Kreises. Der Halbmesser der Contour ist gleich jenem der Kugel.

16. Es ist m'', m' (Taf. I, Fig. 6) der Mittelpunkt, $a''b''$, $a'b'$ und $a''b''c''d''$, $a'b'c'd'$ die zur verticalen Projectionsebene parallele Rotationsaxe und Meridianellipse, so wie die Ellipse $a''b''c''d''$ die Verticalcontour des Ellipsoides *abcdef*. — $c''d'' \perp a''b''$.

Die Horizontalcontour ist eine Ellipse $e'f'g'h'$, deren kleine Axe $e'f' = c''d''$ ist. Die Endpunkte g', h' der grossen Axe $g'h'$ ergeben sich im Durchschnitte der $a'b'$ mit den zu der Projectionsaxe XX_1 senkrechten Tangenten $g''g'$, $h''h'$ an die Verticalcontour $a''b''c''d''$. Die Gerade $g''h''$ ist die verticale Projection der Ellipse $e'f'g'h'$; sie halbirt alle mit $g''g'$ parallelen Sehnen der Ellipse $a''b''c''d''$.

17. (Taf. I, Fig. 7.) a'', a' ist der Scheitel, $a''m''$, $a'm'$ die zur verticalen Projectionsebene parallele Rotationsaxe und die Parabel $a''c''d''$ ist die Verticalcontour des Paraboloides *acdef*.

Die Horizontalcontour ist eine Parabel $g'c'h'$, deren Axe $g'm'$ vorstellt und deren Scheitel g' im Durchschnitte der $g'm'$ mit der zu XX_1 senkrechten Tangente $g''g'$ an die Verticalcontour $a''c''d''$ liegt. Die verticale Projection der Parabel $e'f'g'$ ist die mit $a''m''$ parallele Gerade $g''h''i''$, welche alle zur Projectionsaxe XX_1 senkrechten Sehnen der Parabel $a''c''d''$ halbirt.

Die Punkte der Horizontalcontour können auf folgende Weise gefunden werden: Man ziehe den Aufriss $c''m''d''$ ($\perp a''m''$) eines Parallelkreises *cdef* des Paraboloides, welcher die Parabel *gih* in den

Punkten h und i schneidet, deren verticalen Projectionen h'', i'' im Durchschnitte von $c''d''$ mit $g''h''$ liegen. Dann drehe man den Parallelkreis $cdih$ sammt den Punkten h, i um cd parallel zur verticalen Projectionsebene nach cdh_1i_1, in welcher Lage $h''h_1''i''i_1''$ senkrecht zu $c''d''$ erscheint. Endlich ziehe man $h''h'i' \perp g'm'$ und mache $u'h' = u'i' = h''h_1'' = i''i_1''$, so sind h', i' Punkte der Horizontalcontour. Auf gleiche Weise können alle anderen Punkte der Horizontalcontour construirt werden. Da aber jetzt die Parabel $g'i'h'$ vollkommen bestimmt ist, indem der Scheitel g', die Axe $g'm'$ und die Punkte h', i' bekannt sind, so können andere Punkte der Parabel auch ohne Benützung des Aufrisses mittelst bekannten geometrischen Constructionen dargestellt werden.

18. (Taf. I, Fig. 8.) m'', m' ist der Mittelpunkt, $q''n''$, $q'n'$ und $a''b''e''f''g''h''$, $a'b'e'f'g'h'$ die zur verticalen Projectionsebene parallele Rotationsaxe und Meridianhyperbel des Hyperboloides von einem Netze $e''f''\ldots g''h''$, $e'c'd'h'$. Die Hyperbel $a''e''g''b''f''h''$, deren Scheitel a'', b'' sind, ist die Verticalcontour.

Die Horizontalcontour ist ebenfalls eine Hyperbel, deren imaginäre Axe mit $p'm'n'$ zusammenfällt und deren Scheitel c', d' in der zu $m'n'$ senkrechten Geraden $m''m'$ liegen. — $c'd' = a''b''$.

Man ziehe den Aufriss $g''n''h''$ eines Parallelkreises gnh und durch h'' die Normale $h''p''$ zu $f''b''h''$, welche $m''n''$ in p'' schneidet. Aus p' beschreibe man mit dem Halbmesser $h''p''$ den Kreis $p'r's'$ als die Horizontalcontour der das Hyperboloid in dem Kreise gnh berührenden Kugel und ziehe die verticale Projection $p''r''s''$ ($\| XX_1$) von $p'r's'$ bis $g''h''$ in $r''s''$ getroffen wird und dann $r''s'r' \| m''m'$; so gehören r', s' der Horizontalcontour an. Nun ist die Hyperbel $c'd'r's$ durch ihre Scheitel c', d' und die Punkte r', s' vollkommen bestimmt und können andere Punkte derselben auch ohne Benützung des Aufrisses auf bekannte Weise construirt werden.

Die verticale Projection der Hyperbel $c'd'r's'$ ist die Gerade $r''m''t''$, welche alle mit $m''m'$ parallelen Sehnen der Hyperbel $a''e''\ldots f''h''$ halbirt und deshalb auch ohne Benützung der Kugel pgh gezogen werden kann.

Die Punkte der Horizontalcontour können nachher eben so wie zuvor bei dem Paraboloide gefunden werden. Man ziehe nämlich den Aufriss $g''h''$ eines Parallelkreises $gikh$, welcher die Hyperbel $cdrs$ in den Punkten r, s trifft, deren verticalen Projectionen r'', s'' im

Durchschnitte der $r''m''$ mit $g''h''$ liegen. Den Kreis $grsh$ drehe man um gh parallel zu der verticalen Projectionsebene, wodurch $r''s''$ nach $r_1''s_1''(\perp g''h'')$ zu liegen kommt. Dann ziehe man $r''r's' \| m''m'$ und mache $u'r' = u's' = r''r''_1 = s''s''_1$ u. s. w.

19. Die reelle Axe ab (Taf. I, Fig. 9) der zur verticalen Projectionsebene parallelen Meridianhyperbel $acdbef$ bildet die Umdrehungslinie eines Hyperboloides mit zwei Netzen. Die Hyperbel $a''c''d''e''f''$ ist die Verticalcontour desselben.

Die Horizontalcontour $g'h'i'k'$ ist ebenfalls eine Hyperbel, deren Scheitel g', h' im Durchschnitte der $a'b'$ mit den zu $a'b'$ senkrechten Tangenten $g''g'$, $h''h'$ an die Verticalcontour $a''c''d''b''e''f''$ liegen. Die verticalen Projectionen von $g'n'l'$ und $h'i'k'$ erscheinen als die Geraden $g''n''$ und $h''k''$; sie fallen beide in die Gerade $g''h''$, welche die zu $m''m'$ parallelen Sehnen der Hyperbel $a''c''d''b''e''f''$ halbirt.

Die Punkte der Horizontalcontour können nun wie bei dem Paraboloide und dem Hyperboloide mit einem Netze construirt werden.

Der beliebige Parallelkreis eif trifft die Hyperbel $nghi$ in den Punkten i, k, denn $e''i''f''$ und $h''i''k''$ schneiden sich in i'', k''. Dreht man den Kreis eif um ef parallel zur verticalen Projectionsebene, so kommt $e''f''i''k''$ nach $e''f''i_1''k_1''$. $i_1''k_1'' \perp e''f''$. Zieht man nun $i''k'i'u' \| g''g'$ und macht $u'i' = u'k' = i''i_1''$, so ergeben sich die Punkte i', k' der Horizontalcontour u. s. w.

Übrigens kann die Hyperbel $g'h'i'$, nachdem ihre Scheitel g', h' und die Punkte i', k' bestimmt worden sind, auch unabhängig vom Aufrisse construirt werden.

20. Wenn die Rotationsaxe einer Fläche von der zweiten Ordnung gegen beide Projectionsebenen geneigt ist, so verfahre man bei Bestimmung der Contouren auf ähnliche Weise wie in 12 angegeben wurde. Die Hilfsconstructionen können jedoch auch nach folgendem Verfahren durchgeführt werden.

$\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ (Taf. I, Fig. 10) ist die Rotationsaxe und $\mu'\mu''$ der Mittelpunkt eines Ellipsoides, dessen Meridian die Ellipse $e'f'g'h'$ Fig. 6 vorstellt. Die Axe $\alpha\beta$ schliesst den Winkel h mit der horizontalen und den Winkel v mit der verticalen Projectionsebene ein.

Man ziehe in Fig. 6 die Gerade $\varepsilon_1\varphi_1$ unter dem Winkel h gegen $a'b'$ geneigt und $m'm_1$ so wie die Tangenten $\varepsilon\varepsilon_1$ und $\varphi\varphi_1$ an die Ellipse

$e'f'g'h'$ senkrecht zu $\varepsilon_1\varphi_1$. Dann mache man in Fig. 10 $\mu'\varepsilon' = \mu'\varphi' = m_1\varepsilon_1 = m_1\varphi_1$ und ziehe $\psi'\mu'k' \perp \varepsilon'\varphi'$; $\mu'\psi' = \mu'k' = m'e'$ (Fig. 6). $\varepsilon'\varphi'$ ist die grosse und $\psi'k'$ die kleine Axe der Ellipse $\varepsilon'\varphi'\psi'k'$, welche die Horizontalcontour des fraglichen Ellipsoides bildet.

Die Axen $\alpha''\beta''$, $\gamma''\delta''$ der Ellipse $\alpha''\beta''\gamma''\delta''$, welche die Verticalcontour des Ellipsoides vorstellt, ergeben sich auf dieselbe Weise. Man ziehe in Fig. 6 die Gerade $\alpha_1 m'\beta_1$ unter dem Winkel v gegen $a'b'$ geneigt und senkrecht zu $\alpha_1\beta_1$ die Tangenten $\alpha\alpha_1$ und $\beta\beta_1$ an die Ellipse $e'f'g'h.'$. Ferner mache man in Fig. 10, $\mu''\alpha'' = \mu''\beta'' = m'\alpha_1 = m'\beta_1$ (Fig. 6), ziehe $\gamma''\mu''\delta'' \perp \alpha''\beta''$ und $\mu''\gamma'' = \mu''\delta'' = \mu'\psi'$.

B. Perspectivische Darstellung.

a) Rotations-Kegel und Cylinder.

21. Contouren von Kegeln und Cylindern sind die perspectivischen Bilder von Berührungskanten solcher Flächen mit den durch das Auge A gelegten Ebenen, daher die Tracen von diesen Ebenen. Die Contouren werden gewöhnlich dadurch bestimmt, dass zuerst das perspectivische Bild der Basis der bezüglichen Fläche dargestellt wird und dann an dasselbe Tangenten gezogen werden, welche durch die Kegelspitze oder parallel zur Cylinderaxe gehen. Aber auch in perspectivischen Darstellungen lassen sich die Contouren ohne Benützung des perspectivischen Bildes der Basis construiren und ist es zweckmässiger, zuerst die Contouren und nachher die Basis zu zeichnen, wenn nämlich letztere überhaupt für andere Zwecke erforderlich ist.

Die zur Bestimmung der orthographischen Contouren von Kegeln und Cylindern benützten Kugelcontouren lassen sich in perspectivischen Darstellungen nur selten mit Vortheil anwenden, weil die perspectivischen Contouren von Kugeln im Allgemeinen nicht Kreise, sondern Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln sind. Aus diesem Grunde ist es vortheilhafter, die perspectivischen Contouren von Kegeln und Cylindern nach den in folgenden Beispielen angewandten Verfahren zu construiren.

22. Die Axe sm (Taf. II, Fig. 11) und der Durchmesser ab der Basis eines geraden Kreiskegels $sabm$ liegen in der Bildebene. Ω ist der Augenpunkt und D ein Distanzpunkt. $\Omega D \parallel ms \perp ab$, $\Omega z \parallel ab$. ab ist die Verticaltrace, Ωz die Fluchtlinie der Basisebene abm. sa und sb sind die Durchschnittskanten des Kegels mit der Bildfläche.

Die berührend an den Kegel durch das Auge A gelegten Ebenen schneiden die Basisebene $ab\Omega z$ in Tangenten σc und σd der Basis abm. σc und σd haben den Durchschnittspunkt σ des Sehstrahles $As\sigma$ mit der Basisebene gemeinschaftlich und treffen die Bildfläche in den Punkten e und f der ab, folglich gehören e und f den fraglichen Contouren an und es sind sofort se und sf die Contouren des Kegels.

Um e und f einfach zu finden, lege man die Kegelbasis abm und den Durchschnittspunkt σ der As mit der Basisebene um ab in die Bildfläche; die Kegelbasis erscheint dann als der Kreis d_1ab vom Halbmesser mb und σ kommt nach σ_1 in den Durchschnitt der $D\sigma\sigma_1$ mit $p\sigma_1$, welche letztere im Durschnittspunkte p von Ωsp und abp senkrecht zu abp steht. Dann ziehe man an den Kreis d_1ab die Tangenten σ_1c_1 und σ_1d_1, welche denselben in c_1 und d_1 berühren und die Gerade ab in e und f schneiden.

Die in der Kegelbasis abm befindlichen Endpunkte c und d der Contouren se und sf ergeben sich im Durchschnitte mit Dc_1c und Dd_1d.

Zieht man die Geraden c_1c'' und $d_1d'' \perp ab$, so sind c'', d'' die orthogonalen Projectionen von c und d auf der Bildfläche und folglich ergeben sich auch c und d, wenn $\Omega c''c$ bis zur se und $\Omega d''$ bis zur sd gezogen werden.

Offenbar sind die Geraden Dq und $m\sigma_1$ parallel, denn sie stellen die umgelegten Durchschnittslinien der Ebene Ams mit der Horizontebene und der mit ihr parallelen Basisebene abc vor. Die Geraden Ωz und ab, um welche die genannten Durchschnittslinien gedreht wurden, sind ebenfalls parallel und die Drehungswinkel sind einander gleich.

23. Die Fluchtebene $A\Omega z$ (Taf. II, Fig. 12) der Basis abc schneidet den geraden Kreiskegel $sabc$, dessen Axe sm in der Bildfläche liegt, in einem Kreise $\alpha\mu\beta$ und die durch A geführten Berührungsebenen des Kegels in den Tangenten $A\varepsilon$ und $A\varphi$ des Kreises $\alpha\mu\beta$. Die Tangenten $A\varepsilon$ und $A\varphi$ treffen die Bildfläche in ε und φ der Ωz und es liegen also ε, φ ebenfalls in den Contouren des Kegels $sabm$. $\Omega D \| sm$; $\Omega z \| ab \perp ms$.

Man lege den Kreis $\alpha\mu\beta$ sammt dem Auge A um $\alpha\beta$ in die Bildfläche nach $\alpha\beta\gamma_1$ und D. Dann ziehe man an den Kreis $\alpha\beta\gamma_1$ die Tangenten $D\gamma_1\varepsilon$ und $D\delta_1\varphi$ und durch ihre Begegnungspunkte ε und φ mit $\alpha\beta$ die Contouren $s\varepsilon c$ und $s\varphi d$.

Fallen ε, φ sehr nahe an die Spitze, in welchem Falle $s\varepsilon$ und $s\delta$ sich nicht genau ziehen lassen, so lege man auch die Kegelbasis *abc* um *ab* in die Bildfläche nach abc_1 und ziehe an den Kreis abc_1 die mit $D\gamma_1$ und $D\delta_1$ parallelen Tangenten c_1e und d_1f und durch ihre Begegnungspunkte e, f mit *ab* die Contouren *sec* und *sfd*.

Die in der Basis befindlichen Punkte *c* und *d* der Contouren ergeben sich, wenn man durch die Berührungspunkte c_1, d_1 der Tangenten c_1e, d_1f mit dem Kreise abc_1 die Geraden Dc_1c und Dd_1d, oder durch die orthogonalen Projectionen c'' und d'' von *c* und *d* die Geraden $\Omega c''c$ und $\Omega d''d$ bis zu den betreffenden Contouren zieht.

Es versteht sich von selbst, dass c_1e und d_1f in der Verlängerung durch σ_1 gehen, welcher Punkt aber hier ausserhalb der Zeichnungsfläche liegt. Wenn *s* nicht vorhanden ist, sind ε, *e*, φ, *f* zu benützen.

24. Kann *s* nicht benützt werden, so betrachte man auf dem geraden Kreiskegel *sacb*, dessen Axe *sm* in der Bildfläche liegt, den beliebigen Kreis $\alpha\gamma\beta$ (Taf. II, Fig. 13) als Leitlinie eines zweiten Kegels $A\alpha\beta\gamma$, dessen Spitze *A* ist. Dieser Kegel $A\alpha\gamma\beta$ tangirt offenbar die Berührungsebenen *Ase* und *Asf* des Kegels *sabc* und schneidet die Basisebene *acb* in einem Kreise *k*, welcher die Geraden σc und σd ebenfalls berührt. Das perspectivische Bild von *k* fällt mit jenem von dem Kreise $\alpha\gamma\beta$ zusammen und es ist also $\alpha\beta$ zugleich das perspectivische Bild des mit *ab* parallelen Durchmessers des Kreises *k*. Den Kreis *k* so wie die Basis *acb* lege man um *ab* in die Bildfläche, mithin *k* nach $\alpha_1\gamma_1\beta_1$ und *acb* nach $acbc_1$. Zieht man $\Omega\mu p$, $D\mu\mu_1$ und $p\mu_1 \perp ab$, ferner $\alpha_1\mu_1\beta_1 \| ab$, $D\alpha\alpha_1$ und $D\beta\beta_1$; so ist μ_1 der Mittelpunkt und $\alpha_1\beta_1$ ein Durchmesser des umgelegten Kreises *k*. Die Tangenten γ_1c_1 und δ_1d_1 an die Kreise amd_1 und $\alpha_1\gamma_1\beta_1$ treffen die *ab* in den Punkten *e* und *f* der fraglichen Contouren *se* und *sf*.

Nun führe man die Berührungspunkte γ_1 und δ_1 in die Ebene des Kreises $\alpha\gamma\beta$ nach γ, δ zurück und ziehe die verlangten Contouren $e\gamma$ und $f\delta$.

Die in der Basis *acb* befindlichen Punkte *c* und *d* der Contouren sind wie in den früheren Fällen zu construiren.

25. Ist die Kegelaxe *sm* und der Basisdurchmesser *ab* parallel zur Bildfläche, so können zur Bestimmung der Contouren *sc* und *sd* des Kegels *samb* die in 21, 22, 23 angegebenen Verfahren angewen-

det werden; nur hat man dort statt Bildfläche, zur Bildfläche parallele Ebene *abs* zu lesen.

26. Die Kegelaxe *sm* (Taf. II, Fig. 14) ist gegen die Bildfläche geneigt. *F* bildet den Fluchtpunkt von *sm*, *ab* den zur Bildfläche parallelen Durchmesser der Kegelbasis. $ab \perp \Omega F$, $\Omega D \perp \omega\Omega F$, $D\omega \perp DF$, $\omega\Delta = \omega D$. — ωq ($\| ab$) ist die Fluchtlinie der zu *smF* senkrechten Kegelbasis.

Man denke sich durch *ab* eine zur Bildfläche parallele Hilfsebene geführt und lege in dieselbe um *ab* die Kegelbasis nach abc_1 und den Durchschnittspunkt σ des Sehstrahles $As\sigma$ mit der Basisebene *abc* nach σ_1, indem man ωsp, $p\sigma_1 \perp abp$ und $\Delta s\sigma_1$ zieht. Dann führe man an den Kreis abc_1 die Tangenten $\sigma_1 c_1$ und $\sigma_1 d_1$, welche abc_1 in c_1 und d_1 berühren und *ab* in *e* und *f* schneiden und ziehe die Contouren *se* und *sf*. Um die Contourpunkte *c* und *d* zu erhalten, ziehe man $\Delta c_1 c$ und $\Delta d_1 d$ oder $c_1 c_2$ und $d_1 d_2 \perp ab$ und dann $\omega c_2 c$ und $\omega d_2 d$ bis zu den betreffenden Contouren. $m\sigma_1$ ist geometrisch parallel mit Δq, denn es stellen diese Geraden die umgelegten Durchschnitte der Ebene *AsF* mit den parallelen Ebenen $A\omega q$ und *abc* vor.

27. Die Fluchtebene $A\omega\mu$ der Basis *abc* (Taf. II, Fig. 15) schneidet den geraden Kreiskegel *sabc*, dessen Axe *sm* in *F* verschwindet, in dem Kreise $\alpha\beta\gamma$ und die Berührungsebenen *Asc* und *Asd* des Kegels *sabc* in den Tangenten $A\gamma$ und $A\delta$, welche beide wieder den Durchmesser $\alpha\beta$ in den Punkten δ und γ der fraglichen Contouren treffen. $\Omega D \perp \omega\Omega F$; $D\varphi \perp DF$; $\omega\mu \| ab \perp \Omega F$.

Man lege den Kreis $\alpha\beta\gamma$ sammt dem Auge *A* um $\alpha\beta$ in die zur Bildfläche parallele Ebene $\alpha\beta\gamma_1$, mithin $\alpha\beta\gamma$ nach $\alpha\beta\gamma_1$ und *A* nach Δ. An den Kreis $\alpha\beta\gamma_1$ ziehe man die Tangenten $\Delta\gamma_1\gamma$ und $\Delta\delta_1\delta$ bis $\alpha\beta$ und verbinde die Durchschnittspunkte γ und δ mit *s*. — $s\gamma$ und $s\delta$ sind die fraglichen Contouren.

Fallen γ und δ sehr nahe an *s*, so drehe man auch die Basis *abc* parallel zur Bildfläche nach abc_1 und ziehe an den Kreis abc_1 die mit $\Delta\gamma$ und $\Delta\delta$ parallelen Tangenten $c_1 e$ und $d_1 f$, welche abc_1 in c_1 und d_1 berühren und *ab* in *e* und *f* schneiden und verbinde dann *s* mit *e* und *f*.

Zieht man endlich $\Delta c_1 c$ und $\Delta d_1 d$, oder $c_1 c_2$ und $d_1 d_2 \perp ab$, so wie $\omega c_2 c$ und $\omega d_2 d$ bis zu den bezüglichen Contouren *se* und *sf*, so ergeben sich die in der Basis *acb* befindlichen Contourpunkte *c* und *d*.

28. Kann weder die Kegelspitze s noch der Durchschnittskreis der Fluchtebene der Basis mit dem Kegel $\alpha\mu\beta$ *amb* (Taf. II, Fig. 15 *b*) benützt werden, wo F den Fluchtpunkt der Axe μm, *ab* den zur Bildfläche parallelen Durchmesser der Basis *acb* bildet und αa, βb Erzeugende des Kegels sind, so wähle man auf dem Kegel $\alpha\mu\beta amb$ einen beliebigen Kreis $\alpha\beta\gamma$, welcher mit der Ebene μmab den mit *ab* parallelen Durchmesser $\alpha\beta$ gemeinschaftlich hat, als Leitlinie eines Kegels, dessen Spitze das Auge A ist. Der Durchschnitt dieses Kegels $A\alpha\beta\gamma$ mit der Basisebene *acb* ist wieder ein Kreis k, für den $\alpha\beta$ das perspectivische Bild des mit *ab* parallelen Durchmessers darstellt.

Die Basis *abc*, so wie jene k des Hilfskegels $A\alpha\mu\beta$ lege man um *ab* in die zur Bildfläche parallele Ebene abc_1, also erstere nach abc_1 und letztere nach $\alpha_1\mu_1\beta_1$, wo $\alpha_1\beta_1 \| ab$ und $p\mu_1 \perp ab$ erscheint und ziehe an die beiden Kreise abc_1 und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ die Tangenten $c_1\gamma_1$ und $d_1\delta_1$, bis sie die *ab* in e und f treffen. Dann führe man die Berührungspunkte c_1, d_1, γ_1, δ_1 nach c, d, γ, δ zurück und ziehe die Contouren $c\gamma$ und $d\delta$. — $\gamma_1 q \| \delta_1 t \perp ab$.

29. Die perspectivischen Contouren von Cylindern können auf dieselbe Weise wie jene von Kegeln construirt werden; man hat sich nur die Spitze s in unendlicher Entfernung von der Basis *abc* zu denken. In den meisten Fällen lassen sich aber die betreffenden Constructionen noch vereinfachen.

30. Die Axe μm (Taf. II, Fig. 16) und der Durchmesser *ab* ($\perp \mu m$) der Basis des Cylinders $abe\varepsilon f\varphi$ liegen in der Bildfläche.

Die Ebenen $Ae\varepsilon$ und $Af\varphi$, welche berührend an den Cylinder durch das Auge A gelegt werden und deren Tracen $e\varepsilon$ und $f\varphi$ die fraglichen Contouren vorstellen, schneiden sich in der mit $m\mu$ parallelen Geraden $A\sigma$, welche die Basisebene *abc* in σ trifft. Die Ebenen $Ae\varepsilon$ und $Af\varphi$ schneiden die Basisebene *abc* in den Geraden σe und σf, welche Tangenten des Kreises *abc* bilden.

Der Durchschnittspunkt σ der zur Axe μm parallelen Geraden $A\sigma$ mit der Basisebene *abc* liegt in der Ebene $A\Omega D$. Legt man diesen Punkt σ sammt der Basis *abc* um *ab* in die Bildfläche, so kommt σ nach σ_1 ($\Omega\sigma_1 \| \mu m$, $g\sigma_1 = \Omega D$) und die Basis erscheint als der Kreis $ambc_1$.

Die Tangenten $\sigma_1 c_1 e$ und $\sigma_1 d_1 f$ berühren den Kreis abc_1 in c_1 und d_1 und schneiden die *ab* in den Punkten e und f der fraglichen Contouren. — Da s in unendlicher Entfernung von *abm* liegt, so

sind hier die Cylindercontouren $e\varepsilon$ und $f\varphi$ geometrisch parallel zu μm zu ziehen. Die in der Basis abc befindlichen Contourpunkte c und d ergeben sich, wenn man Dc_1c und Dd_1d oder c_1c'' und $d_1d'' \perp ab$ und dann $\Omega c''c$ und $\Omega d''d$ zieht. c'' und d'' sind die orthogonalen Projectionen von c und d.

31. Die Fluchtebene $A\Omega\varepsilon$ (Taf. II, Fig. 16) der Basis abc schneidet den Cylinder $abef\varepsilon\mu\varphi$ in einem mit abc gleich grossen Kreise $\alpha\gamma\beta$, dessen Mittelpunkt μ ist und die den Kreis $\alpha\mu\beta$ berührenden Sehstrahlen $A\gamma\varepsilon$ und $A\delta\varphi$ treffen die Gerade $\alpha\beta$ in den Contourpunkten ε und φ. $\Omega\mu \parallel ab$.

Legt man das Auge A und den Kreis $\alpha\gamma\beta$ um $\alpha\beta$ in die Bildfläche, so kommt A nach D und $\alpha\gamma\beta$ nach $\alpha\mu\beta\gamma_1$. Die umgelegten Sehstrahlen $D\gamma_1\varepsilon$ und $D\delta_1\varphi$ treffen die Gerade $\alpha\beta$ in ε und φ. Durch ε und φ sind also die Contouren $e\varepsilon$ und $f\varphi$ geometrisch parallel zu μm zu ziehen. Die Punkte c und d sind wie in den früheren Fällen zu construiren. $\sigma_1c_1e \parallel D\gamma_1\varepsilon$; $\sigma_1d_1f \parallel D\varphi\delta_1$.

Das in 24 angegebene Verfahren zur Bestimmung der Kegelcontouren kommt bei Cylinderflächen selten in Anwendung, weil es nicht so einfach ist, wie die beiden früheren Verfahren.

32. Ist die Cylinderaxe μm parallel zur Bildfläche, so bestimme man zuerst den mit der Bildfläche parallelen Durchmesser ab der Basis und construire die Contouren nach den in 30 und 31 angegebenen Verfahren, lese dort aber statt Bildfläche, Ebene abc_1, welche zur Bildfläche parallel ist.

33. Die Cylinderaxe μm (Taf. II, Fig. 17) ist gegen die Bildfläche geneigt. F ist der Fluchtpunkt von μm und ab der zur Bildfläche parallele Durchmesser der Cylinderbasis abc.

$ab \perp \Omega F$; $\Omega D \perp \omega\Omega F$; $D\omega \perp DF$; $\omega\Delta = \omega D = \omega A$. $\omega\varphi\,(\parallel ab)$ ist die Fluchtlinie der zu μm senkrechten Kegelbasis abm.

Die durch das Auge A gelegten Berührungsebenen AeF und AfF des Cylinders $\mu mabc$, welche die Bildfläche in den fraglichen Contouren eF und fF treffen, schneiden sich in der mit μm parallelen Geraden $A\sigma$. Die Ebenen AeF und AfF schneiden die Basisebene abc in den Geraden σc und σd, welche Tangenten der Basis abc sind und die Gerade ab in e und f treffen.

Die Ebene $A\mu m$, welche durch das Auge A und die Cylinderaxe μm gelegt wird, enthält den mit μm parallelen Sehstrahl $A\sigma$, mithin liegt der Durchschnittspunkt σ des Sehstrahles $A\sigma$ mit der Basisebene

abc in der Durchschnittslinie $m\sigma$ der Ebenen $A\mu m$ und acb. $m\sigma$ ist aber parallel zu der Durchschnittslinie $A\mu$ der Ebenen $A\mu m$ und $A\omega\varphi$. Dreht man $A\mu$ um $\omega\varphi$ und $m\sigma$ um ab, erstere in die Bildfläche nach $\Delta\mu$ und letztere in die zur Bildfläche parallele Ebene abc_1 nach $m\sigma_1$, so erscheint $m\sigma_1 \| \Delta\mu$. Nun liegt σ zugleich in der Geraden AF, folglich in der Ebene $A\Omega F$; σ muss desshalb nach dem Umlegen um ab in die Gerade ΩF zu liegen kommen. σ_1 liegt also im Durchschnitte der ΩF mit $m\sigma_1$. Die Cylinderbasis abc drehe man ebenfalls um ab parallel zur Bildfläche nach abc_1 und ziehe nun an den Kreis abc_1 die Tangenten $\sigma_1 c_1 e$ und $\sigma_1 d_1 f$, welche abc_1 in c_1 und d_1 berühren und ab in e und f schneiden. Durch die so erhaltenen Punkte e und f ziehe man die Cylindercontouren Fe und Ff. Die Contourpunkte c und d liegen überdies in den Geraden $\Delta c_1 c$, $\omega c_2 c$ und $\Delta d_1 d$, $\omega d_2 d$. Es ist $c_1 c_2 \| d_1 d_2 \perp ab$.

34. (Taf. II, Fig. 17.) ab ist der zur Bildfläche parallele Basisdurchmesser und F der Fluchtpunkt der Rotationsaxe mF des Cylinders $Fabm\alpha\beta$. Die Fluchtebene $A\omega\varphi$ der Basis abc schneidet den Cylinder $Fabm\alpha\beta$ in einem Kreise $\alpha\beta\gamma$ und die diesen Kreis berührenden Sehstrahlen $A\gamma$ und $A\delta$ treffen die Fluchtlinie $\omega\varphi$ der Basis abc in den Contourpunkten ε und φ.

Den Punkt A sammt dem Kreise $\alpha\mu\beta$ lege man um $\alpha\beta$ in die zur Bildfläche parallele Ebene $\alpha\mu\beta\gamma_1$, so erscheint dann A in Δ ($\Omega D \perp \Omega F$; $\omega D \perp DF$; $\omega\Delta = \omega D$) und $\alpha\mu\beta$ als Kreis $\alpha\mu\beta\gamma_1$. Dann ziehe man an den Kreis $\alpha\mu\beta\gamma_1$ die Tangenten $\Delta\gamma_1\varepsilon$ und $\Delta\delta_1\varphi$, bis sie die $\alpha\beta$ in ε und φ treffen und endlich die Contouren $F\varepsilon$ und $F\varphi$. — Es ist selbstverständlich, dass $\Delta\varepsilon \| \sigma_1 e$ und $\Delta\varphi \| \sigma_1 f$ sein muss.

Wollte man zur Bestimmung der Cylindercontouren das in 28 angegebene Verfahren anwenden, so ist dabei F statt s zu benützen, also Fa und Fb zu ziehen, bis die mit ab parallele Gerade $\alpha\beta$ in α und β getroffen wird und dann wie dort vorzugehen.

35. Sehr häufig sind die Cylindercontouren unter folgenden Bedingungen zu construiren: Die Basis eines Rotationscylinders liegt in der Ebene MNO (Taf. II, Fig. 17 *b*), von welcher die Verticaltrace NO und ein Punkt m durch sein perspectivisches Bild m und die orthogonale Projection m'' auf der Bildfläche gegeben ist. m ist der Mittelpunkt und $ab (\| NO)$ der mit der Bildfläche parallele Durchmesser der Basis des Cylinders. $\Omega D \| NO$; $\Omega\Delta\sigma_1 \perp NO$.

Man ziehe $nm''m_1 \perp NO$ d. i. die orthogonale Projection der Cylinderaxe. Die zur Bildfläche senkrechte Ebene $mm''m_1$ schneidet die mNO in der Geraden mn und enthält die Cylinderaxe mp, welche auf mn senkrecht steht. Dann lege man mn um nm_1 in die Bildfläche nach nm_2, ziehe also $m''m_2 \| NO$, mm_2D und nm_2. Ferner errichte man $m_2p \perp nm_2$, so stellt m_2p die um nm_1 in die Bildfläche gelegte Cylinderaxe vor und da m_2p die orthogonale Projection $m''m_1$ von mp in p schneidet, so ist p der Durchschnittspunkt der Cylinderaxe mit der Bildfläche, mithin mp das perspectivische Bild der Cylinderaxe. Treffen sich m_2p und $m''m_1$ nicht auf der Zeichnungsfläche, so ist ein zweiter Punkt μ der Geraden mp mittelst den ähnlichen Dreiecken $\nu\mu\mu_1$ und nmm_2 ($\mu_1\nu \| m_2n$; $\mu_1\mu \| m_2m$; $\nu\mu \| nm$) zu bestimmen und dann $qm\mu$ zu ziehen.

Die Gerade mq bildet den Durchschnitt der MNO mit der Ebene Amq. Man lege qm um NO in die Bildfläche nach qm_1 ($nm_1 = nm_2$) und ziehe $m\sigma_1 \| qm_1$, so stellt σ_1 den um ab in die (zur Bildfläche parallele) Ebene abd_1 gelegten Durchschnittspunkt σ des mit der Cylinderaxe $m\mu$ parallelen Sehstrahles $A\sigma$ mit der Ebene MNO vor. In diese Ebene abd_1 lege man auch die Basis abd nach abd_1 und ziehe an den Kreis abd_1 die Tangenten σ_1e und σ_1f, bis sie ab in e und f schneiden. Endlich ziehe man die Contourkanten $e\varepsilon$ und $f\varphi$ nach dem Durchschnittspunkte der Geraden $\Omega\sigma_1$ und $m\mu$.

Zieht man $d_1d''d_2 \perp ab$; $d_2d_3 \| nm_2$; $d_2d_3 = d_2d_1$; $d_2d' \| ab$; so ist d' die orthogonale Projection von d auf der zur Bildfläche parallelen Ebene abd_1 und $\Omega d''d$, sowie Dd_2d treffen sich in dem Contourpunkte d. Eben so könnte auch c bestimmt werden.

Die Geraden mm_1 und $\Omega\sigma_1$ treffen sich in dem Neben-Distanzpunkte Δ der Ebene MNO; die in MNO befindlichen Contourpunkte c und d ergeben sich also im Durchschnitte von Δc_1c und Δd_1d mit den betreffenden Contouren $e\varepsilon$ und $f\varphi$.

$m_2nm_1 = d_2d_3d_1$ ist gleich dem Neigungswinkel der MNO mit der Bildfläche.

36. Wenn die conjungirten Durchmesser ab und cd (Taf. IV, Fig. 18) der Ellipse $abcd$, d. i. die Perspective der Kegel- oder Cylinderbasis gegeben sind, so können die Contouren der bezüglichen Kegel- oder Cylinderfläche auf folgende Weise construirt werden.

s sei die Spitze des Kegels $sabcd$, dessen Contouren se und sf zu construiren sind.

Man beschreibe über cd als Durchmesser den Kreis da_1c, dessen Mittelpunkt m ist und ziehe $a_1m \perp cd$. Diesen Kreis betrachte man als die schiefe Projection der Ellipse $abcd$ auf der Ebene cda_1, wobei aa_1 die Richtung der projicirenden Geraden und ma_1 die schiefe Projection von ma bildet. Die Ebenen bcd und cda_1 schneiden sich in der Geraden cd, wesshalb die schiefen Projectionen von Punkten der cd mit den zu projicirenden Punkten zusammenfallen. Die mit am parallele Gerade sr hat als schiefe Projection die mit a_1m parallele Gerade s_1r und die schiefe Projection s_1 von s muss also im Durchschnitte von s_1r mit der zu aa_1 parallelen Geraden ss_1 liegen. Die schiefen Projectionen s_1e_1 und s_1f_1 von den Tangenten se und sf der Ellipse $abcd$ sind aber Tangenten an den Kreis ba_1c.

Nachdem die Berührungspunkte e_1 und f_1 der Tangenten s_1e_1 und s_1f_1 bestimmt worden sind, können auch die in der Ellipse $abcd$ liegenden Punkte e und f, deren schiefe Projectionen e_1 und f_1 sind, leicht gefunden werden. e_1t und $f_1q \perp cd$; e_1e und $f_1f \| aa_1$; te und $qf \| ab$. Nachher sind die Contouren se und sf zu ziehen. sf und s_1f_1 schneiden sich in I und se und s_1e_1 in II. I und II liegen in cd.

Stellt s den Fluchtpunkt von Erzeugenden eines Cylinders mit der Basis $abcd$ vor, so sind se und sf die Contouren dieses Cylinders.

Sind die Cylindercontouren gx und hy geometrisch parallel zu der Geraden um, so ziehe man $ur \| ab$, die schiefe Projection $ru_1 \| ma_1$ und projicire den Punkt u nach u_1. ($uu_1 \| aa_1$). u_1m ist nun die schiefe Projection von mu und die schiefen Projectionen von gx und hy sind mit mu_1 parallele Tangenten g_1x_1 und h_1y_1 des Kreises da_1c, welche denselben in den Punkten g_1 und h_1 berühren. $g_1mh_1 \perp mu_1$. g_1p und $h_1v \perp cd$; $pg \| vh \| ab$; $g_1g \| h_1h \| aa_1$. Durch g und h sind parallel zu mu die fraglichen Contouren gx und hy zu ziehen. gx und g_1x_1 so wie hy und h_1y_1 schneiden sich in den Punkten III und IV von cd.

Sind ab und cd (Taf. IV Fig. 18 b,) die conjungirten Durchmesser der Basis $abcd$ eines Cylinders, dessen Contourkanten gx und hy mit ce geometrisch parallel sind, so können dieselben auch wie folgt construirt werden. Man beschreibe über ab als Durchmesser den Kreis abc_1, dessen Mittelpunkt m ist, ziehe $mc_1 \perp ab$ ferner die Tangenten pg und $qh \| c_1e$ bis ab in g und h geschnitten wird und endlich gx und $gy \| ce$.

b) Allgemeine Rotationsflächen.

37. Die Contour einer Rotationsfläche stellt den Durchschnitt der Bildebene mit dem die Rotationsfläche umhüllenden Kegel vor, dessen Spitze das Auge A bildet und dessen Erzeugenden die Umdrehungsfläche berührende Sehstrahlen sind; die Contour ist also das perspectivische Bild der Berührungslinie des Sehkegels mit der Rotationsfläche. Die Tracen der Berührungsebenen dieses umhüllenden Kegels sind aber Tangenten an die Contour der Rotationsfläche.

Bildet der Kreis cmd die Berührungslinie eines Kegels oder eines Cylinders mit einer beliebigen Rotationsfläche, so sind die Contouren des Kegels oder Cylinders Tangenten an die Contour der Umdrehungsfläche und zwar in den Punkten c und d, welche die perspectivischen Bilder von den Berührungspunkten der Sehstrahlen Ac und Ad mit der Umdrehungsfläche und dem Kegel oder Cylinder vorstellen.

Die Punkte der perspectivischen Contour einer allgemeinen Rotationsfläche und die zugehörigen Tangenten können also direct, einfach und genau bestimmt werden, wenn die Rotationsfläche als Umhüllungsfläche von Rotationskegeln, beziehungsweise von Rotationscylindern behandelt wird. Man hat nämlich (nach den im Vorhergehenden angegebenen Verfahren) die Contouren von entsprechend vielen, von der Rotationsfläche umhüllten Kegeln und Cylindern und ihre Berührungspunkte mit den zugehörigen Parallelkreisen zu construiren.

Das bisher allgemein angewandte Verfahren, die Contouren von Rotationsflächen dadurch zu bestimmen, dass zuerst die perspectivischen Bilder von entsprechend vielen Parallelkreisen der darzustellenden Rotationsfläche gezeichnet und dann an diese perspectivischen Bilder gemeinschaftlich berührende Curven gezogen werden, sollte nur dann zur Anwendung kommen, wenn es sich um keine genaue Darstellung des Objectes handelt, oder wenn die Rotationsaxe senkrecht zur Bildfläche ist, weil in diesem Falle die Parallelkreise wieder als Kreise erscheinen.

In den folgenden Beispielen werden die Contouren von Rotationsflächen nach den oben angegebenen Verfahren direct construirt.

38. (Taf. III, Fig. 19.) Die Axe ig und der Meridian $iaceg$ der Rotationsfläche $acegkt$ liegen in der Bildfläche.

Die zu ig senkrechte Ebene $A\Omega z$ schneidet die Bildfläche in der Geraden $\Omega\alpha$ ($\perp ig$) und die Umdrehungsfläche in dem Kreise amb, dessen Durchmesser ab in $\Omega\alpha$ liegt. Die Tangente as im Punkte a des Meridianes iag schneidet die Axe ig in s. Der Kegel sab I, dessen Spitze s ist, berührt die Umdrehungsfläche in dem Kreise abm. Die Ebenen, welche durch A berührend an den Kegel sa I b gelegt werden können, schneiden die Basisebene ab I ($A\Omega\alpha$) in den Geraden A I, A II, welche Tangenten an die Basis ab I sind und die Bildfläche in den Punkten I und II der fraglichen Contour treffen. Um diese Punkte I und II zu finden, lege man das Auge A und die Basis a I b um $\Omega\alpha$ in die Bildfläche, also A nach D ($\Omega D \| ig$) und ab I nach ab 1, und ziehe an ab 1 die Tangenten D1I und D2II bis $\Omega\alpha$ in I und II getroffen wird. s I und s II sind Tangenten in I und II an die Contour I q...II der Rotationsfläche.

Die zur Axe ig senkrechte Gerade em_2 bildet den Halbmesser des Parallelkreises em_2 V. Die Tangente es_2 an den Meridian $iaceg$ trifft die ig in s_2 und die $\Omega\alpha$ in α. Der Kegel s_2 em_2 V berührt die Umdrehungsfläche in dem Kreise em_2 V und schneidet die Ebene $A\Omega\alpha$ in dem Kreise K, dessen Halbmesser αm ist. Die berührenden Ebenen AVs_2, $AVIs_2$ des Kegels s_2 em_2 V schneiden die Ebene $A\Omega\alpha$ in den Geraden $A\beta$, $A\gamma$ und die Ebene des Kreises em_2V in den Geraden β_1V und γ_1VI. Es ist β_1V $\| A\beta$ und γ_1VI $\| A\gamma$. $A\beta$ und $A\gamma$ sind Tangenten an den Kreis K und β_1V, γ_1VI sind Tangenten an den Kreis em_2V.

Man lege A und den Kreis K um $\Omega\alpha$, den Kreis em_2V um em_2 in die Bildfläche, also A nach D; K nach αm(5) und em_2V nach $em_2$5 und ziehe die Tangenten $5\beta_1 \| D(5)$; $6\gamma_1 \| D(6)$. Dann verbinde man β_1 und γ_1 mit s_2 und verlängere D5V bis V und D6VI bis VI, so sind V und VI die in dem Parallelkreise em_2V befindlichen Punkte der Contour der Rotationsfläche und β_1Vs_2 und γ_1VIs_2 die zugehörigen Tangenten. Auch kann man 55″ und 66″ $\perp em_2$ und dann Ω5″V und Ω6″VI ziehen.

Das zur Bestimmung der Punkte V und VI durchgeführte Verfahren kommt vorzugsweise dann zur Anwendung, wenn die Kegelspitze s_2 oder der Punkt σ_2 ausserhalb der Zeichnungsfläche fällt. Im vorliegenden Falle ist es aber zweckmässiger, die Punkte V und VI nach dem in 22 angegebenen Verfahren zu construiren. $s_2\Omega$ und em_2 schneiden sich in v. $v\sigma_2$($\| \Omega D$) trifft die Ds_2 in σ_2.

Die Ebene *Aig* theilt die Berührungslinie des Sehkegels mit der Umdrehungsfläche in zwei symmetrische Hälften und die Gerade *ig* bildet wieder die Symmetrielinie für die Contour.

Je zwei Punkte, wie z. B. V und VI liegen in einer zu der Ebene *Aig* senkrechten Geraden, welche in *F* verschwindet und haben von dieser Ebene *Aig* gleiche Abstände. Der Durchschnittspunkt m_4 der *ig* mit V VI halbirt die Gerade V VI. Ist also V bestimmt, so lässt sich VI auch auf folgende Weise einfach bestimmen. Man ziehe $DF \perp Dm$ bis $\Omega\alpha$ in *F* getroffen wird und verbinde V mit *F* und *m*. V*m* und em_2 treffen sich in φ. Mache $m_2\psi = m_2\varphi$ und ziehe $m\psi$VI bis zum Durchschnitte VI mit V*F*. Die Theilungslinien *m*V, mm_4, *m*VI schneiden die Geraden $\varphi\psi$ und V VI und haben ihren Fluchtpunkt in *m*; sie sind also perspectivisch parallel. Ferner ist $\varphi m_2 = \psi m_2$, folglich ergibt sich auch $Vm_4 = m_4VI$.

Nun ist man im Stande, die Gerade V VI perspectivisch parallel zu DF ($\perp Dm$) auch ohne Benützung von *F* zu ziehen, wesshalb das angegebene Verfahren auch dann zur Anwendung kommen kann, wenn *F* ausserhalb der Zeichnungsfläche liegt.

Es sei $DG \perp Dm$. Man ziehe $GE \| \Omega D$; $GJ \| DV$ und $EJ \| \Omega V$, so schneiden sich *GJ* und *EJ* in dem Punkte *J* der Geraden V VI*F*.

Man kann also die Punkte der einen Hälfte *K* I III V *q* der Contour auf die bei Bestimmung von V angewandte Weise construiren und die Punkte der anderen Hälfte *k*...II IV VI *q* mittelst der Punkte I, III, V...so darstellen, wie zuvor VI mittelst V bestimmt wurde.

Um die Punkte der zweiten Contourhälfte ohne Benützung des Cirkels bestimmen zu können, construire man zwei beliebige, mit Rücksicht auf die Ebene *Aig* symmetrisch gelegene Punkte *P* und P_1 und ziehe z. B. *P*IX bis *ig* in *U* geschnitten wird und dann UP_1, welche IX*F* in dem fraglichen Punkte X trifft.

Noch schneller und genauer lassen sich die Punkte der zweiten Contourhälfte construiren, wenn man ausser *P* und P_1 noch zwei andere gegen die Ebene *Aig* symmetrisch liegende Punkte *Q* und Q_1 bestimmt und dieselben so wie zuvor *P* und P_1 benützt. Man ziehe z. B. *Q*IX bis *ig* in *R* getroffen wird und verbinde *R* mit Q_1, so schneiden sich die Geraden P_1U und Q_1R in dem Punkte X u. s. w.

Dieses letzte Verfahren ist besonders dann vortheilhaft, wenn der Fluchtpunkt *F* von den zu *Aig* senkrechten Geraden nicht benützt werden kann.

Der Einfachheit halber wurden $PQ \| P_1Q_1 \| ig$ gezogen. $P_1Z(\| \Omega m)$ und ig schneiden sich in T. — $TZ = TP_1$. mZP trifft die Gerade FP_1P in P.

Die mit ig parallele Gerade yc berührt den Meridian im Punkte c, durch welchen der grösste Parallelkreis cm_1d geht. Um die in dem Kreise cm_1d befindlichen Punkte III IV der Contour zu finden, betrachte man cm_1d als Berührungslinie der Umdrehungsfläche mit dem zu ig parallelen Cylinder und lege an diesen durch A berührende Ebenen, welche die Ebene cd III in den Geraden σ III und σ IV sowie die Bildfläche in mit ig parallelen Geraden III 3_1 und IV 4_1 schneiden. III und IV sind die Durchschnittspunkte der Geraden σ III und σ IV mit der Bildfläche und σ ist der Durchschnittspunkt der mit ig parallelen Geraden $A\sigma$ mit der Ebene des Kreises cm_1d. Die Geraden Am und σm_1 sind parallel. Man lege nun den Punkt σ und den Kreis cm_1d um cd in die Bildfläche; σ fällt nach σ_1 in die Gerade ΩD und zwar ist $\sigma_1 m_1 \| Dm$, also $D\sigma_1 = mm_1$ und der Kreis cm_1d kommt nach $c3d$, in welcher Lage er in wahrer Grösse erscheint.

Man ziehe die den Kreis $c3d$ in 3 und 4 berührenden Geraden $\sigma_1 3_1$ und $\sigma_1 4_1$ bis cd in 3_1 und 4_1 getroffen wird, dann 3_1III $\| 4_1$IV $\| ig$ und $D3$ III, $D4$ IV. 3_1III und 4_1IV berühren die Contour kh I III...q in den Punkten III und IV.

Die in der Rotationsaxe ig befindlichen Punkte k und q der Contour sind Durchschnitte der Sehstrahlen Ak und Aq mit der Bildfläche. Ak und Aq sind Tangenten an den in der Ebene Aig befindlichen Meridian M. Legt man M und das Auge A um ig in die Bildfläche, so fällt M mit dem Hauptmeridiane $iaceg$...zusammen und A kommt nach C ($mC = mD$) zu liegen. Die Tangenten Ck und Cq an den Meridian $ace...g$ treffen die Axe ig in den Punkten k und q. — Die zu der Ebene Aig senkrechten Geraden Fk und Fq sind Tangenten in den Punkten k und q an die Contour der Fläche.

Die Tangente tu in dem tiefsten Punkte t der Contour ist parallel zu Ωz. Die Ebene Atu berührt die Rotationsfläche in dem Punkte t, welcher zugleich in der Ebene Atu, also auch in der zur Bildfläche senkrechten Meridianebene tig liegt. Die Durchschnittslinie Bu der Ebenen Aut und igt berührt also in dem Punkte t den zur Bildfläche senkrechten Meridian. Die mit tu parallele AB trifft die Bu in dem Punkte B, welcher von ig den Abstand ΩD hat.

Legt man den Meridian *igt* und den Punkt *B* um *ig* in die Bildfläche, so fällt *igt* mit dem Hauptmeridiane *iac*..*eg* zusammen und *B* kommt in die Gerade Ωz nach B_1 zu liegen, wo $mB_1 = \Omega D$ ist. Nun ziehe man B_1t_1u berührend an den Meridian *aceg* und $t_1m_1 \perp ig$ bis *ig* in t'' getroffen wird, so ist *u* ein Punkt der Tangente *ut* und t'' die orthogonale Projection von *t*. Endlich ziehe man $ut \| \Omega z$ und $\Omega t''t$, so ist *t* der tiefste Punkt der Contour und *tu* die entsprechende Tangente.

Der höchste Punkt *h* der Contour lässt sich auf ähnliche Weise bestimmen. Man ziehe B_1h_1l berührend an *aceg*, durch den Berührungspunkt h_1 die Gerade $h_1h'' \perp ig$, bis zum Durchschnitte h'' mit mm_1, durch den Begegnungspunkt *l* von B_1h_1l und *ig*, die Gerade $lh \perp ig$ und endlich $\Omega h''h$.

Liegt Ω ausserhalb des Meridianes *aceg*, so kann man durch Ω Tangenten an den Meridian ziehen, deren Berührungspunkte zugleich der Contour der Fläche angehören. Diese Punkte sind die Bilder der Berührungspunkte der Umdrehungsfläche mit den durch das Auge *A* senkrecht zur Bildfläche gelegten Ebenen; die zugehörigen Tangenten sind aber die Tracen der genannten Ebenen.

39. Die Rotationsaxe *og* (Taf. III, Fig. 20) der Fläche *ohctdb* steht senkrecht zur Bildfläche. Ω ist der Fluchtpunkt von *og*.

Die Perspectiven der Parallelkreise erscheinen hier als Kreise, weil ihre Ebenen parallel zur Bildfläche sind.

In diesem Falle ist es am bequemsten, zuerst die Hälfte *oaceg* des Meridianes zu zeichnen, dessen Ebene die Parallelkreise in Geraden schneidet, welche zu *og* geometrisch senkrechte Durchmesser der Parallelkreise bilden. Dann ziehe man eine Reihe von Parallelkreisen und bestimme ihre Berührungspunkte mit der fraglichen Contour.

Man beschreibe also über der zu *og* senkrechten Sehne *amb* des Meridianes *oaceg* als Durchmesser den Parallelkreis *ab* I II und betrachte ihn als Berührungslinie der Umdrehungsfläche *hctd* mit dem Kegel *sabm*, dessen Erzeugende *as* den Meridian in *a* berührt und dessen Spitze *s* in *og* liegt. Dann ziehe man die Tangenten *s*I und *s*II an den Kreis *ab* I II und bestimme ihre Berührungspunkte I und II, welche zugleich der fraglichen Contour angehören. *s*I und *s*II sind zugleich Tangenten an die Contour der Umdrehungsfläche. — Dieses Verfahren ist entsprechend oft zu wiederholen.

Der perspectivisch grösste Parallelkreis ist cm_1d. Die Endpunkte c und d der zu og senkrechten Sehne cd liegen zugleich in der Contour der Umdrehungsfläche. Die den Punkten c, d entsprechenden Tangenten sind mit mm_1 geometrisch parallel und stellen die Contouren eines die Rotationsfläche umhüllenden Kegels s_xcmd vor, dessen Spitze s_x den Abstand ΩD von der Bildfläche hat.

Die in der Geraden og befindlichen Punkte h, t ergeben sich ebenfalls einfach. h und t sind nämlich Berührungspunkte von den Sehstrahlen Ah und At an den Meridian M, dessen Ebene Aog ist. Es sei o der Durchschnittspunkt der og mit der Bildfläche, also $oN \perp og$ die Trace von $oaceg$.

Durch Drehung des Meridianes M und der Geraden $A\Omega$ um og in die Ebene des Meridianes $oaceg$ kommt M nach $oaceg$, Ω nach N ($oN = o\Omega$) und $A\Omega$ nach ΩN zu liegen, weil $A\Omega \parallel mm_1$, also auch ΩN (perspectivisch) parallel og ist. Das perspectivische Bild A_1 von A (nach der Drehung) liegt also in der Geraden ΩN, weil aber A_1 denselben Abstand von der Bildfläche hat, wie A, so liegt A_1 in unendlicher Entfernung von N. Man ziehe also an den Meridian $oaceg$ die Tangenten A_1h_1h und $A_1t_1t \parallel N\Omega$, bis og in h und t geschnitten wird.

Es kann ein beliebiger Punkt als Durchschnitt der og mit der Bildfläche angenommen werden, so ergeben sich immer h_1h und t_1t unter 45° gegen og geneigt; mithin ist es nicht nothwendig, den genannten Durchschnittspunkt o anzugeben. Da hier nur die Hälfte des Meridianes oag dargestellt ist, so wurde zur Bestimmung von t die Tangente t_1t benützt, welche mit og ebenfalls den Winkel $t_1tg = 45^\circ$ einschliesst.

Die Contour ist mit Bezug auf die Axe ht symmetrisch, und können die Punkte der andern Hälfte einfach durch Übertragen bestimmt werden.

40. Auch die folgenden Verfahren lassen sich zur Bestimmung der Contouren von Rotationsflächen mit Vortheil verwenden.

v (Taf. III, Fig. 21) ist der Durchschnittspunkt der Rotationsaxe av mit der Bildfläche. Der Meridian der Umdrehungsfläche ist die Curve $aecfd$.

Man projicire die Rotationsfläche sammt dem Auge A orthogonal auf die Bildfläche und auf die Ebene Aav (oder auf eine zu Aav parallele Ebene) und lege die letztere Projection um die Verticaltrace Ωv von Aav in die Zeichnungsfläche nach $a'e'c'f'd'$. Dann

betrachte man $a'e'c'f'd'$ als horizontale und $cdTU$ als verticale Projection der Rotationsfläche, sowie ΩvS als Projectionsaxe und suche den Durchschnitt $YJRTdUK$ des die Rotationsfläche umhüllenden Kegels $Ayut$, dessen Spitze das Auge A ist, mit der verticalen Projectionsebene.

Die äusserste Kante Ay des umhüllenden Kegels berührt die Umdrehungsfläche in y und trifft die Bildfläche in Y.

Um beliebige Punkte der Contour zu finden, ziehe man etwa $e'n'f' \perp a'v$ als horizontale Projection des Parallelkreises enf, dessen Mittelpunkt n ist, bestimme die Durchschnitte N und F der Sehstrahlen An und Af mit der Bildfläche und beschreibe aus N den Kreis $NFKJ$ als das perspectivische Bild von enf. Der Kreis $FNKJ$ berührt die fragliche Contour $YRTdK$.

Der Kegel $senf$, welcher die Rotationsfläche in dem Parallelkreise enf berührt, hat seine Spitze in s. Die perspectivischen Contouren SJ und SK des Kegels $senf$ berühren den Kreis FNK und die Contour YJR in J und K.

Man ziehe an $c'e'a'f'd'$ die Tangente $f's'$, ferner $Ds'S$ und an den Kreis JFK die Tangenten SJ und SK, welche denselben und die Contour $YRdU$ in J und K berühren. Durch Wiederholen dieses Verfahrens bei mehreren Parallelkreisen kann man eine beliebige Reihe von solchen, die Contour berührenden Kreisen und Geraden nebst den Berührungspunkten bestimmen und dann die Contour selbst leicht ziehen.

Oder: Man beschreibe etwa aus m in av eine Kugel $mefi$, welche die Rotationsfläche in dem Parallelkreise eif berührt, dessen Mittelpunkt n ist. Der die Kugel $mefi$ berührende Kegel $Aigh$, dessen Spitze A ist, hat mit der Kugel $mefi$ den Kreis igh gemeinschaftlich. Die beiden Kreise ief und igh schneiden sich in den Punkten i und k. Die horizontalen Projectionen der beiden Kreise erscheinen als die Geraden $i'e'f' (\| \Omega v)$ und $i'g'h' (\perp Dm')$, welche sich in i', k' schneiden. Dg' und Dh' sind Tangenten an die Horizontalcontour $e'f'h'$ der Kugel $mefi$. $e'f'h'$ und $ca'd$ berühren sich in e' und f'. Die Geraden DiJ und DkK berühren die Rotationsfläche in i und k und treffen die Bildfläche in J und K. Bestimmt man überdies den Punkt N und zieht $SJ \perp NJ$ und $SK \perp NK$, so sind SJ und SK Tangenten an die Contour. Durch Wiederholen dieses Verfahrens kann man beliebig viele Punkte der Berührungscurve $yqrtu$ und der Contour $YJRdK$ bestimmen.

41. Die Rotationsaxe *ov* (Taf. III, Fig. 22) ist gegen die Bildfläche geneigt; *F* ist ihr Fluchtpunkt. Auch in diesem Falle ist es zweckmässig, zuerst den Meridian *acvd* der Fläche darzustellen, dessen Ebene die Ebenen der Parallelkreise in zur Bildfläche parallelen Geraden schneidet, deren perspectivischen Bilder also zu ΩF geometrisch senkrecht stehen.

Man ziehe $\Omega D \perp \omega\Omega F$, $Dw \perp DF$, $\omega\mu \perp \omega F$, $\omega\Delta = \omega D$. $\omega\mu$ ist die Fluchtlinie für die Ebenen der Parallelkreise.

Die zu $w\mu$ parallele Gerade *ab* ist der zur Bildfläche parallele Durchmesser und *m* der Mittelpunkt des Parallelkreises *amb* I II. Der Kegel *sab* I, welcher die Umdrehungsfläche in dem Kreise *ab* I berührt, hat die Spitze *s*; *sa* ist also die Tangente in *a* an den Meridian *acvd*. Die Contourkanten *se* und *sf* des Kegels *samb*, so wie die in der Basis *amb* befindlichen Punkte I und II von *se* und *sf* lassen sich nach dem in 27 angegebenen Verfahren construiren. Da aber *abcd* und $\alpha\mu\beta$ nicht auf demselben Netze des Kegels *sabcd* liegen, so ist $2f \parallel \Delta\gamma$ und $1e \parallel \Delta\varepsilon$ zu ziehen u. s. w. *s*I *e* und *sf*II sind Tangenten in I und II an die Contour.

Auf gleiche Weise können beliebig viele Punkte der Contour construirt werden. Zuweilen aber ist es zweckmässiger, einzelne Punkte der Contour auf andere Weise zu construiren.

Die von *ov* entferntesten Punkte III und IV der Contour liegen in dem Parallelkreise cm_1d III IV. *c* und *d* sind die von *ov* entferntesten Punkte des Meridianes *acevd* und *cd* ($\perp \Omega F$) ist der zur Bildfläche parallele Durchmesser des Kreises cm_1d III IV. Der Kegel, welcher die Umdrehungsfläche in dem Kreise *cmd* III berührt, hat die Spitze in der Axe *mF* und zwar in dem Abstande ΩD von der Bildfläche. Das perspectivische Bild der Spitze liegt in *mF*, aber in unendlicher Entfernung von m_1. Die Contouren dieses Kegels sind desshalb geometrisch parallel mit *ov*, und der Durchschnitt des Kegels mit der Ebene $A\omega\mu$ ist ein Kreis, dessen zur Bildfläche parallele Durchmesser $\gamma\delta = cd$ ist.

Man drehe den Kreis $\gamma\mu\delta$ nach $\gamma\psi\delta$ und cm_1d nach *c*4*d*, ziehe an $\gamma\psi\delta k$ die Tangenten $\Delta\psi$, Δk und an *c*34*d* die Tangenten $3l \parallel \Delta\psi$ und $4i \parallel \Delta k$, welche beide den Kreis *cd*4 in 3 und 4 berühren und *cd* in *l* und *i* treffen. Durch *l* und *i* ziehe man die Geraden *l*III$\parallel$*i*IV$\parallel ov$, ferner ΔIII 3 und Δ 4IV. *l*III und *i*IV berühren die Contour *o*I*gt* in den Punkten III und IV.

Die in $\omega\mu$ erscheinenden Punkte o und g der Contour sind die perspectivischen Bilder von den Berührungspunkten des in der Ebene Aov befindlichen Meridianes M mit den Sehstrahlen Ao und Ag. Dreht man den Meridian M und den Punkt A um ov in die Ebene des Meridianes $ac..vd$, so kommt M nach $acvd$ zu liegen und das perspectivische Bild A_1 von A fällt in die Fluchtlinie $\omega\mu$ und zwar ist der Abstand μA_1 gleich der Entfernung des Auges A von der Axe ov. Die Sehstrahlen Av und Ag erscheinen nach der Drehung als Tangenten A_1o und A_1g an den Meridian $acvd$, in welcher Lage sie ov ebenfalls in o und g treffen.

Ist etwa v der Durchschnittspunkt der Axe ov mit der Bildfläche, so lege man FA um Fv in die Bildebene nach $F\Delta_1$ ($x\Omega\Delta_1 \perp \mu F$; $\Omega D_1 \parallel \mu F$; $\Omega D_1 = \Omega D$, $x\Delta_1 = xD_1$) und errichte $vq \perp F\Delta_1$, so ist vq gleich dem Abstande des Auges A von ov. Ferner mache man das Stück $vq_1 (\parallel \omega\mu) = vq$, ziehe Fq_1A_1 und an den Meridian $acvd$ die Tangenten A_1o und A_1g bis sie ov in den fraglichen Punkten o und g schneiden.

Schneller und genauer ergibt sich A_1, wenn $\mu A_1 = \mu\Delta_1$ gemacht wird.

Die Tangenten ρo und ρg in den Punkten o und g der Contour oIII gIV p sind die Tracen von den Ebenen $A\rho o$ und $A\rho g$, welche auf der Ebene Aov senkrecht stehen. ρ ist nämlich der Fluchtpunkt von Perpendikeln zu der Ebene Aov und desshalb $\rho D_1 \perp D_1x$.

Die durch ω gezogenen Tangenten ωp und ωVII des Meridianes $acvd$ berühren in denselben Punkten p und VII die Contour $olgt$ und bilden die Tracen von den auf der Ebene $acvd$ senkrechten, die Rotationsfläche in den Punkten p und VII berührenden Ebenen $A\omega p$ und $A\omega$VII.

Um den tiefsten Punkt t der Contour zu finden, mache man $\mu\sigma$ (in $\omega\mu$) $= \omega\Delta$, ziehe an den Meridian $acvd$ die Tangente σs_3, welche den Meridian in r berührt und die Axe ov in s_3 schneidet. Dann ziehe man die Geraden s_3t und $rm_3 \parallel \omega\mu$ so wie ωm_3t bis s_3t in t getroffen wird.

Der Kegel s_3rm_3t berührt nämlich die Umdrehungsfläche in dem Kreise rm_3t, dessen zur Bildfläche parallele Halbmesser rm_3 ist und schneidet die Ebene $A\omega\mu$ in einem Kreise $\mu\sigma\ldots$, dessen Halbmesser $\mu\sigma = \omega\Delta$ ist. Die an diesen Kreis $\mu\sigma$. . gezogene Tangente

ΔZ ist parallel zu $\omega\mu$, folglich muss auch die an den Parallelkreis rm_3t gezogene Tangente $s_3t \parallel \omega\mu$ sein.

Der höchste Punkt h der Contour ergibt sich auf ähnliche Weise vermittelst der zweiten Tangente σs_3, die durch σ an den Meridian $acvd$ gezogen werden kann.

Die Berührungslinie B des Sehkegels mit der Umdrehungsfläche ist symmetrisch mit Bezug auf die Ebene Aov. ov bildet wieder die Symmetrielinie für die Contour $oh..t$ VI.

Die Geraden I II, III IV, V VI, VII t stehen perspectivisch senkrecht zu $g\mu$ und verschwinden in ρ.

Man braucht demnach nur die eine Hälfte auf die besprochene Weise zu construiren und kann dann die andere Hälfte durch Übertragen der Punkte der ersten Hälfte bestimmen.

Ist z. B. III auf die oben angegebene Weise construirt worden, so ziehe man ρ III IV, ferner III $yu \parallel \omega\mu$, welche ov in y schneidet, mache $yu = y$III und ziehe μu IV bis ρ III IV in IV getroffen wird.

Aber auch das Übertragen der Punkte mittelst des Cirkels lässt sich ersparen, wenn man zwei beliebige, mit Rücksicht auf ov symmetrisch gelegene Punkte P und P_1 bestimmt und dieselben in folgender Weise benützt. Man ziehe z. B. durch den Punkt III die Geraden PIIIR und dann P_1R, welche die Gerade ρ III IV in dem Contourpunkte IV schneidet.

Liegt ρ ausserhalb der Zeichnungsfläche und lassen sich die zu ov senkrechten Geraden I II, III IV u. s. w. nicht einfach darstellen, so bestimme man in der Ebene $acvd$ noch zwei andere zu ov symmetrisch gelegene Punkte Q und Q_1 und benütze sie eben so wie P und P_1. Die Geraden PP_1 und OQ_1 verschwinden in ρ. Die Geraden PQ_1 und P_1Q schneiden sich in dem Punkte W und PQ, P_1Q_1 in X. Die Punkte W, X liegen in der Geraden ov.

Am einfachsten ergeben sich die Hilfspunkte P, Q, P_1 und Q_1, wenn die Geraden P_1Q_1 und PQ durch μ gezogen werden. Man wähle in der beliebigen Geraden $P_1Q_1\mu$ die Punkte P_1 und Q_1 und ziehe die Geraden $P_1\rho$ und $Q_1\rho$ sowie die Gerade $P_1TV \parallel \omega\mu$, welche letztere die μF in T schneidet. Dann mache man das Stück $TV = TP_1$ und ziehe die Gerade $V\mu$, welche $P_1\rho$ in P und $Q_1\rho$ in Q trifft.

Man ziehe QIII U bis U in ov und dann Q_1U, welche Gerade sofort die P_1R in dem Punkte IV schneidet. Es ist also nicht nothwendig die Gerade III IV zu ziehen u. s. w.

Die Tangenten in symmetrisch gelegenen Punkten der Contour treffen sich in der Geraden *ov*. Zieht man nämlich die Tangente III*z* bis sie *ov* in *z* trifft und verbindet *z* mit IV, so ist *z*IV Tangente im Punkte IV an die Contour *acgd*. [1])

42. In Taf. IV, Fig. 23 ist *F* der Fluchtpunkt und *a* der Durchschnittspunkt der Axe *abF* der Rotationsfläche *tpqu* mit der Bildfläche. $\omega_1 f$ ist die Fluchtlinie der Parallelkreise. $\omega_1 f \parallel \Omega D_1 \perp \omega_1 \Omega F$; $D_1\omega_1 \perp D_1 F$. φ ist der Fluchtpunkt und *T* ein Theilungspunkt von den zu der Ebene *Aab* senkrechten Geraden. $\omega\Omega\varphi \perp Fabf$; $\Omega D \parallel Ff$; $D\varphi \perp D\omega$; $\varphi T = \varphi D$.

Man lege das Auge *A* und die Axe *ab* um *Ff* in die Bildfläche nach Δ ($\omega\Delta = \omega D$) und $ab_1 \parallel \Delta F$, und ziehe dort den gegebenen Meridian $v_1\alpha_1 u_1 t_1 x_1$ der Rotationsfläche.

Dann construire man die Berührungslinie $u_1 1 2 \ldots 8 9$ des die Rotationsfläche $ab_1 v_1 \alpha_1 t_1 x_1$ umhüllenden Kegels, dessen Spitze das umgelegte Auge Δ ist und führe dieselbe wieder in die ursprüngliche Lage zurück, d. h. man drehe die Berührungslinie um *Ff* und den Winkel $A\omega\Delta$ nach entgegengesetzter Richtung ΔA.

Die Punkte der Berührunglinie $u_1 1 2 \ldots 8 9$ ergeben sich am einfachsten, wenn die Rotationsfläche $ab_1 u_1 \ldots t_1 x_1$ als Umhüllungsfläche von Kugeln behandelt wird, wenn also auf einer Reihe von umhüllenden Kugeln die Berührungspunkte von Ebenen construirt werden, welche tangirend an die Rotationsfläche durch den Punkt Δ gelegt werden können.

Der aus dem Punkte o_1 der Axe ab_1 gezogene Kreis $i_1 o_1 l_1$ berührt den Meridian $v_1\alpha_1 u_1$ in den Punkten i_1, l_1 und die aus o_1 gezogene Kugel $o_1 l_1 1 2$ berührt die Rotationsfläche $ab_1 v_1 \alpha_1 u_1$ in dem Parallelkreise $i_1 1 2 l_1$. Die Geraden Δk_1 und Δn_1 berühren den Kreis $o_1 i_1 l_1$ in den Punkten k_1 und n_1 und der die Kugel $o_1 i_1 1 2 l_1$ umhüllende Kegel $\Delta k_1 1 2 n_1$ berührt dieselbe in dem Kreise $k_1 1 2 n_1$. Die orthogonalen Projectionen der beiden Kreise $i_1 1 2 l_1$ und $k_1 1 2 n_1$ erscheinen als die Geraden $i_1 l_1$ und $k_1 n_1$, die sich in dem Punkte 1 (c_1, 2) schneiden und daher sind 1, 2 die orthogonalen Projectio-

[1]) Es bedarf wohl kaum einer besonderen Erwähnung, dass dieses abgekürzte Verfahren auch bei der Construction der Spiegelbilder von ebenen Figuren mit Vortheil angewendet werden kann. Dabei sind *P*, *Q* in der Ebene *E* des beobachteten Objectes, mithin P_1, Q_1 in dem Spiegelbilde E_1 von *E* anzunehmen und ist die Durchschnittslinie von *E* und E_1 so wie hier *ov* zu benützen.

nen der Durchschnittspunkte der beiden Kreise. Der Mittelpunkt c_1 der zu der Ebene Δab_1 (Zeichnungsfläche) senkrechten Geraden 12 liegt in der Ebene Δab_1.

Auf dieselbe Weise wurden die übrigen Punkte der Berührungslinie $u_1 1\,2\,..\,8\,9$ construirt. u_1 und 9 sind Berührungspunkte der durch Δ an den Meridian $v_1\alpha_1 u_1 x_1$ gezogenen Tangenten $\Delta 9$ und Δu_1.

Die Drehung von 1 und 2 nach I, II, d. i. um Ff und den Winkel $\Delta\omega A$ lässt sich leicht ausführen, wenn berücksichtiget wird, dass die Perspective c von c_1 im Durchschnitte von den Geraden $\Delta c_1 c$ und Ff liegt und dass die Gerade I II senkrecht auf der Ebene AFf steht und desshalb in φ verschwindet. Die orthogonale Projection $1''\,2''$ von I II geht durch c_1 und erscheint senkrecht auf Ff. — cI und cII sind perspectivisch $= c_1 1 = c_1 2$.

Man ziehe also $\Delta c_1 c$, φIc II, $c\dot{c}T$ und $c_1\dot{c}\dot{2} \perp Ff$, mache $c_1(1) \perp i_1 l_1$; $m_1(1) = m_1 i_1$; $\dot{c}\,\dot{1} = \dot{c}\,\dot{2} = c_1(1)$ und verlängere die Geraden $T\dot{1}$I und $T\dot{2}$II bis die Gerade I II in I und II getroffen wird.

Um den Punkt s_I zu erhalten, durch welchen die Tangenten s_1I und s_1II der fraglichen Contour gehen, ist zuerst die Tangente $i_1 s_1$ an den Meridian $v_1\alpha_1 u_1$ bis zum Durchschnitte s_1 mit der Axe ab_1 und dann die Gerade Δs_1 bis zum Durchschnitte s_1 mit der Axe ab zu ziehen. s_1 stellt die Spitze des die Rotationsfläche $ab_1 v_1 u_1$ in dem Kreise $i_1 1\,2\,l_1$ berührenden Kegels $s_1 i_1 1\,2\,l_1$ und s_I die Spitze des die Rotationsfläche $abpqu$ in dem Kreise I cII berührenden Kegels s_IIII c vor. s_1I und s_1II sind die Contouren des Kegels s_1III c und zugleich Tangenten der Contour I II III IV . . . der Rotationsfläche.

Fällt s_I ausserhalb der Zeichnungsfläche, so können die Punkte (I) und (II) der Tangenten I (I) und II (II) auf dieselbe Art wie I und II construirt werden. Man ziehe $(o_1)\,(i_1) \perp ab_1$ und bestimme (c_1) so, dass $(o_1)\,(c_1) : (c_1)\,(i_1) = m_1 c_1 : c_1 i_1$. Die Gerade $c_1\,(c_1)$ geht durch den Punkt s_1 und 1 (1), 2 (2) sind die Berührungskanten des Kegels $s_1 i_1 1\,2\,l_1$ mit den durch Δ gelegten Ebenen. (c_1) ist der Mittelpunkt von der Geraden (1) (2). (c) ist die Perspective von (c_1). Die Gerade φ (I) (c) (II) ist die Perspective und $(\dot{1})\,(\dot{c})\,(c_1)\,(\dot{2})$ $(\perp ab)$ die orthogonale Projection von der gedrehten Geraden (1) (2). Wird also $T\,(c)\,(\dot{c})$ gezogen, $(\dot{c})\,(\dot{1}) = (\dot{c})\,(\dot{2}) = (c_1)\,(1_x)$ gemacht und $T\,(\dot{1})$ so wie $T\,(\dot{2})$ mit (I) (II) zum Durchschnitte gebracht, so sind (I), (II) die um Ff und den Winkel $A\omega\Delta$ ge-

drehten Punkte (1), (2) und I (I), II (II) Tangenten in den Punkten I und II der Contour. $(c_1)(1_x) \perp (i_1)(o_1)$; $(o_1)(1_x) = (o_1)(i_1)$.

Auf diese Weise kann eine beliebige Anzahl von Punkten und Tangenten der fraglichen Contour dargestellt werden.

Überdies sollen noch die wesentlichen Punkte III, IV, V, VI, *u*, *t*, *x*, IX, *v*, VII, VIII, *p* und *q* construirt werden.

III, IV, V und VI sind Berührungspunkte der Contour mit zu *ab* geometrisch parallelen Geraden. Die Spitzen s_{III} und s_v der die Rotationsfläche *pq* I *u* II in den Kreisen III *d* IV und V *ω* VI berührenden Kegeln liegen in unendlicher Entfernung und desshalb muss $\Delta s_3 s_5 \parallel Ff$ sein.

Die beiden Punkte s_3 und s_5 liegen im Durchschnitte der ab_1 mit der zu *Ff* parallelen Geraden Δs_3.

Die Tangente $s_3\alpha_1$ berührt den Meridian $v_1\alpha_1u_1$ in α_1 und der Kegel $s_3\alpha_1\beta_1$ berührt die Rotationsfläche $ab_1u_1v_1$ . . in dem Parallelkreise $\alpha_1 3\,4\,\beta_1$, welcher die Berührungslinie $u_1 1\,2\,..\,8\,9$ in den Punkten 3 und 4 schneidet. $\alpha_1\beta_1 \perp ab_1$. d_1 ist der Mittelpunkt von 3 4. Man ziehe aus m_3 den Kreisbogen α_1 (3) und die Gerade 3 (3) $\perp \alpha_1\beta_1$, so ist 3 (3) $= 3d_1 = d_1 4$.

Ferner ziehe man die Geraden $\Delta d_1 d$, φ III *d* IV; $\dot{3}d_1\dot{4} \perp Ff$ und $dd\dot{T}$, mache $d\dot{3} = d\dot{4} = 3$ (3) und verlängere die Geraden $T\dot{3}$III und $T\dot{4}$IV bis III IV in III und IV geschnitten wird. Die Tangenten in den Punkten III und IV sind geometrisch parallel mit *ab*.

Eben so können die Punkte V und VI construirt werden. Die diesen Punkten entsprechenden Tangenten sind ebenfalls geometrisch parallel mit *ab*. — V, VI fallen zufällig in die Gerade $\Omega\omega$.

Der in der Geraden *Ff* befindliche Punkt *u* ergibt sich im Durchschnitte von *Ff* mit der Tangente $\Delta u_1 u$ an den Meridian $v_1\alpha_1u_1$. Die Tangente φu an die Contour ist die Trace der auf der Ebene *Aab* senkrechten Berührungsebene $Au\varphi$ der Rotationsfläche. Diese Ebene $Au\varphi$ berührt den in der Ebene *Aab* befindlichen Meridian, dessen Perspective die Gerade *ab* ist.

Die Rückkehrpunkte VII und VIII der Contour sind die Perspectiven der Berührungspunkte 7 und 8 der Ebene *A*7 8 mit der Berührungslinie *u*1 2 . . . 8 9 des Sehkegels *Au*1 2 . . . 8 9 und der Rotationsfläche, und die Gerade VII VIII ist die Trace der Ebene *A*7 8, welche auf der Ebene *Aab* senkrecht steht. Nach der Drehung um *Ff* und den Winkel $A\omega\Delta$ erscheint die bezügliche Ebene senkrecht

auf der Zeichnungsfläche und projicirt sich als die Tangente $\Delta 78h$ an die gedrehte Berührungslinie $u_1 12 \ldots 89$. — h ist die Perspective des Mittelpunktes h_1 der Geraden 78. Die Perspective VII VIII von 78 verschwindet in φ. Die orthogonale Projection von VII VIII geht durch h_1 und erscheint geometrisch senkrecht auf Ff. Um VII VIII zu finden, hat man also die Stücke hVII und hVIII perspectivisch gleich $h_1 7 = h_1 8$ zu machen. $h_1 7$ findet man durch Umlegen des Parallelkreises $h78$ und der Geraden 78 in die Zeichnungsfläche.

Um den Punkt s_{VII} zu finden, durch welchen die Tangenten s_{VII}VII und s_{VII}VIII der Contour gehen, ist die Spitze s_7 des Kegels s_7 78 zu bestimmen, welcher die Rotationsfläche $ab_1v_1\alpha_1$ . . in dem durch 78 gehenden Parallelkreise $h_1 78$ berührt und ist dann die Gerade $\Delta s_7 s_{VII}$ bis s_{VII} in Ff zu ziehen.

Der Punkt IX ist wieder die Perspective des Berührungspunktes 9 der Berührungslinie 12 . . 89 und zugleich des in Aab befindlichen Meridianes mit der auf Aab senkrechten Ebene AIXφ, deren Trace IXφ Tangente an die Contour VII IX VIII . . ist. IX ergibt sich also im Durchschnitte der Geraden Ff mit der Tangente $\Delta 9$IX an den Meridian $v_1\alpha_1 u_1$ . . . .

Die Ellipse $pqvx$ ist die Perspective des Kreises $v_1p_1q_1x_1$ mit dem Mittelpunkt b_1 . — $\omega_1 f$ ist die Fluchtlinie, NO die Trace der Ebene des Kreises $pqvx$; letztere geht durch den gemeinschaftlichen Punkt O von den Geraden v_1x_1 und Ff. $No \| \omega_1 f \perp \Omega F$.

Die Curve ptq bildet jenen Theil der Contour der Rotationsfläche, welcher als die Perspective von der Berührungslinie $p_1q_1t_1$ des Kegels $\Delta p_1q_1t_1$ mit der Rotationsfläche $v_1\alpha_1 ab_1$ erscheint.

Die Punkte der Curve $p_1q_1t_1$ wurden wie jene von $u_1 12 \ldots 89$ und die Punkte p, q, t wie I und II construirt.

Um p und q zu finden, wurde die Tangente v_1s_p an den Meridian $v_1\alpha_1u_1$, dann $v_1o_p \perp v_1s_p$ und aus o_p die Kugel $v_1o_px_1$ gezogen, welche die Rotationsfläche $ab_1v_1\alpha_1$ in dem Parallelkreise $v_1p_1q_1x_1$ berührt. Der die Kugel $v_1o_px_1$ umhüllende Kegel $\Delta\gamma_1p_1\psi_1$ berührt dieselbe in dem Kreise $\gamma_1p_1q_1\psi_1$ und die beiden Kreise $v_1p_1x_1$ und $\gamma_1p_1\psi_1$ schneiden sich in den Punkten p_1 und q_1, deren Perspectiven p und q sind. r ist die Perspective von dem Mittelpunkte r_1 der Geraden p_1q_1 und liegt im Durchschnitte von $\Delta r_1 r$ mit Ff. Die Gerade prq verschwindet in φ. Die orthogonale Projection von pq geht durch r_1 und erscheint geometrisch senkrecht zu Ff. Die

Stücke rp und rq sind perspectivisch gleich $p_1(p)$ ($\perp v_1x_1$); $b_1(p) = b_1v_1$.

t ist die Perspective des Berührungspunktes t_1 des in der Ebene Aab befindlichen Meridianes mit der auf Aab senkrechten Ebene $At\varphi$, deren Trace $t\varphi$ als Tangente an die Contour ptq erscheint. t liegt im Durchschnitte von Ff mit der Tangente Δt_1t an den Meridian $x_1t_1u_1$.

Es ist einleuchtend, dass beliebige Punkte der Rotationsfläche $v_1ab_1x_1$ auf dieselbe Weise wie die Punkte der Berührungslinie $u_1 1\ 2 \ldots 8\ 9$ gedreht werden können. Daher können auch die Grenzen der Selbstschatten und der Schlagschatten auf der Rotationsfläche $tpqu$ dadurch bestimmt werden, dass zuerst die besagten Grenzen auf der Rotationsfläche $ab_1v_1\alpha_1u_1$ construirt und dann um Ff und den Winkel $A\omega\Delta$ zurückgedreht werden.

Die Durchschnittslinie C einer durch ab oder parallel zu ab und senkrecht zu Aab gelegten Ebene E mit der die Rotationsfläche umhüllenden Kegelfläche, deren Spitze A bildet, ist symmetrisch mit Rücksicht auf ab, beziehungsweise auf die mit ab parallele Durchschnittslinie der Ebenen E und Aab. Das perspectivische Bild von C ist aber zugleich die Contour und desshalb kann die Contour einer Rotationsfläche wie eine symmetrische Curve behandelt werden, welche in einer durch die Gerade ab oder parallel zu derselben gehenden und zu Aab senkrechten Ebene sich befindet.

Zu dem Behufe wurden in der zu Aab senkrechten Ebene abP die Geraden PQf und P_1Q_1f so gezogen, dass sie mit der Axe ab gleiche Winkel einschliessen. Dann wurden in der Geraden Pf die zwei Punkte P und Q gewählt und die Durchschnittspunkte P_1 und Q_1 der Geraden P_1f mit den Geraden $P\varphi$ und $Q\varphi$ bestimmt; so liegen auch die Punkte P, P_1 und Q, Q_1 symmetrisch gegen ab und können nun wie in Fig. 19 und 22 zum Zeichnen einer Contourhälfte benützt werden, wenn die andere Hälfte dargestellt ist.

c) Rotationsflächen der zweiten Ordnung.

43. Die Berührungscurve B des umhüllenden Sehkegels mit einer Rotationsfläche der zweiten Ordnung ist stets von der zweiten Ordnung, daher ist auch die Contour einer solchen Fläche eine Curve von derselben Ordnung.

Die Contour ist eine geschlossene Curve, also eine Ellipse oder ein Kreis, wenn alle Erzeugenden des die Fläche umhüllenden Sehkegels die Bildfläche treffen. Die Contour ist eine Parabel, wenn eine Erzeugende dieses Sehkegels parallel zur Bildfläche ist, und sie ist endlich eine Hyperbel, wenn zwei Erzeugende des Sehkegels parallel zur Bildfläche sind.

Die Ebene Aab, welche durch das Auge A und die Rotationsaxe ab der Fläche gelegt werden kann, theilt die Berührungscurve B in zwei symmetrische Hälften. Die Ebene der Berührungscurve B steht senkrecht auf der Ebene Aab und beide Ebenen schneiden sich in einer Geraden G, welche eine Axe 1 2 der Berührungslinie B enthält. Die Endpunkte 1 und 2 dieser Axe 1 2 sind Berührungspunkte der Sehstrahlen $A1$ und $A2$ mit dem in der Ebene Aab liegenden Meridiane M. Erfolgt die Berührung der beiden Sehstrahlen $A1$ und $A2$ mit dem Meridiane M in unendlicher Entfernung, so ist die Berührungscurve eine Hyperbel, für welche G die imaginäre Axe bildet. Wird M aber von einem der beiden Sehstrahlen in endlicher und von dem anderen in unendlicher Entfernung berührt, so ist die Berührungslinie B eine Parabel.

Indem die Contour C das perspectivische Bild der Berührungscurve B vorstellt, so kann man die Contour C entweder unmittelbar in der Bildfläche darstellen, wie jene der Kugel in Taf. III, Fig. 24; oder man kann die Curve B in der entsprechenden Ebene construiren, wie die Contour des Ellipsoides in Fig. 25.

44. (Taf. III, Fig. 24.) m ist der Mittelpunkt, $ambg$ der zur Bildfläche parallele grösste Kreis einer Kugel.

Die Contour dieser Kugel ist die Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$, deren grosse Axe $\alpha\beta$ in der Geraden $m\Omega$ liegt. α, β sind die Durchschnittspunkte der Ebene abg mit den Sehstrahlen $A\alpha$ und $A\beta$, welche den in der Ebene $A\Omega m$ befindlichen Kreis k der Kugel berühren.

Man lege den Kreis k sammt dem Auge A um ab in die Ebene abg, dann fällt k mit dem Kreise abg zusammen und A kommt nach D ($\Omega D \perp m\Omega$) zu liegen. Die Tangenten $D\alpha$ und $D\beta$ des Kreises abg sind die umgelegten Sehstrahlen $A\alpha$ und $A\beta$ und treffen die ab in den Endpunkten α und β der grossen Axe $\alpha\beta$ der fraglichen Contour.

Die kleine Axe $\delta\gamma$ der Contour geht durch den Mittelpunkt μ von $\alpha\beta$ und steht senkrecht zu $\alpha\beta$. Die Sehstrahlen $A\gamma$ und $A\delta$ sind

Tangenten an den Kreis *ghef* und schneiden die Gerade $\gamma\delta$ in den Endpunkten γ, δ der kleinen Axe $\gamma\delta$ der Contour. Die Gerade $A\mu$ trifft die Kugel in *e* und *f*. Die Ebene *Agh* des Kreises *ghef* schneidet die Ebene *abg* in der Geraden $g\mu h$.

Man lege die Gerade $Ae\mu f$ zuerst um *ab* in die Ebene *abg* nach $D\varepsilon\mu\varphi$, wo sie den Kreis *abg* in den Punkten ε und φ schneidet, und dann um $\delta\gamma$ wieder in die Ebene *abg* nach $\Delta\varepsilon_1\mu\varphi_1(\mu\Delta = \mu D;$ $\mu\varepsilon_1 = \mu\varepsilon;$ $\mu\varphi_1 = \mu\varphi)$, ziehe aus dem Mittelpunkte n von $\varphi_1\varepsilon_1$ den Kreis $\varphi_1 g\varepsilon_1 h$ und an denselben die Tangenten $\Delta\gamma$ und $\Delta\delta$.

Endlich construire man die Contour d. i. die Ellipse $\alpha\beta\gamma\delta$ aus den Axen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$. [1])

125. *ab* (Taf. V, Fig. 25) ist die Rotationsaxe und *abcd* die in der Bildfläche befindliche Meridianellipse des Ellipsoides I II III IV. *ab* und *cd* sind die Axen von *abcd*. $\Omega\Delta \perp ab$ ist die Fluchtlinie der Parallelkreise. *ab* und $\Omega\Delta$ schneiden sich in r. $\Omega D \| ab$.

Die Berührungslinie 1 2 3 4 des Sehkegels mit dem Ellipsoide ist eine Ellipse mit den Axen 1 2 und 3 4. Die grosse Axe 1 2 liegt in der Ebene *Aab*, die kleine Axe 3 4 steht senkrecht zu *Aab*. 1 und 2 sind Berührungspunkte der Sehstrahlen $A1$ I und $A2$ II mit dem Meridiane *M*, dessen Ebene *Aab* ist.

Man drehe die Ellipse 1 2 3 4 sammt dem Meridiane *M* und dem Auge *A* um *ab*, bis *A* in die Bildfläche nach Δ fällt. ($r\Delta = rD = rA$). Dadurch kommt *M* nach *abcd* und die Sehstrahlen A1 und $A2$ kommen nach ΔI und ΔII zu liegen, wo sie die Ellipse *abcd* in $\dot{1}$ und $\dot{2}$ berühren und die Gerade *ab* in den Punkten I und II der fraglichen Contour schneiden. Nach dieser Drehung erscheint 1 2 3 4 senkrecht zur Bildfläche und desshalb die orthogonale Projection von 1 2 3 4 als die Gerade $\dot{1}\,\dot{2}$. Der Mittelpunkt $\dot{\mu}$ von $\dot{1}\,\dot{2}$ ist zugleich die orthogonale Projection $\dot{3}\,\dot{4}$ der gedrehten kleinen Axe 3 4.

Durch Drehung der Punkte $\dot{3}$, $\dot{4}$ um die Gerade *ab* und den Winkel $\alpha = \Delta rA = \Delta rD$ erhält man umgekehrt die Endpunkte 3, 4 der kleinen Axe von 1 2 3 4, beziehungsweise die perspectivischen Bilder III, IV von 3, 4.

---

[1]) Eine directe Construction der Contour der Kugel ist auch in Pr. G. Schreibers geometrischen Portfolio und eine andere von Professor G. Zach im Jahresberichte der Ober-Realschule in Elbogen 1859 angeführt.

Man ziehe $e\mu nf \perp ab$ und $\Delta\mu m$, so ist n (in ab) der Mittelpunkt und en der in der Bildfläche befindliche Halbmesser des die Punkte 3, 4 enthaltenden Parallelkreises ef 3 4; ferner ist m (in ab) das perspectivische Bild des Mittelpunktes von 1 2 3 4. Hier fällt m sehr nahe an den Mittelpunkt o der Ellipse $abcd$.

Um nun die perspectivischen Bilder III, IV von 3, 4 zu finden, ist durch m die Gerade III m IV senkrecht zu der Ebene Aab zu ziehen und III m perspectivisch gleich m IV, gleich dem Abstande der Punkte 3 und 4 von der Ebene Aab zu machen. Der Fluchtpunkt der Geraden III m IV liegt im Durchschnitte der Geraden $\Delta\Omega F$ und DF, wobei $DF \perp rD$ ist. Der Abstand des Punktes 3 von der Ebene Aab lässt sich aber leicht bestimmen, indem man den Parallelkreis $e3f$ sammt dem Punkte 3 in die Bildfläche legt, also über en als Halbmesser den Kreis $e3_1f$ beschreibt und $\mu 3_1 \perp ef$ zieht. Dann bestimme man den Theilungspunkt T ($FT = FD$) für die zu der Ebene Aab senkrechten Geraden, ziehe mm_1T bis m_1 in ef, mache $m_1 3_1 = m_1 4_1 = \mu 3_1$ und verlängere $T3_1$ und $T4_1$ bis sie die Gerade III m IV in den Punkten III und IV treffen.

Auf gleiche Weise wie III und IV lassen sich beliebige Punkte der Contour construiren. Wir wollen auf diese Art etwa die in der Geraden V VI F befindlichen Contourpunkte V und VI ermitteln. Die Geraden V VI und ab treffen sich im Mittelpunkte p der Sehne V VI. Δp und $\dot{1}\,\dot{2}$ treffen sich in $\dot{p}$ (dem um ab in die Bildfläche gelegten Mittelpunkte von $\dot{5}$ $\dot{6}$). $g\,\dot{p}\,q \perp ab$ ist der in der Bildfläche befindliche Halbmesser und q der Mittelpunkt des Parallelkreises q 5 6.

Den Kreis q 5 6 und die Gerade $\dot{p}\dot{5}$ lege man um gq in die Bildfläche nach $g5_1q$ und $5_1\dot{p} \perp gq$, so ergibt sich $5_1\dot{p}$ als Abstand des Punktes 5 (und 6) von der Ebene Aab. pp_1T und gq schneiden sich in p_1. Man mache $p_1 5_1 = p_1 6_1 = \dot{p}\dot{5}_1$ und ziehe $T5_1$ V und $T6_1$ VI bis V VI F in V und VI geschnitten wird.

Die die Contour in V und VI berührenden Geraden sV und sVI lassen sich ebenfalls leicht darstellen, denn es ist blos durch g die Tangente gs an die Ellipse $abcd$ zu ziehen und der gemeinschaftliche Punkt s von gs und ab mit V und VI zu verbinden.

Die Tangenten in I und II gehen durch F.

Die Punkte V und VI lassen sich auch nach dem in 22 angegebenen Verfahren einfach bestimmen. Man ziehe die Gerade $s\Omega$ bis

zum Durchschnitte u mit gh, ferner $u\sigma_1 \perp gh$ und $q\sigma_1 \| rD$. $u\sigma_1$ und $q\sigma_1$ treffen sich in σ_1, d. i. in dem um ab in die Bildfläche gelegten Durchschnittspunkte σ des Sehstrahles $As\sigma$ mit der Ebene des Parallelkreises gh 5 6. — σ_1 liegt zugleich in der Geraden Ds.

Die Geraden $\sigma_1(5)$ und σ_1 (6) berühren den Kreis $gh5_1$ in den Punkten (5) und (6), welche beide nun noch um ab in die Ebene ghV nach V und VI zurück zu drehen sind.

Der höchste und der tiefste Punkt, so wie die in der Fluchtlinie $\Delta\Omega$ befindlichen und die von ab entferntesten Punkte der Contour nebst den zugehörigen Tangenten lassen sich eben so wie die gleichnamigen Punkte in Fig. 19 construiren.

Nachdem die Endpunkte I, II, III, IV von den perspectivischen Bildern I II und III IV der Axen 1 2 und 3 4 der Ellipse 1 2 3 4 dargestellt sind, können daraus zwei conjungirte Durchmesser und dann beliebige Punkte der Contour I II III IV gefunden werden.

Zu dem Behufe kann man den einen Durchmesser $\alpha\beta$ parallel zur Bildfläche, also zugleich parallel zur Trace NO der Ebene der Berührungscurve 1 2 3 4 annehmen. Die Endpunkte des zweiten Durchmessers $\gamma\delta$ bilden dann: der von der Bildfläche nächste Punkt γ und der entfernteste Punkt δ der Ellipse 1 2 3 4. Diese beiden Punkte γ, δ liegen offenbar zugleich in der Berührungslinie B_1 des Ellipsoides mit einer Cylinderfläche, deren Kanten mit NO parallel sind. N und O sind Berührungspunkte von ΩN und ΩO mit $abcd$. gh und V VI treffen sich in dem Punkte v von NO, weil gh die orthogonale Projection von V VI ist.

Die orthogonale Projection von B_1 (auf der Bildfläche) ist die Gerade ot, welche den Mittelpunkt o des Ellipsoides mit dem Mittelpunkte t der Sehne NO der Ellipse $abcd$ verbindet. t ist zugleich der Durchschnittspunkt des Durchmessers $\gamma\delta$ mit der Bildfläche, mithin tm die Lage des Durchmessers $\gamma\delta$.

Um die Durchschnittspunkte γ, δ des Durchmessers $\gamma\delta$ mit dem Ellipsoide ohne Benützung einer elliptischen Curve zu bestimmen, drehe man die Geraden 12, 34 und mt ($\gamma\delta$) um NO in die Bildfläche nach $\underline{12}$, $\underline{34}$, $\underline{mt}$, (Fig. 25 b), wo $\underline{12} \perp \underline{34}$; $\underline{m1} = \underline{m2} = \mu\dot{1}$; $\underline{m3} = \underline{m4} = \mu 3_1$ ist. — Über $\underline{12}$ beschreibe man den Halbkreis $\underline{1E2}$ und ziehe $\underline{3C} \| \underline{mt}$; $Hm \| EC$; $H\underline{\gamma} \| \underline{34}$; $\underline{m\delta} = \underline{m\gamma}$.

Ferner ziehe man $\psi k \perp Hm$, $EJ \| \psi k$, bis $\underline{12}$ in J geschnitten wird und nachher $\underline{\varepsilon\varphi} \| \underline{3J}$; $\psi\underline{\varepsilon} \| \underline{34}$ und mache $\underline{m\varphi} = \underline{m\varepsilon}$. Statt E, $\underline{3}$,

J können auch die Punkte E_1, 3_1, J_1 benützt werden, nur ist E_1 3 E_1 und $E_1 J_1 \| \psi k$ zu ziehen.

$\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$ sind conjungirte Durchmesser der Ellipse 1 2 3 4 Fig. 25 *b*, welche nun wieder um NO in die Ebene mNO der Berührungslinie 1 2 3 4 Fig. 25 nach $\gamma\delta$, $\varepsilon\varphi$ zurück zu führen sind. Dann ist $\gamma\delta$ in P geometrisch zu halbiren und durch P die Gerade $\alpha\beta \| \varepsilon\varphi \| NO$ zu ziehen. Um aber die Endpunkte α und β von $\alpha\beta$ zu erhalten, ist über $\gamma\delta$ der Halbkreis $\gamma\alpha_1\beta_1\delta$ zu beschreiben, $\varepsilon_1 m \| \alpha_1 P \perp \gamma\delta$; $\alpha_1\alpha \| \varepsilon_1\varepsilon$ und $P\beta = P\alpha$ zu machen. $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ sind conjungirte Durchmesser und können daraus auf bekannte Weise auch die Axen QR und UW der Ellipse I II III IV construirt werden.

Kann NO nicht benützt werden, so drehe man die Axen 1 2, 3 4 und die Gerade mt um die $\varepsilon\varphi$ ($\| NO$) in die zur Bildfläche parallele Ebene $\varepsilon\varphi\rho$ u. s. w.

Am schnellsten lässt sich die Contour I II III IV aus den conjungirten Durchmessern JK und LM construiren. LM ist der mit der Rotationsaxe ab parallele Durchmesser. J und K sind die von ab entferntesten Punkte der Contour, mithin die Perspectiven von den Durchschnittspunkten i, k der Ellipse 1 2 3 4 mit dem grössten Parallelkreise des Ellipsoides. Die beiden Punkte J und K können entweder nach dem in 38 angegebenen Verfahren oder so wie hier die Punkte III und IV bestimmt werden. Die Gerade JK verschwindet in F und wird von der Geraden ab perspectivisch halbirt. P ist der geometrische Mittelpunkt der Geraden JK. Die Endpunkte L und M lassen sich aber mit Benützung des Durchmessers JK und der Sehne I II eben so einfach wie $\alpha\beta$ vermittelst $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$ construiren.

46. Wenn die Meridianellipse $abcd$ parallel zu der Bildfläche ist, kann die Contour des Ellipsoides auf dieselbe Weise wie in Fig. 25 construirt werden. Die Constructionen, welche zuvor in der Bildfläche durchgeführt wurden, sind jetzt in der Ebene $abcd$ durchzuführen. Man hat also z. B. A um ab in die Ebene $abcd$ zu legen und erhält wieder den Punkt Δ. — Δ stellt jetzt das perspectivische Bild des umgelegten Punktes und nicht wie dort den umgelegten Punkt selbst vor. M fällt nach der Drehung um ab wieder nach $abcd$. NO ist dann auch nicht die Trace, sondern das Bild der Durchschnittslinie der Ebenen mNO und $abcd$ u. s. w.

Auf ähnliche Weise können die Contouren der übrigen Flächen von der zweiten Ordnung construirt werden, wenn ihre Rotationsaxen in der Bildebene liegen, oder mit derselben parallel sind.

47. Wenn die Rotationsaxe einer Fläche von der zweiten Ordnung senkrecht auf der Bildfläche steht, so können zur Construction der Contour die in 40 angegebenen Verfahren angewendet werden. Der Grundriss der Berührungslinie des Sehkegels mit der bezüglichen Fläche erscheint nämlich als eine Gerade und die Axen der Contour lassen sich stets einfach darstellen.

Auf diese Weise wurde die Contour *GHJK* des Ellipsoides (Taf. V, Fig. 26) construirt. Ω ist der Fluchtpunkt und v der Durchschnittspunkt der Rotationsaxe *ab* mit der Bildfläche.

Man betrachte die Gerade ΩvG als Projectionsaxe; $D\,(\Omega D \perp \Omega G)$ und die Ellipse $a'b'c'd'$ als horizontale, ferner Ω und den Kreis $c''d''g''h''$ als verticale Projection von A und dem Ellipsoide *abcdik*.

Die Sehstrahlen AgG und AhH berühren den in der Ebene Aab befindlichen Meridian *abcd* in den Punkten g und h und treffen die Bildfläche in G und H. Diese beiden Endpunkte der grossen Axe GH der Contour $GHJK$ ergeben sich einfach als Durchschnitte der Geraden ΩvG mit den Tangenten $Dg'G$ und $Dh'H$ an die Ellipse $a'b'c'd'$. Die Gerade $g'h'$ ist die horizontale Projection der Berührungslinie *ghik* des Sehkegels *Aghik* mit dem Ellipsoide. Die kleine Axe JK steht im Mittelpunkte N von GH senkrecht zu GH. Die Sehstrahlen AJ und AK berühren das Ellipsoid und schneiden die Ellipse *ghik* in den Punkten *i*, *k*. DN stellt die horizontale Projection von AJ und AK vor. DN und $g'h'$ schneiden sich in i', k'. Die Gerade $e'i'k'f' \perp a'b'$ ist die horizontale und der Kreis $e''i''k''f''$ die verticale Projection des Parallelkreises *eikf*. Die verticalen Projectionen $\Omega i''J$ und $\Omega k''K$ der Sehstrahlen AJ und AK treffen die Gerade JK in den Endpunkten J und K der kleinen Axe JK.

Um J, K zu erhalten, könnte man auch $Df'F$ ziehen und $NJ = NK = NF$ machen. Der aus N beschriebene Kreis JFK stellt nämlich das perspectivische Bild des Parallelkreises *eikf* vor.

Dass aber die Geraden DN und $g'h'$ sich in einem Punkte $i'(k')$ der $a'b'$ schneiden müssen, geht aus folgender Betrachtung hervor. Die Tangenten in den Punkten J und K der Ellipse $GHJK$ sind parallel zu GH und stellen die Verticaltracen von Ebenen vor, welche den Sehkegel $AGHJK$ in den Geraden AJ und AK und das Ellipsoid in

den Punkten *i* und *k* berühren; *i* und *k* müssen also in dem Meridiane *abik* liegen, dessen Ebene senkrecht zu *GH* ist, denn *abik* ist der geometrische Ort der Berührungspunkte des Ellipsoides mit Ebenen, welche mit *GH* parallel sind. *a'b'* ist aber die horizontale Projection des Meridianes *abik* und muss also auch die Punkte *i'*, *k'* enthalten.

Ist $\Omega D = va$, so ist die eine Tangente *AG* parallel zur Bildfläche; *G* liegt also in unendlicher Entfernung von *H* und es ist in diesem Falle die Contour des Ellipsoides eine Parabel.

Ist $\Omega D < va$ und $\Omega D > vb$, so fällt der Durchschnittspunkt *G* auf die andere Seite von ΩD und die Contour ist dann ein Ast *JKH* der Hyperbel *GHJK*, deren Scheitel *G* und *H* sind.

48. In Taf. V, Fig. 27 ist die Contour *GLZK* des Rotations-Paraboloides *acdih* dargestellt. Die Rotationsaxe *av* steht senkrecht zu der Bildfläche und trifft sie in *v*. *c'a'd'* ist die um Ωv in die Bildfläche gelegte Meridian-Parabel. $v'a' \perp \Omega v$ ist die Axe und *a'* der Scheitel von *c'a'd'*. $\Omega D \perp \Omega v$.

Die Tangente *Dg'* berührt die Parabel *c'a'd'* in *g'*. Ein zweiter Punkt der Geraden *g'i'h'*, welche die horizontale Projection der Berührungslinie *gih* des Sehkegels *Agih* mit dem Paraboloide vorstellt, wurde nach dem in 38 angegebenen Verfahren construirt.

Die Berührungslinie *gih* ist eine Ellipse. Der Sehstrahl *Ag* trifft in *G* die Bildfläche. Die Ebene *gih* trifft die Axe *av* in *n* und den zu *Aav* senkrechten Meridian in den Punkten *l* und *k*. *l* und *k* sind Berührungspunkte des Paraboloides mit den Ebenen *AkK* und *AlL*, deren Verticaltracen mit *GZ* parallel sind. *KNL* ist die Durchschnittslinie der Ebene *Akl* mit der Bildfläche; *K* und *L* sind die perspectivischen Bilder von *k* und *l*. Die Contour des unbegrenzt gedachten Paraboloides ist die Ellipse *GLZK* mit den Axen *GZ* und *KL*.

Z wurde durch Übertragen des Stückes $NZ = NG$ erhalten. Man vergleiche desshalb Fig. 27 mit Fig. 26. Die Contour *GLZK* und der in der Bildfläche befindliche Parallelkreis *chdi* berühren sich in *i* und *h*. *hGi* ist die Contour des begrenzten Paraboloides *acidh*.

Liegt *A* in der Rotationsaxe *av*, so ist die Contour des Paraboloides auf der zu *av* senkrechten Bildebene ein Kreis. Wenn $\Omega D = va$ ist, so ergibt sich als Contour eine Parabel und wenn $\Omega D < va$ ist, so erhält man als Contour des Paraboloides einen Ast der Hyperbel.

49. In Taf. V, Fig. 28 stellt die Hyperbel *OGPQHL* die Contour eines Rotations-Hyperboloides mit einem Netze vor. Die zu der Bildfläche senkrechte Rotationsaxe av durchdringt in v die Bildfläche. Ωv ist die Projectionsaxe und $c'e'd'f'k'$ die horizontale Projection des Meridianes *ceidfk*. Die Gerade $x'p'g'l'$ ist die horizontale Projection der Berührungslinie *pglq* des Sehkegels mit dem Hyperboloide und wurde wie in Fig. 21 construirt. Die Berührungslinie ist ebenfalls eine Hyperbel *xpgqhl*, sie schneidet den zu der Ebene Aav senkrechten Meridian in den Punkten g und h, deren horizontalen Projectionen g', h' in der Geraden $a'b'$ liegen und deren perspectivischen Bilder G, H die Endpunkte der reellen Axe der Contour-Hyperbel *PGOQH* sind. P und Q sind die perspectivischen Bilder von p und q.

Durch die Scheitel G, H und die Punkte P, Q ist die Hyperbel *PGOQH* vollkommen bestimmt und kann auf bekannte Weise construirt werden. Es versteht sich aber von selbst, dass so wie P und Q auch andere Punkte der Contour bestimmt werden können. Die Contour und der in der Bildfläche befindliche Parallelkreis *ikvOL* des Hyperboloides berühren sich in O und L. $Dx'y' \| \Omega v$; $NX \| \Omega x''$; $NY \| \Omega y''$. NX und NY sind die Asymptoten der Contour.

Liegt A ausserhalb des Hyperboloides, so ist die Contour eine Hyperbel; liegt A innerhalb des Hyperboloides, so ist die Contour eine Ellipse und liegt A in der Rotationsaxe, so ist die Contour ein Kreis. — Bei einem Hyperboloide mit zwei Netzen hat man die Contour eines jeden Netzes auf dieselbe Weise wie die Contour des Paraboloides Fig. 27 zu construiren.

50. Wenn die Rotationsaxe einer Fläche von der zweiten Ordnung gegen die Bildfläche geneigt ist, aber die Gerade $A\Omega$ schneidet, so kann die Contour der betreffenden Fläche auf ähnliche Weise construirt werden, wie in Fig. 26, 27 und 28, wo die Rotationsaxe senkrecht zur Bildfläche ist. Als Projectionsaxe wähle man wieder die Durchschnittslinie der Bildfläche mit der durch das Auge A und die Rotationsaxe bestimmten Ebene, zeichne Grund- und Aufriss der beobachteten Fläche und des Auges A und construire dann nach der angegebenen Methode die fragliche Contour. Die horizontale Projection der Berührungslinie der Rotationsfläche mit dem umhüllenden Sehkegel ergibt sich wieder als eine Gerade.

51. Ist die Rotationsaxe einer Fläche von der zweiten Ordnung gegen die Bildfläche geneigt und schneidet sie die Gerade $A\Omega$ nicht,

so lassen sich die conjungirten Durchmesser und Axen der entsprechenden Contour nicht so einfach wie in den anderen Fällen bestimmen und es ist zuweilen vortheilhafter die Contour nach dem in 40, Taf. III, Fig. 22, angegebenen allgemeinen Verfahren zu construiren. Die conjungirten Durchmesser *AB* und *CD* des Meridianes *ABCD*, dessen Ebene zu der Fluchtlinie der Parallelkreise parallel ist, lassen sich einfach darstellen. *AB* ist nämlich das perspectivische Bild der Rotationsaxe *ab*, *CD* geht durch den geometrischen Mittelpunkt *M* von *AB* und ist geometrisch senkrecht zu ΩF, wenn *F* den Fluchtpunkt der Rotationsaxe bezeichnet. Dieser Meridian lässt sich zur Construction der Contour eben so vortheilhaft wie *abcd* in Fig. 22 benützen.

52. Soll aber zuerst ein Paar conjungirter Durchmesser, beziehungsweise Axen der fraglichen Contour construirt und dann daraus die Contour selbst gezeichnet werden, so ist es vortheilhaft auf folgende Weise vorzugehen.

Die Berührungslinie *B* des Sehkegels mit der bezüglichen Fläche von der zweiten Ordnung projicirt sich auf die Ebene *Aab*, in welcher der Meridian *abcd* liegt, als eine Gerade. Diese Projection von *B* lässt sich aber wie in Fig. 26, 27, 28 bestimmen und sobald dieselbe bekannt ist, lassen sich auch beliebige Punkte von *B* einfach darstellen.

Hier sollen jedoch nur die Axen von *B* dargestellt und dann daraus zwei conjungirte Durchmesser der Contour, d. i. des perspectivischen Bildes von *B* construirt werden.

Zu dem Behufe drehe man *B* sammt dem Auge *A* und dem Meridiane *abcd* um die Trace von *abcd* bis *A* und *abcd* in die Bildfläche nach Δ und $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$ zu liegen kommen und *B* nach B_1 gelangt. Die orthogonale Projection von B_1 auf der Bildfläche ist eine Gerade $\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\,\dot{4}$, welche zugleich die Axe $\dot{1}\,\dot{2}$ von B_1 bildet. $\dot{1}$ und $\dot{2}$ sind Berührungspunkte von den Geraden $\Delta\dot{1}$ und $\Delta\dot{2}$ mit $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$. Die zweite Axe von B_1 steht senkrecht zur Bildfläche; sie projicirt sich als Punkt $\dot{3}$, $\dot{4}$ und es kann ihre wahre Länge durch Umlegen in die Zeichnungsfläche leicht gefunden werden.

Die beiden Axen $\dot{1}\,\dot{2}$ und $\dot{3}\,\dot{4}$ drehe man nun in die Ebene von *B*, wo 1 2 zugleich in die Ebene *Aab* fällt und 3 4 senkrecht zu *Aab* erscheint. Ferner lege man die Geraden 1 2, 3 4 um die Trace *NO* von 1 2, 3 4 (*B*) in die Bildfläche nach B_2, construire die

zwei conjungirten Durchmesser $\gamma_2\delta_2$, $\varepsilon_2\varphi_2$ von denen einer parallel zu *NO* ist und führe sie wieder in die Ebene *B* nach $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$ zurück. Es ist nun $\varphi\delta$ ein Durchmesser und $\varepsilon\varphi$ eine mit dem conjungirten Durchmesser $\alpha\beta$ von $\gamma\delta$ geometrisch parallele Sehne der fraglichen Contour $\alpha\beta\gamma\delta$ und kann daher $\alpha\beta$ wie in Fig. 29 construirt werden.

Wenn *B* eine Parabel ist, liegt 3 4 in unendlicher Entfernung; in diesem Falle wähle man statt 3 4 eine zu 1 2 senkrechte Sehne.

53. Fig. 29, Taf. V stellt *o* den Mittelpunkt, *f* den Fluchtpunkt und *v* den Durchschnittspunkt der Rotationsaxe *cd(fO)* des eiförmigen Ellipsoides $\alpha\beta\gamma\delta$ mit der Bildfläche vor. *ab, cd* sind Axen des Meridianes *abcd*. Zuerst wurde um *Of* das Auge *A* nach Δ und der Meridian *abcd* nach $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$ gelegt. $\Delta\Omega\omega \perp fO$; $\Omega D \| fO$; $\omega\Delta = \omega D$; $\dot{c}\dot{d}v \| \Delta f$. $\Delta\dot{o}$ und *ab* schneiden sich in *o*; $\dot{a}\dot{b} \perp \dot{c}\dot{o}\dot{d}$; $\dot{o}\dot{a} = \dot{o}\dot{b} = oa = ob$; $\dot{o}\dot{c} = \dot{o}\dot{d} = oc = od$.

Die Geraden ΔI und ΔII berühren die Ellipse $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$ in $\dot{1}$ und $\dot{2}$ und schneiden die *fO* in I und II. Die Gerade $\dot{1}\,\dot{2}$ ist die orthogonale Projection der Berührungslinie $\dot{1}\,\dot{2}\,\dot{3}\,\dot{4}$ für das Auge Δ und I II ist das perspectivische Bild der grossen Axe 1 2 der Berührungslinie 1 2 3 4 für das Auge *A*. Der geometrische Mittelpunkt $\dot{\mu}$ von $\dot{1}\,\dot{2}$ ist zugleich die orthogonale Projection von der Axe $\dot{3}\dot{4}$. $\Delta\dot{\mu}m$ trifft die *fO* im perspectivischen Bilde *m* des Mittelpunktes von 1 2 3 4. $\dot{\mu}m'' \perp Of$ ist die orthogonale Projection von 3 4, welche auf der Ebene *AOf* senkrecht steht. $m\Omega$ und $\dot{\mu}m''$ schneiden sich also in der orthogonalen Projection m'' von *m*. Die Gerade $DF \perp D\omega$ schneidet die ωΔ in dem Fluchtpunkte *F* der zu der Ebene *Aab* senkrechten Geraden und folglich ist *Fm* das perspectivische Bild der Geraden 3 4. *DT* schliesst mit *DF* und Δω gleiche Winkel ein, wesshalb *T* ein Theilungspunkt für die zu *Aab* senkrechten Geraden ist. *Tm* und $\dot{\mu}m''$ treffen sich in (m) und es ist $(m)\,(3) = (m)\,(4) = \dot{\mu}\dot{3}_1$ und $\dot{\mu}\dot{3}_1 \perp \dot{e}\dot{f}$, $\dot{p}\dot{3}_1 = \dot{p}\dot{e}$. Die Theilungslinien $T(3)$ und $T(4)$ schneiden die Gerade *Fm* in den perspectivischen Bildern III und IV von 3 und 4. Die Geraden $\dot{2}\,\dot{1}$ und *fO* treffen sich in *O*, $\mu m''$ und *Fm* in *N* und folglich sind *O* und *N* die Durchschnittspunkte der Geraden 1 2 und 3 4 mit der Bildfläche und *NO* ist die Trace der Ebene der Ellipse 1 2 3 4 (I II III IV).

Nun können die Geraden 1 2 und 3 4 um *NO* in die Bildfläche gelegt und die conjungirten Durchmesser $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$ von 1 2 3 4 construirt werden. Der grösseren Deutlichkeit wegen geschieht dies in

Fig. 29 *b*, Taf. V. $\underline{mm''x} \perp NO$, $\underline{mx} = \sqrt{\underline{m''x}^2 + d^2}$, wo d den Abstand des nicht gedrehten Punktes m (Fig. 29) von der Bildfläche bezeichnet. $> N\underline{m}O = 90^\circ$, weil $\underline{m}O$ und $\underline{m}N$ die umgelegten Axen 1 2 und 3 4 vorstellen. $\underline{m1} = \underline{m2} = \mu\dot{1} = \mu\dot{2}$ und $\underline{m3} = \mu 3_1$. Der aus $\underline{m}$ gezogene Halbkreis $\underline{1E2}$ schneidet $\underline{m}N$ in E. $\underline{\varepsilon\varphi} \| \underline{3K} \| NO$; $G\underline{m} \| EK$; $G\underline{\varepsilon} \| E\underline{m}$; $\underline{m\varphi} = \underline{m\varepsilon}$. $EJ \| \underline{m}H \perp G\underline{m}$; $\underline{\gamma m\delta} \| 3J$; $H\underline{\delta} \| E\underline{m}$, $\underline{m\gamma} = \underline{m\delta}$. — $\underline{\varepsilon\varphi}$ und $\underline{\gamma\delta}$ sind conjungirte Durchmesser der Ellipse $\underline{1234}$.

$\underline{m\delta}$, $\varphi\underline{\delta}$ und $\underline{\gamma\varepsilon}$ treffen die Trace NO in den Punkten $\underline{t}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$. Diese Punkte $\underline{t}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$ übertrage man in die Fig. 29, nach t, y, z und führe die Geraden $\varepsilon\varphi$ und $\gamma\delta$ in die Ebene 1 2 3 4 zurück.

In Fig. 29 ziehe man die orthogonale Projection $\varepsilon''m''\varphi''$ der mit der Trace NO parallelen Geraden $\varepsilon m\varphi$ und mache $m''\varepsilon'' = m''\varphi'' = \underline{m\varepsilon}$ (Fig. 29 *b*). Die Geraden $\Omega\varepsilon''\varepsilon$ und $\Omega\varphi''\varphi$ schneiden die Gerade $\varepsilon\varphi$ in ε und φ und die Geraden $z\varepsilon\gamma$ und $y\delta\varphi$ schneiden die $t\delta m\gamma$ in δ und γ. $\gamma\delta$ ist ein Durchmesser und $\varepsilon\varphi$ eine mit dem conjungirten Durchmesser $\alpha\beta$ von $\gamma\delta$ geometrisch parallele Sehne der Contour $\alpha\beta\gamma\delta$. Um aber den Durchmesser $\alpha\beta$ zu finden, beschreibe man aus P den Halbkreis $(\beta)\,\gamma\delta$, ziehe $\alpha P\beta \| \varepsilon\varphi$; $P\,(\beta) \| m\,(\varphi) \perp \gamma\delta$; $(\beta)\beta \| (\varphi)\varphi$ und mache $P\alpha = P\beta$.

Auch in dem allgemeinen Falle, wenn die Rotationsaxe gegen die Bildfläche geneigt ist, lässt sich die Contour I II III IV am schnellsten aus den conjungirten Durchmessern JK und LM construiren. LM ist parallel mit der Geraden Of. J und K sind die von Of entferntesten Punkte der Contour; die ihnen entsprechenden mit Of parallelen Tangenten sind zugleich die Tracen von den durch das Auge A gelegten Berührungsebenen des Ellipsoides, also auch des das Ellipsoid umhüllenden, mit Of parallelen Cylinders C. Der Cylinder C berührt das Ellipsoid in der Ellipse iok, deren Ebene senkrecht auf der Ebene AOf steht.

Dreht man die Ellipse iok um Of und den Winkel $A\omega\Delta$, so erscheint sie dann senkrecht auf die Zeichnungsfläche und ihre orthogonale Projection bildet den Durchmesser $\dot{g}\dot{h}$ der Ellipse $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$. — $\dot{g}\dot{h}$ halbirt alle mit Of parallelen Sehnen von $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$ und schneidet die Gerade $\dot{1}\,\dot{2}$ in $\dot{i}$, $\dot{k}$. Die Geraden $\Delta\dot{i}$ und Of schneiden sich in r, durch welchen Punkt die Gerade JK zu ziehen ist. JK verschwindet in F und wird von Of perspectivisch halbirt. $Jr = rK$ ist perspectivisch gleich dem Abstande des auf dem Ellipsoide $\dot{a}\dot{b}\dot{c}\dot{d}$ befindlichen Punktes $\dot{i}$ (und $\dot{k}$) von der Ebene $\Delta\dot{a}\dot{b}$. Die Punkte J und K können

also, wie zuvor III und IV, und die Endpunkte L und M des durch den geometrischen Mittelpunkt P gezogenen Durchmessers LM mittelst des Durchmessers JK und der mit LM parallelen Sehne I II, wie zuvor $\alpha\beta$ vermittelst $\gamma\delta$ und $\varepsilon\varphi$, bestimmt werden.

δ ist der nächste und γ der entfernteste Punkt der Berührungslinie 1 2 3 4 von der Bildfläche.

Ist der Abstand d des Punktes γ von der Bildfläche kleiner als jener $A\Omega$ des Auges, so ist die Contour eine Ellipse.

Wenn $d = A\Omega$ ist, so ist das perspectivische Bild von 1 2 3 4 d. i. die Contour des Ellipsoides eine Parabel. In diesem Falle ist $A\gamma$ eine mit der Axe der Contourparabel $\varepsilon\delta\varphi$ parallele Gerade.

Wenn $d > A\Omega$ ist, so ergibt sich als Contour des Ellipsoides ein Ast der Hyperbel $\varepsilon\delta\varphi$, deren Durchmesser $\gamma\delta$ ist. Die Asymptoten sind mit den Geraden Ap und Aq parallel, wo p und q die Durchschnittspunkte des Ellipsoides mit der Geraden pq vorstellen, welche die Ebene 1 2 3 4 mit der zur Bildfläche parallelen Ebene Apq gemeinschaftlich hat.

54. Die conjungirten Durchmesser $\alpha\beta(\parallel NO)$ und $\gamma\delta$ (Taf. V, Fig. 30) der in der Ebene $NO\omega F$ befindlichen Ellipse I II III IV können auch auf andere Weise als in Fig. 25 und 29 construirt werden.

ωF ist die Fluchtlinie, NO die Trace der Ebene I II III IV; $\Delta(\omega\Delta \perp \omega F)$ der Haupt- oder Nebendistanzpunkt. — 1 2 und 3 4 sind die um NO in die Bildfläche gelegten Axen der Ellipse I II III IV, $1\,2 \perp 3\,4$.

Zufällig ist 3 in die Gerade $\gamma\delta$ und III in die Gerade γq gefallen.

Man construire in der Ellipse 1 2 3 4 den conjungirten Durchmesser $\gamma_1\delta_1$ zu $\varepsilon_1\varphi_1 \parallel NO$ wie in Fig. 25 *b* und 29 *b* und drehe $\gamma_1\delta_1$ in die Ebene $NO\omega F$ nach $\gamma\delta$, halbire $\gamma\delta$ geometrisch in P und lege P in die Bildfläche nach P_1. $\gamma_1\delta_1$ schneidet die Drehungsaxe NO in p, durch welchen Punkt auch $\gamma\delta$ geht. $\gamma_1 q \perp NO$. Es treffen sich: $\omega q\gamma$ und $\Delta\gamma_1\gamma$ in γ; ΔP und $\gamma_1\delta_1$ in P_1. Dann construire man die Endpunkte α_1, β_1 der mit NO parallelen Sehne $\alpha_1 P_1\beta_1$ der Ellipse 1 2 3 4 und führe $\alpha_1\beta_1$ wieder in die Ebene $NO\omega F$ nach $\alpha\beta \parallel NO$. $\alpha_1\beta_1$ trifft die 1 2 in *c*. Der Halbkreis 1 2 *f* schneidet 3 4 in *f*. $4e \parallel \alpha_1\beta_1 \parallel NO$, $bc \parallel fe$; $b\beta_1 \parallel 3\,4$; $P_1\alpha_1 = P_1\beta_1$. $\Delta\alpha_1\alpha$ und $\Delta\beta_1\beta$ treffen $\alpha\beta$ in α und β.

Stellt Δ einen Neben-Distanzpunkt vor, so liegt der Augenpunkt Ω d. i. die orthogonale Projection des Auges A in der Geraden $\omega\Delta$

und die Hauptdistanz $A\Omega$ ist $= \sqrt{\overline{\omega\Delta}^2 - \overline{\omega\Omega}^2}$. Stellt Δ einen Haupt-Distanzpunkt vor, dann ist ω zugleich Augenpunkt. Im ersten Falle ist die Ebene $\omega F\,NO$ unter einem beliebigen Winkel gegen die Bildfläche geneigt, im zweiten Falle steht $NO\omega F$ senkrecht zu der Bildfläche.

Diese Construction gilt also für alle Fälle. Moshammer behandelte aber einen bestimmten Fall[1]), wesshalb sich in seiner Construction auch Linien vorfinden, die hier entbehrt werden konnten. Die einzige Abweichung von dieser Construction besteht in der Art der Bestimmung der Sehne $\alpha_1\beta_1$, wozu Moshammer den Durchschnittspunkt der $\gamma_1\delta_1$ mit einer zu NO parallelen Geraden im Abstande $\omega\Delta$ von NO benützt, welcher Umstand durchaus nicht als Vereinfachung der Construction betrachtet werden kann und ganz gewiss wird $\alpha_1\beta_1$ auf diese Art auch nicht genauer erhalten. Vielmehr erwächst dadurch der wesentliche Nachtheil, dass die Hauptdistanz verhältnissmässig klein angenommen werden muss, wenn die Construction nicht noch complicirter werden soll und wahrscheinlich aus diesem Grunde hat Moshammer die Hauptdistanz fast nur $^1/_{10}$ vom Durchmesser des perspectivischen Bildes angenommen, wenn nämlich der Augenpunkt als Mittelpunkt desselben angesehen wird.

Die anderen Flächen werden in einer nachfolgenden Abhandlung: „Directe Constructionen der Contouren von Flächen der zweiten Ordnung“ behandelt werden.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Fluchtlinien der Parallelkreise von den Rotationsflächen Fig. 11...17*b*, 19, 22, 23, 25, 29 und die Tracen der durch das Auge A und die Rotationsaxen der bezüglichen Flächen gelegten Ebenen Fig. 20, 21, 26, 27, 28 blos wegen der besseren Vertheilung der Figuren parallel zu den Rändern der Tafeln gestellt wurden. Es versteht sich aber von selbst, dass die hier durchgeführten Constructionen auch in allen anderen Fällen angewendet werden können.

---

[1]) Centralprojection der Linien zweiter Ordnung. Fig. 1. Sitzgsb. d. kais. Akad. der Wissensch. Bd. XLIX.

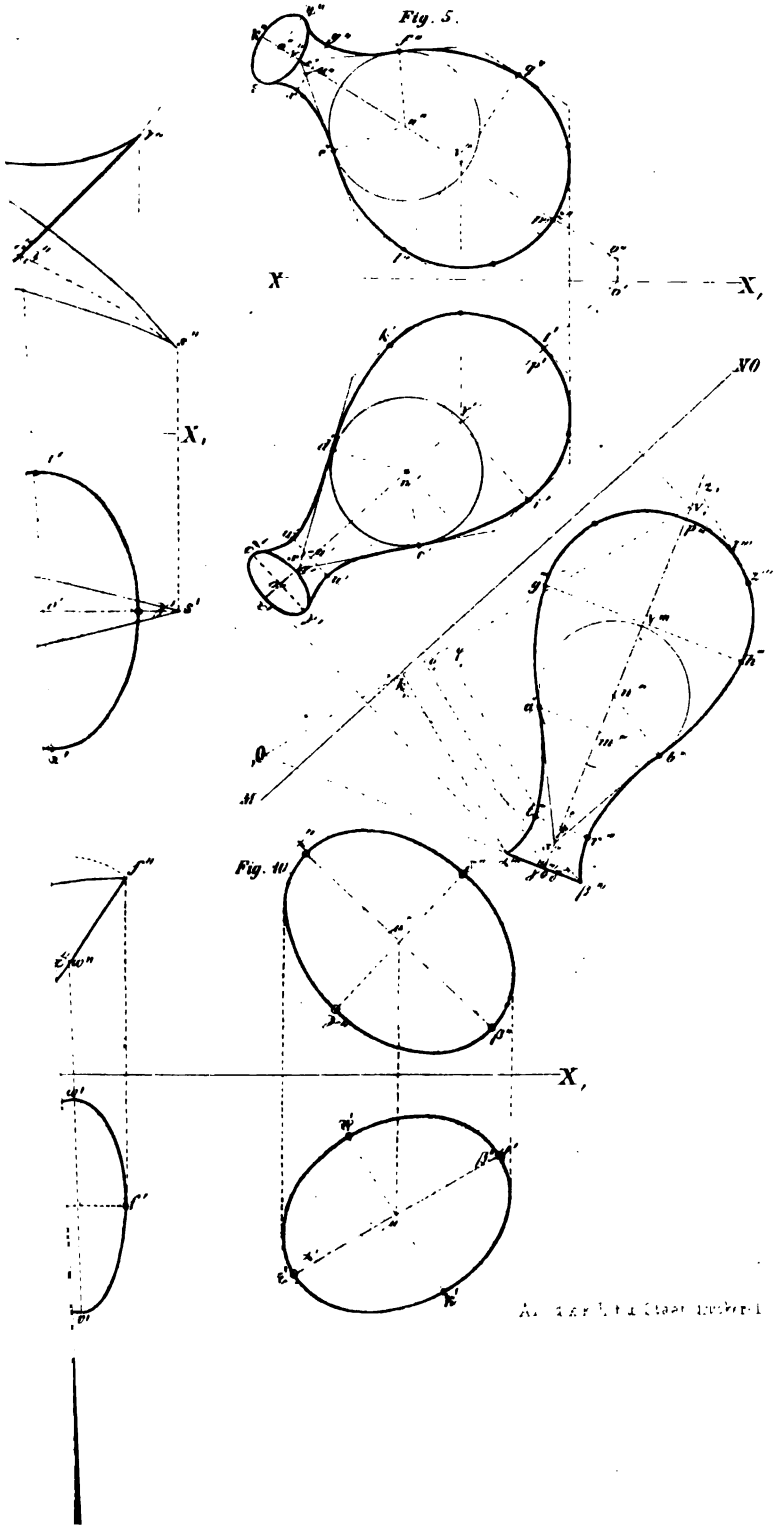


Fig. 5.
X
X,
X,
VO
O
M
Fig. 10
X,

Fig. 16.

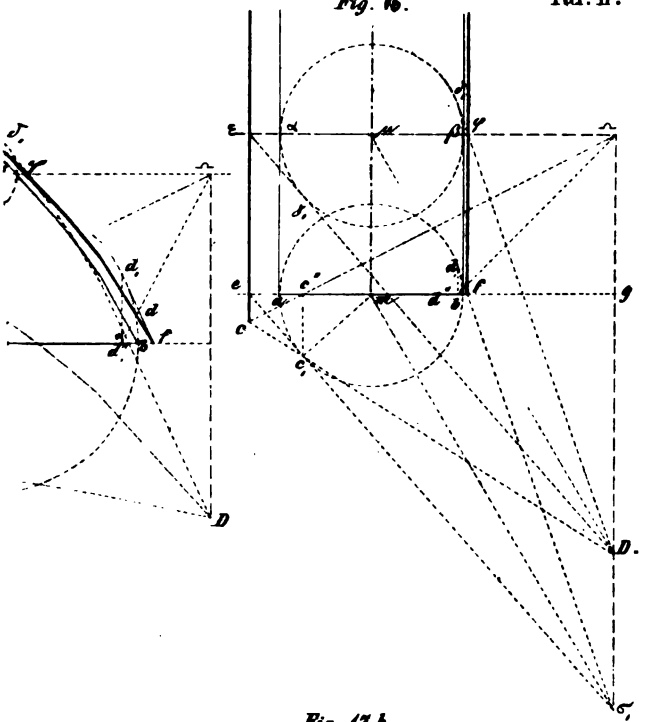
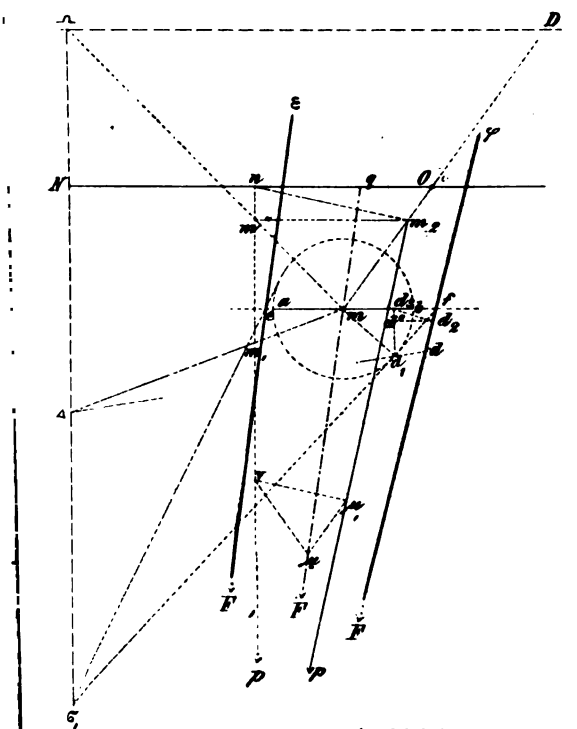


Fig. 17.b.



Aus d. k. k. Hof. u. Staatsdruckerei.

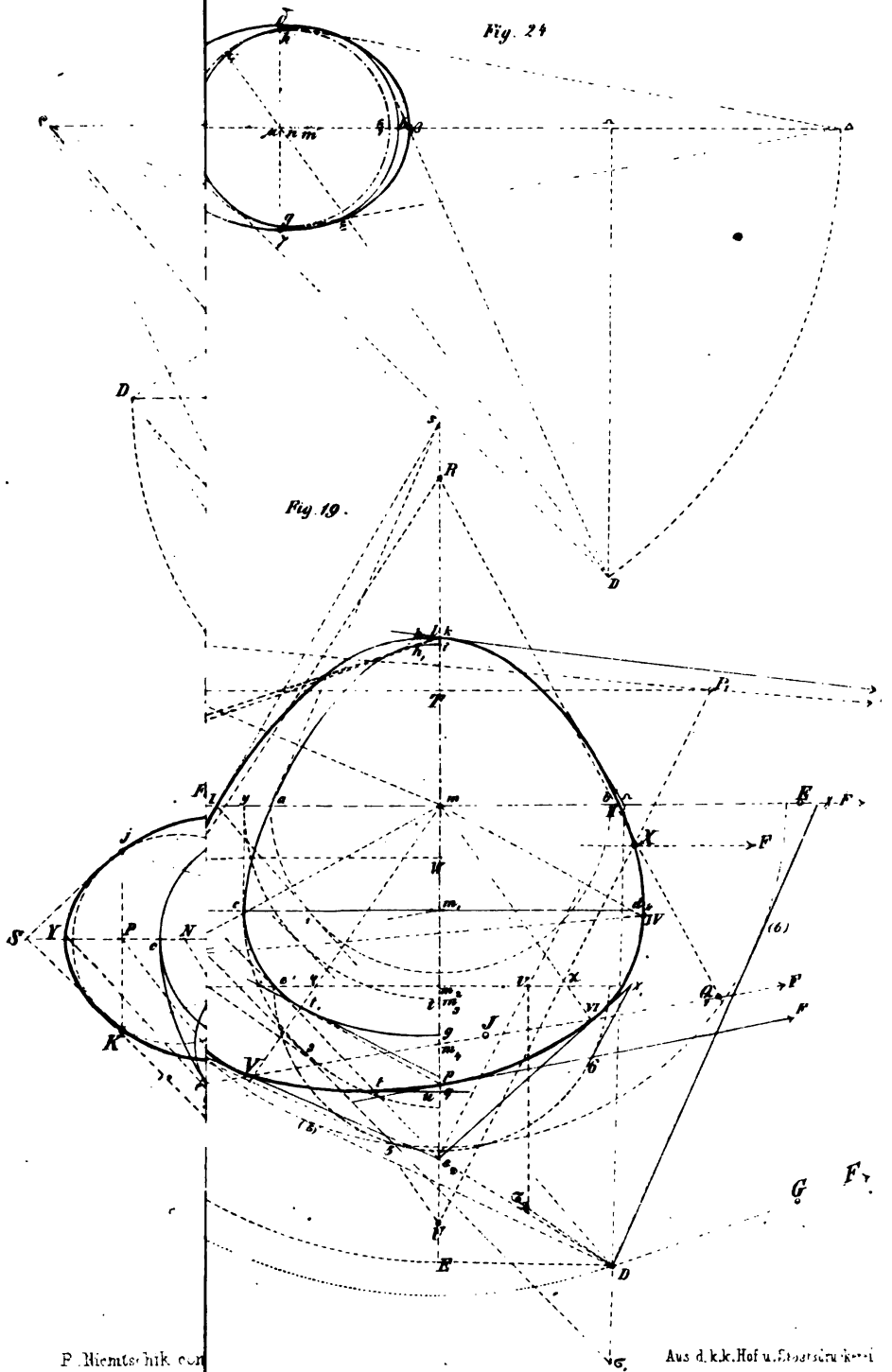


Fig. 24
Fig. 19.

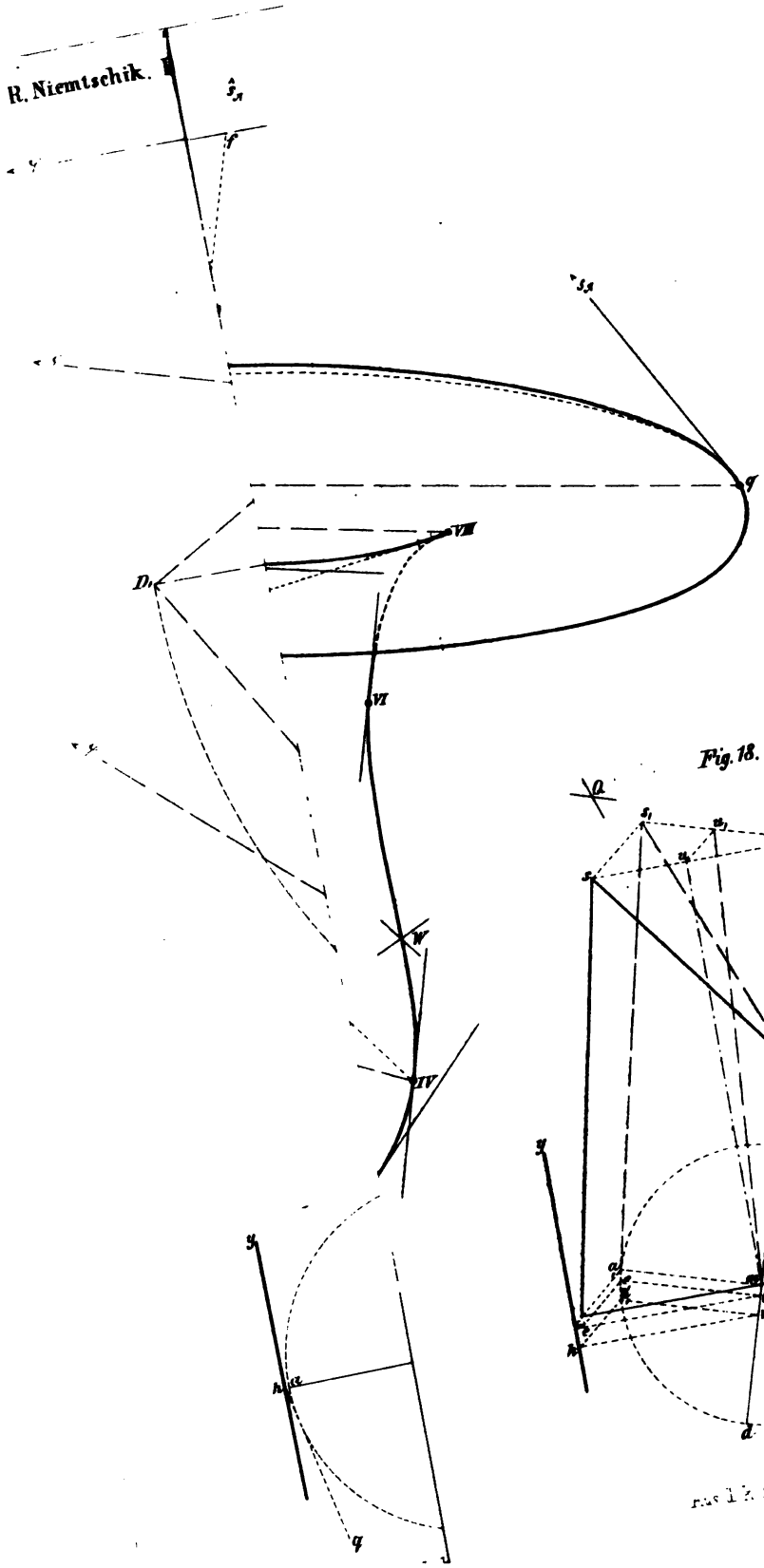
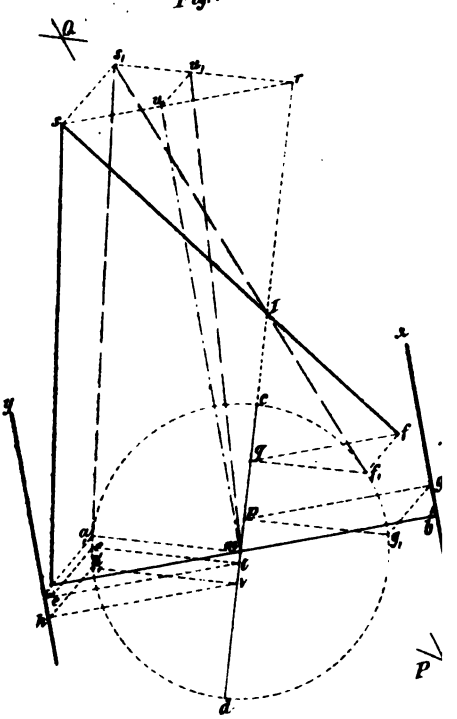


Fig. 18.



aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei

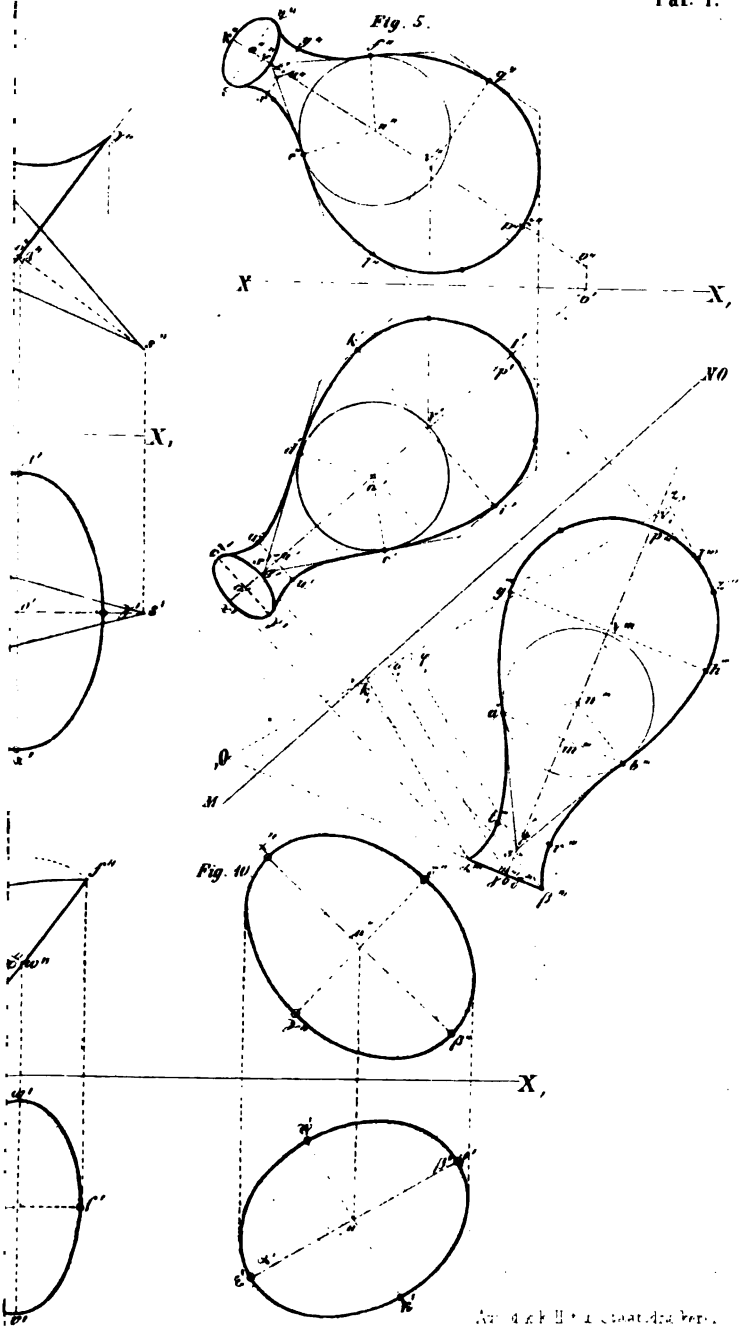


Fig. 5.
X
X,
X,
VO
O
M
Fig. 10.
X,

Über den Spiritus asper *und* lenis, *und über die Flüsterstimme, nebst Bemerkungen zur phonetischen Transscription der Kehlkopflaute.*

Von dem c. M. **Prof. Joh. Czermak** in Jena.

Die Auseinandersetzungen über den *Spiritus asper* und *lenis*, welche ich in Max Müller's Second Series seiner berühmten „Lectures on the Science of Language", London 1864, fand, so wie die beiläufigen Angaben von Helmholtz über die Flüsterstimme in dessen classischer Schrift „die Lehre von den Tonempfindungen", 2. Auflage, 1865, stehen mit meinen hierauf bezüglichen Beobachtungen, welche zum ersten Mal vermittelst des Kehlkopfspiegels angestellt waren (vergl. diese Sitzgsber. 1858, Bd. XXIX, p. 557 u. f.), nicht im Einklange, und dies veranlasste mich, die Untersuchung nochmals aufzunehmen und die Ergebnisse derselben im Folgenden ausführlicher zusammenzustellen.

Bezüglich der von mir eingeführten laryngoskopischen Technik, welche auch bei dieser Revision durchgehends benützt wurde, verweise ich auf den citirten Artikel in diesen Sitzungsberichten vom Jahre 1858, so wie auf meine Brochüre über den „Kehlkopfspiegel und seine Verwerthung," Leipzig, Engelmann, 2. Auflage, 1863.

I.

1. Beim freien, ruhigen Athmen liegen die Arytänoidknorpel auseinandergeschlagen und unbeweglich in der sie überkleidenden Schleimhautfalte; ihre *Proc. vocales* sind divergirend nach vorn und aussen gerichtet und halten die Stimmbänder, welche sich dabei gegen die Seitenwände des Kehlkopfes zurückziehen und abflachen, weit von einander entfernt; die Stimmritze bildet eine grosse, vorn zugespitzte, hinten stumpf abgerundete Öffnung, deren grösster Quer-

durchmesser in die Gegend der Spitzen der *Proc. vocales* fällt (vgl. a. a. O. Taf. II, Fig. 1, 2 und 7).

Je nachdem man den Umfang der Respirationsbewegungen mindert oder steigert, strömt die Luft entweder vollkommen geräuschlos ein und aus, oder sie bewirkt, indem sie sich an den unregelmässig gestalteten Wänden der offen stehenden Luftwege reibt und stösst, ein Geräusch von schwächerer oder stärkerer Intensität.

Findet das verstärkte Athmen durch den geöffneten Mund statt, so hört man ein einfaches schwächeres oder stärkeres Hauchen; wird der Mund geschlossen und strömt die Luft nur durch die Nase aus und ein, so nimmt das hauchende Geräusch einen etwas anderen — und zwar nasalen — Timbre an, und geht in ein Schnaufen über; in beiden Fällen ist die akustische Färbung des Inspirationsgeräusches von jener des Exspirationsgeräusches merklich verschieden.

Das bei unverengter Stimmritze hauptsächlich durch den (deutlich fühlbaren) Anfall der Luft gegen die Wände der Mund- und Nasenhöhle entstehende Exspirationsgeräusch ist als der einfache Ausdruck der Resonanz des Luftcanals, als das erste und einfachste, qualitativ charakterisirte Lautelement zu betrachten, und ich will es desshalb mit einen besonderen Namen belegen und als den „einfachen Hauch" bezeichnen.

2. Dieses Geräusch ist, wie auch Max Müller (Second Series, p. 127) ganz richtig hervorhebt, noch nicht unser Sprachlaut *h* oder *Spiritus asper*.

Es unterscheidet sich von letzterem, trotz aller sonstigen Verwandtschaft, sowohl durch seine akustische Färbung, als durch seine Bildungsweise.

Um den einfachen Hauch in ein *h* zu verwandeln, ist nämlich eine besondere Intention erforderlich. Die hierbei willkürlich eingeleiteten Veränderungen beschränken sich jedoch nicht blos — wie Max Müller irrthümlich meint — auf eine Vergrösserung des Exspirationsdruckes und auf die Hebung des Gaumensegels, dessen *Arcus pharyngo-palatini* zugleich gegeneinandergezogen werden, sondern sie beziehen sich, wie ich a. a. O. zuerst direct nachwies und bildlich darstellte (vgl. Taf. II, Fig. 3, 6 und 8) auch auf die Anordnung der Kehlkopftheile selbst, und darin — nämlich in der

willkürlichen Bildung einer „Enge" im Kehlkopf (resp. in der Stimmritze) — liegt eben der wesentliche Unterschied zwischen den eigentlichen *h*-Lauten, welche Intensität und Färbung dieselben auch besitzen mögen, und dem einfachen Hauch, bei welchem die Luft ganz frei durch die unverengte Stimmritze hervorströmt.

3. Der Kehlkopfspiegel zeigt nämlich, dass allemal in demselben Augenblicke, wo wir einen *h*-Laut hervorbringen wollen, die während der Bildung des einfachen Hauches weit auseinandergeschlagenen Arytänoidknorpel sich in der sie einschliessenden Schleimhautfalte erheben, sich mit ihren inneren Flächen und mit den Spitzen der *Proc. vocales* der Medianlinie zu nähern beginnen, so dass auch die Stimmbänder stärker vorspringend gemacht und gegeneinander gezogen werden; die Stimmritze büsst ihre weite zugespitzt-eiförmige Gestalt ein und verwandelt sich in eine engere oder weitere spaltförmige Öffnung.

Was die unmittelbare laryngoskopische Anschauung mit zweifelloser Gewissheit lehrt, wird durch die subjective Empfindung und durch die Auscultation des Kehlkopfes bestätigt.

Ist man aufmerksam auf sich selbst, wenn man vom völlig geräuschlosen Athmen ausgehend, den einfachen Hauch hervorbringt, so wird man finden, dass dazu wesentlich nichts anderes erforderlich ist als eine Verstärkung des Exspirationsdruckes; will man hingegen ein deutliches *h* aussprechen, so wird man wahrnehmen, dass man nicht nur den Exspirationsdruck verstärken, sondern dass man auch zugleich eine Veränderung im Kehlkopf vornehmen muss; man fühlt dies ganz deutlich an einer Art Druck oder Spannung, welche unter diesen Umständen in der Kehle entsteht.

Das Auscultiren des Kehlkopfes kann man am bequemsten vermittelst eines etwa 18″ langen Kautschukschlauches an sich selbst oder an Anderen vornehmen, indem man das eine Ende desselben sich in's Ohr steckt, das andere mit einen Glastrichterchen versehene Ende auf den zu auscultirenden Kehlkopf aufsetzt. Beim völlig geräuschlosen Athmen hört man natürlich gar nichts, so wie aber der einfache Hauch oder ein *h* hervorgebracht wird, hört man sofort ein Geräusch.

Dasselbe ist jedoch in beiden Fällen deutlich verschieden; im ersten Falle erscheint es mehr unbestimmt, so zu sagen diffus; im zweiten Falle hingegen entschieden localisirt — in der im Kehlkopf gebildeten „Enge".

So wie sich nämlich die Stimmritze zu verengern beginnt, so findet die durchströmende Luft an den einander genäherten Rändern derselben einen Widerstand und erzeugt daselbst ein besonderes Reibungsgeräusch, welches zum einfachen Hauch, der bei unverengter Stimmritze erzeugt wird und dem es daher abgeht, hinzukommen muss, wenn ein eigentliches *h* entstehen soll.

4. Dieses den *h*-Lauten eigenthümliche Reibungsgeräusch nimmt bei allmählich wachsender gegenseitiger Annäherung der Arytänoidknorpel und der Ränder der Stimmritze, und bei gleichzeitiger Vermehrung des Exspirationsdruckes an Stärke und Deutlichkeit zu.

Je mehr aber die Öffnung zwischen den Rändern der Stimmritze verengt wird und sich der zur Tonbildung geeigneten Form nähert, mit desto weniger Kraft darf der Exspirationsstrom hervorgetrieben werden, wenn ein blosses Reibungsgeräusch, nicht aber ein Ton entstehen soll.

Unter diesen Umständen kann begreiflicher Weise nur ein schwaches Reibungsgeräusch zu Stande kommen, denn wird der Exspirationsdruck vermehrt, so schlägt es sofort in einen Ton um. Brücke hatte ganz Recht, diesen schwachen *h*-Laut, welcher in der bereits bis zur Möglichkeit der Tonbildung verengten Stimmritze bei entsprechender Regulirung des Exspirationsdruckes erzeugt werden kann, nicht als ein besonderes, qualitativ charakterisirtes Lautelement anzuführen, aber freilich nicht desshalb, weil er, wie Brücke meint, „nicht allein für sich hervorzubringen sei, ohne alsbald bei rascherem Ausfluss der Luft in andere Laute überzugehen", sondern vielmehr desshalb, weil er nur gradweise von den übrigen *h*-Lauten oder Reibungsgeräuschen des Kehlkopfes verschieden ist und wahrscheinlich in dem Lautschatze gar keiner Sprache eine selbstständige Verwendung und Bedeutung hat.

Offenbar ist es dieses schwache Reibungsgeräusch, welches Purkyně als den „leisen Hauch" bezeichnet hat und — jedenfalls irrthümlich — für den *Spiritus lenis* der Griechen hält. Ich komme hierauf weiter unten nochmals zurück.

5. Je mehr also der Exspirationsdruck vergrössert wird, um das *h* kräftig und deutlich hervorzubringen, ohne die einander immer näher kommenden Stimmbänder in tönende Schwingungen zu versetzen, desto stärker werden die Arytänoidknorpel mit den Spitzen ihrer *Proc. vocales* nach innen gedreht, und desto deutlicher zerfällt

die Stimmritze durch die beiden einspringenden Winkel, welche sie machen, in zwei Abschnitte — in einen vorderen, von den Rändern der Stimmbänder begrenzten (Bänderglottis) und in einen hinteren, von den nach vorn convergirenden *Proc. vocales* und der hinteren Kehlkopfwand begrenzten (Knorpelglottis) — welche beide durch den mehr oder weniger verengten Raum zwischen den Spitzen der *Proc. vocales* unmittelbar in einander übergehen.

6. Um dem *h*-Laut mehr Asperität zu geben, wird der Exspirationsdruck noch mehr verstärkt und die Epiglottis etwas gesenkt, während ihr unteres convexes Ende, für welches ich den Namen „Epiglottiswulst" eingeführt habe [1]), in der Sagittalrichtung stärker vorspringend gemacht wird, so dass nicht nur der Kehlkopfeingang, welcher die Form einer dreitheiligen Öffnung annimmt (bestehend aus zwei seitlichen horizontalen, zwischen dem Kehldeckel und den *Lig. aryepigl.*, und aus einer mittleren senkrechten, zwischen den genäherten Innenflächen der Arytänoidknorpel übrigbleibenden Abtheilung), sondern auch der über den Stimmbändern befindliche Kehlkopfraum verengt wird.

Auch die Taschenbänder beginnen sich einander zu nähern und tragen zur Beschränkung des inneren Kohlkopfraumes bei.

Während also bei der Bildung unseres gewöhnlichen Sprachlautes *h*, die „Enge" einfach in der in ihrer ganzen Länge (besonders stark im knorpeligen hinteren Theil) klaffenden Stimmritze liegt, kommt Behufs der Hervorbringung der rauheren *h*-Laute noch eine „Enge" im oberen Kehlkopfraum und in der oberen Kehlkopfapertur *(Ostium laryngis)* hinzu [2]).

---

[1]) Meine Bezeichnung ist allgemein adoptirt worden; auch Henle braucht dieselbe in seiner grossen Anatomie — ohne jedoch, wie er es dort bei der übrigen Nomenclatur der Kehlkopftheile thut, den Autor anzugeben.

[2]) Offenbar ist es eine solche Anordnung der Theile, welche der Production des Hha der Araber entspricht, doch muss ich bemerken, dass mir zur endgiltigen Entscheidung sowohl dieser Frage, als auch der Frage über die Bildungsweise der übrigen *Gutturales verae* (he, Ain, Hamze), die laryngoskopische Untersuchung geborener Araber wünschenswerth, ja nothwendig erscheint. Ich habe zwar zuerst versucht (a. a. O. p. 576) diese Fragen durch laryngoskopische Beobachtungen an mir selbst zu lösen, nachdem ich von einem gebornen Araber jene Laute hervorzubringen gelernt hatte; allein ich bin seither wieder zweifelhaft geworden, ob ich damals die Laute auch wirklich genau auf dieselbe Weise

7. Die Einwärtsdrehung der Arytänoidknorpel kann so weit gesteigert werden, dass sich die Spitzen der *Proc. vocales* in der Medianlinie berühren, die Ränder der Stimmbänder innig an einander legen und die Stimmritze somit nur noch in ihrem hintersten knorpeligen Abschnitte als rundlich-dreieckiges Loch offen bleibt.

Wenn nun noch die Taschenbänder mit ihren vorderen Theilen in Berührung gebracht werden, der Epiglottiswulst auf dieselben niedergedrückt wird und mit seinem oberen breitesten Theile den auseinanderklaffenden Spitzen der Arytänoidknorpel immer näher, mit denselben wohl gar in Contact kommt, dann erscheint der ganze Kehlkopfraum in eine mehr oder weniger enge, unregelmässig gestaltete Röhre verwandelt, aus welcher die Luft mit einem sehr scharfen, blasenden Reibungsgeräusch hervorgetrieben werden kann, wenn der Exspirationsdruck gehörig gesteigert wird.

8. Alle eigentlichen *h*-Laute, von denen, wie ich oben (Nr. 1, 2 und 3) mit guten Gründen auseinandersetzte, der „einfache Hauch" zu unterscheiden ist, haben also das Gemeinsame, dass es Reibungsgeräusche sind, welche die Luft beim Hindurchströmen durch eine in der Stimmritze oder im ganzen oberen Kehlkopfraum willkürlich gebildete „Enge" hervorbringt. Die Form und Ausdehnung dieser Enge, so wie die Spannungsgrade der dieselbe begrenzenden Theile können sehr verschieden sein und sind als der eine Factor der *h*-Lautbildung zu betrachten. Der zweite Factor der *h*-Lautbildung, nämlich der Umfang und die Energie der Exspirationsbewegung, ist gleichfalls zahlloser Abstufungen fähig.

Aus der Combination und dem gegenseitigen Verhältniss dieser beiden Factoren — von etwaigen nebenhergehenden Veränderungen im Ansatzrohr (wie Hebung des weichen Gaumens, Näherung der *Arc. pharyngo-palat.*, etc.) abgesehen — resultirt die ganze Fülle der qualitativen und quantitativen Unterschiede der physiologisch überhaupt möglichen *h*-Laute oder *Spiritus asper*.

Im Allgemeinen lässt sich sagen, dass zur Bildung der rauheren und stärkeren *h*-Laute, welche stets eine bedeutendere Erhöhung

---

gebildet habe, wie es die Araber thun, und muss daher selbst eine Revision meiner eigenen und der späteren Angaben meiner Nachfolger, durch directe Untersuchung von National-Arabern als nothwendig hinstellen.

des Exspirationsdruckes verlangt, nur mittlere (d. h. weder zu grosse, noch zu kleine) Durchmesser der willkürlich verengten Stimmritze, und namentlich solche Formen derselben geeignet sind, bei denen ein vollständiges Auseinanderklaffen der Arytänoidknorpel selbst und der ganzen Knorpelglottis — (besonders nach hinten zu) — stattfindet; denn je weiter die Stimmritze ist, desto mehr nimmt die Möglichkeit zur deutlichen Entwicklung des für die *h*-Laute charakteristischen Reibungsgeräusches ab und schwindet endlich bei vollständig geöffneter Glottis ganz, indem dann nichts anderes als der „einfache Hauch" (s. oben *sub* 1) zum Vorschein kommen kann; je näher hingegen die Ränder der Stimmritze an einander rücken, desto leichter entsteht bei höherem Exspirationsdruck ein Ton statt des Reibungsgeräusches.

Die sanfteren und schwächeren *h*-Laute lassen sich hingegen bei jeder Form, Ausdehnung und Beschaffenheit der im Kehlkopf willkürlich erzeugten „Enge" durch entsprechende Regulirung des Exspirationsdruckes hervorbringen.

Brücke hat mich aufmerksam gemacht, hier, wo ich von der Modification der *h*-Laute durch den Exspirationsdruck spreche, ausdrücklich hervorzuheben, dass nicht Alles was physiologisch möglich ist, auch linguistisch in Betracht komme, indem der Exspirationsdruck für den Accent frei veränderlich bleiben muss, und desshalb die verschiedenen Arten des *h* wesentlich nach dem Zustande der Stimmritze und des oberen Kehlkopfraumes zu unterscheiden sind.

Es ist in der That gut, wenn man die Leser bei jeder solchen Gelegenheit daran erinnert zu unterscheiden, was so zu sagen als Kunststück ausgeführt werden kann und was in der Sprache wirklich Bedeutung hat.

II.

Ich gehe nun, auf Grundlage directer laryngoskopischer Beobachtungen zu einer Erörterung der Verschiedenheiten des vocalischen Anlautes über, welche uns zur vollständigen Einsicht in das Wesen des *Spiritus lenis* im Gegensatze zum *Spiritus asper* führen wird.

Betrachten wir zunächst die Vorgänge bei der Tonbildung in der Stimmritze überhaupt. Bei lauttönender Stimme wirken die

Stimmbänder bekanntlich als membranöse Zungen und bringen wie alle Zungen, eine Reihe discontinuirlicher, rythmischer Luftstösse hervor, welche, indem sie auf unser Ohr wirken, in uns eben die Empfindung des Tones erzeugen.

Damit die Stimmbänder durch den verstärkten exspirativen Luftstrom in tönende Schwingungen gerathen können, müssen die Arytänoidknorpel gegen einander gezogen und in Berührung gebracht [1]). die Knorpelglottis (s. oben I, *sub* 5) vollständig geschlossen oder

---

[1]) Anmerkung. So lange die Knorpelglottis in ihrem hintersten Abschnitt unverschlossen ist und so lange nicht wenigstens die Spitzen der gegen einander gezogenen Arytänoidknorpel in Berührung kommen, spricht der Ton in der That schwer an. Nichtsdestoweniger gelingt es, wie die laryngoskopische Untersuchung zeigt, auch unter diesen Umständen die Stimmbänder in tönende Schwingungen zu versetzen. Dabei tritt das merkwürdige akustische Phänomen ein, dass man so zu sagen ein tönendes *h* hört. Zwar liegt die Tonlosigkeit im eigentlichsten Wesen der *h*-Laute, indem dieselben, wie gesagt (s. oben I, 8), dadurch zu Stande kommen, dass die Luft, indem sie an den Rändern der verengten Stimmritze vorüberströmt, ein Reibungsgeräusch, nicht aber rhythmische, tönende Pulsationen hervorbringt; wo letztere entstehen, hören die physikalischen Bedingungen zur Entstehung des ersteren auf. Auch sagt schon Joh. Müller (Lehrb. 1840, Bd. II, pag. 236): „Die einzige Continua, welche ganz stumm und keines Mittönens oder Summens der Stimme fähig ist, ist das *h*, die Aspiration. Versucht man das *h* laut zu sprechen, so tönt das Summen der Stimme nicht gleichzeitig mit *h*, sondern folgt ihm und die Aspiration erlischt auf der Stelle sobald die Luft an den Stimmbändern zum Ton anspricht.“ Allein wenn die Knorpelglottis nach hinten mehr oder weniger klafft, während die freien Ränder der Stimmbänder durch die einspringenden Spitzen der *Proc. voc.* einander hinreichend genähert sind, dann kann, wie der Versuch und die laryngoskopische Beobachtung lehren, in der Stimmritze gleichzeitig ein Ton und ein *h* entstehen. Der Theil der hervorgetriebenen Exspirationsluft nämlich, welcher durch die Bänderglottis geht, wird in rhythmische Pulsationen versetzt und erzeugt einen Ton, der Theil hingegen, welcher durch die starre Knorpelglottis hervorströmt, veranlasst ein blosses Reibungsgeräusch — einen Spiritus von grösserer oder geringerer Asperität. Man kann also eben sowohl sagen, dass auf diese Weise ein Stimmritzenton entsteht, welcher durch ein *h* verunreinigt ist, als dass ein *h* unter Mittönen der Stimme zu Stande kommt. Allerdings ist es nicht ganz leicht die Bedingungen so herzustellen, dass das Ohr Ton und Reibungsgeräusch gleich deutlich wahrnimmt, denn beim Klaffen der Knorpelglottis spricht der Ton schwer und leise an, während der Ton leicht das Reibungsgeräusch verdeckt, wenn die Bedingungen der Tonbildung günstiger sind; — immerhin lässt sich das Phänomen bei einiger Übung mit überzeugender Deutlichkeit hervorbringen.

bedeutend verengt werden, so dass sich die Stimmbänder mit ihren Rändern entweder bis zur Berührung an einander legen oder doch bis zur Bildung einer engen, linearen Spalte nähern. Im ersten Falle werden die Stimmbänder bei den schwächsten wie bei den stärksten Schwingungen in den Augenblicken, wo sie sich einander nähern, sich geradlinig ganz eng an einander stellen, so dass sie die Stimmritze momentan vollständig schliessen und den Luftstrom ganz unterbrechen.

Im zweiten Falle, wo sich die Stimmbänder nur bis zur Bildung einer linearen Spalte genähert haben, wird der Luftstrom nicht vollständig unterbrochen, weil auch die schwingenden Stimmbänder sich niemals so sehr nähern, dass sie die Stimmritze momentan ganz verschliessen könnten [1]).

Es gibt also zwei Arten der Tonbildung; bei der ersten Art berühren sich die Stimmbänder und können dabei entweder nach Art der aufschlagenden oder der durchschlagenden Zungen wirken, je nachdem sie nämlich beim Schlusse auf und gegen einander schlagen oder aber nur eben bis zur Berührung eng sich zusammenstellen ohne gegen einander zu schlagen; bei der zweiten Art berühren sich die Stimmbänder gar nicht, sondern sie sind einander nur bedeutend genähert und wirken daher auch nie anders denn als durchschlagende Zungen. Selbstverständlich lässt sich ein nach der ersten Art gebildeter Ton ohne Unterbrechung der tönenden Schwingungen in einen Ton der zweiten Art überführen, und umgekehrt.

Beim vocalischen Anlaut können wir entweder einen Ton der ersten oder einen Ton der zweiten Art erzeugen wollen. Indem nun aber die Stimmritze ursprünglich entweder offen stehen oder luftdicht geschlossen sein kann, so gibt es nothwendig vier verschiedene Fälle des Anlautes, nämlich:

a) Die Stimmritze steht ursprünglich mehr oder weniger weit offen und es soll ein anlautender Vocalton der zweiten Art erzeugt werden;

b) die Stimmritze steht ursprünglich offen und es soll ein Ton der ersten Art entstehen;

c) die Stimmritze ist ursprünglich luftdicht geschlossen und es soll im Vocalton der zweiten Art intonirt werden; endlich

[1]) Helmholtz a. a. O. p. 164.

d) die Stimmritze ist ursprünglich geschlossen und es soll ein Ton der ersten Art zu Stande kommen.

ad a) Die Stimmritze, welche entweder ganz weit offen steht oder eine zur *h*-Lautbildung geeignete „Enge“ (s. oben) besitzen kann, muss sich Behufs der Tonbildung noch weiter verengen, bis sie die zum Tönen erforderliche spaltförmige Öffnung angenommen hat. Der continuirlich und mehr oder weniger kräftig hervorgetriebene Luftstrom wird natürlich so lange, bis nicht die erforderlichen Formen und Durchmesser der Glottis erreicht sind, an den Rändern der Stimmritze vorbeiströmen und ein schwächeres oder stärkeres Reibungsgeräusch, ein *h* erzeugen, welches selbst dann noch, wenn die zur Tonbildung erforderliche Enge bereits hergestellt ist, fortdauern und nicht eher aufhören wird, als bis die tönenden Schwingungen wirklich eingetreten sind. Unter diesen Umständen wird der Ton immer einem Reibungsgeräusch oder *h*-Laut unmittelbar nachfolgen und so zu sagen aus demselben hervorgehen.

ad b) In diesem Falle muss die offenstehende Stimmritze vermittelst der in gegenseitige Berührung gebrachten Ary-Knorpel und *Proc. vocales* erst vollständig geschlossen und den Stimmbändern die Stellung und Spannung als auf- oder durchschlagenden Zungen gegeben werden, bevor der gewünschte Ton entstehen kann. Während sich die Stimmritze durch Annäherung und endliche Aneinanderlagerung ihrer Ränder schliesst, kann der exspirative Luftstrom wohl ein Reibungsgeräusch erzeugen, aber dieses erlischt immer mit dem vollendeten Schluss der Stimmritze und der Ton bricht merklich später und scharf von demselben getrennt hervor (s. unten *ad d*).

Das Reibungsgeräusch, welches hier gar keinen Zusammenhang mit der darauffolgenden Tonbildung hat, kann allmählich erlöschen, indem man den Exspirationsdruck vor Eintritt des Glottisschlusses immer mehr und mehr schwächt oder ganz aufhebt, oder aber es kann plötzlich abschnappen, indem man den kräftig hervorgetriebenen Luftstrom durch die rasche Herstellung des Glottisschlusses unterbricht. Dabei entsteht dann ein eigenthümliches klappendes Geräusch, welches dem der tonlosen Verschlusslaute *(Tenues)* vollkommen analog ist (s. weiter unten).

ad c) Die Stimmritze ist hier im Zustande luftdichten Verschlusses und muss daher erst geöffnet und in eine klaffende Spalte

verwandelt werden, deren Form und Querdurchmesser eben der intendirten Tonbildung entspricht.

Bevor der hervorgetriebene Luftstrom die klaffenden Stimmbänder in tönende Schwingungen versetzen kann, muss derselbe allemal ein Reibungsgeräusch erzeugen, weil der Ton unter diesen Umständen nicht sofort anspricht, welches wie in dem *sub a* behandelten Falle unmittelbar in den Ton übergehen wird.

Geschieht die Lösung des Glottisverschlusses mit einer gewissen Plötzlichkeit und bei vergrössertem Exspirationsdruck, so geht dem Reibungsgeräusch, aus welchem erst der Ton hervorgeht, ein eigenthümliches explosives Geräusch voraus, das jenem der tonlosen Verschlusslaute ganz analog ist. Dieses Geräusch kann am deutlichsten und für sich allein wahrgenommen werden, wenn man auf die explosive Lösung des Glottisschlusses eine plötzliche und vollständige Erweiterung der Stimmritze folgen und den Luftstrom hernach vollkommen geräuschlos austreten lässt, oder aber denselben durch Anhalten der Exspirationsbewegung ganz unterbricht. Man kann sich auf diese Weise leicht überzeugen, dass die explosive Lösung sowohl, wie die plötzliche Herstellung (s. oben *ad b*) des Stimmritzenschlusses mit einem eigenthümlichen Geräusche verbunden ist, welches den akustischen Charakter des Geräusches der tonlosen Verschlusslaute besitzt. Bei der Bildung z. B. des *p* verhalten sich die Lippen des Mundes genau eben so wie hier die Lippen der Stimmritze.

ad d) In diesem Falle ist die Stimmritze von vornherein vollständig geschlossen, der Luftstrom ganz unterbrochen und, wenn die Stimmbänder als auf- oder durchschlagende Zungen gestellt sind, wird der gewünschte Ton bei genügender Steigerung des Exspirationsdruckes mit der ersten explosiven Eröffnung der Stimmritze in voller Stärke und Reinheit hervorbrechen.

Zur Entstehung eines Reibungsgeräusches oder *h*-Lautes ist keine Gelegenheit gegeben und selbst das eigenthümliche, die erste explosive Eröffnung der Stimmritze begleitende akustische Phänomen wird durch den sofort ansprechenden Ton verdeckt werden und für sich kaum noch unterscheidbar sein.

Die erörterten vier Fälle des Anlautes reduciren sich streng genommen auf zwei, indem der vierte mit dem zweiten, und der dritte mit dem ersten hinsichtlich der physikalischen Bedingungen der Tonbildung vollkommen identisch sind. Im vierten und im zweiten

Falle wird der Vocalton scharf und bestimmt eingesetzt und kommt so zu sagen explosiv zum Vorschein (explosiver Ton); im dritten und im ersten Falle geht er hingegen aus einem Reibungsgeräusch hervor und ist aspirirt (aspirirter Ton). Zwischen den beiden letzten Fällen besteht nur der Unterschied, dass das dem Ton voraufgehende Reibungsgeräusch einmal in der zur *h*-Lautbildung eingestellten Glottis entsteht und als ein gewöhnliches *h* beginnt *(ad a)*; das andere Mal in der bereits zur Tonbildung geeigneten Stimmritzenform hervorgebracht wird *(ad c)*, und als das schon oben (s. I, *sub* 4) erwähnte „schwache" Reibungsgeräusch auftritt, wobei es gleichgiltig ist, ob diese Stimmritzenform durch Verengerung der ursprünglich unverschlossenen oder durch Eröffnung der ursprünglich geschlossenen Stimmritze erzielt wurde, sobald beides nur geräuschlos geschieht. Ist dies nicht der Fall, dann fällt entweder jeder Unterschied von der *ad a* erörterten Form des aspirirten Tones fort, oder es geht dem Reibungsgeräusch das Geräusch der explosiven Eröffnung der Stimmritze voraus, wobei es denn leicht geschieht, dass, wenn der Ton sehr rasch anspricht, die Aspiration ganz unhörbar wird und der vocalische Anlaut den explosiven Charakter annimmt, wie in dem *ad d* erörterten Falle.

Nachdem gezeigt worden ist wie die physiologisch überhaupt möglichen Hauptformen des vocalischen Anlautes zu Stande kommen, hat es keine Schwierigkeit mehr zu einer richtigen und klaren Einsicht in das eigentliche Wesen des *Spiritus lenis* — beiläufig bemerkt, eine höchst unpassende Bezeichnung für den darunter zu verstehenden physiologischen und akustischen Vorgang — zu gelangen.

Dass die alten Griechen mit dem *Spiritus lenis* den explosiven Vocalanlaut, wo der Ton mit dem eigenthümlichen akustischen Phänomen der ersten explosiven Eröffnung der Stimmritze, als der einzigen (oft kaum merklichen) fremdartigen Beimischung, sofort in ganzer Stärke und Reinheit hervorbricht, bezeichneten, halte ich nämlich für eben so unzweifelhaft, als dass ihr *Spiritus asper* mit unserm *h* identisch war.

Haben sie doch den *Spiritus lenis*, als πνευμα ψιλον [1]), dem *Spiritus asper*, als πνευμα δασυ [2]) entgegengesetzt. Es gibt

[1]) ψιλός kahl, nackt, glatt, entblösst.

[2]) δασύς rauch, rauh, dicht bewachsen, haaricht.

aber, wie wir sahen, gar keine anderen wesentlich und gegensätzlich verschiedenen Formen des vocalischen Anlautes als die explosive und die aspirirte. In so fern nun der *Spiritus asper* ganz bestimmt die aspirirte Form des Vocalanlautes ist, kann dem *Spiritus lenis* nur die explosive Form entsprechen!

Überdies nannten die Griechen die „tenues" — ψιλα und stellten sie in demselben Sinne den „Aspiraten" als δασεα gegenüber, wie das πνευμα ψιλον dem πνευμα δασυ.

Was aber den Griechen in der Bildung der tonlosen Verschlusslaute einerseits und des vocalischen Anlautes mit dem *Spiritus lenis* andererseits analog [1]) erschien, um das gleiche Beiwort „ψιλός" zu rechtfertigen, kann sich nur auf die explosive Lösung eines Verschlusses (hier der Glottis, dort der verschiedenen Articulationsregionen im Ansatzrohre) beziehen, da es zwischen den beiden Lautbildungen absolut keine andere Analogie gibt.

Die Griechen haben also sicherlich unter ihrem *Spiritus lenis* den explosiven Vocalanlaut verstanden.

Endlich lässt sich noch folgende Stütze für diese Auffassung beibringen.

Es kann kaum fraglich erscheinen, dass die Griechen auch beim flüsternden Sprechen die anlautenden Vocale mit dem *Spiritus asper* von jenen mit dem *Spiritus lenis* wohl unterschieden haben werden. Beim Flüstern wird die Stimme durch ein Reibungsgeräusch, welches genau so wie die *h*-Laute (s. oben I.) in der klaffenden Stimmritze entsteht, ersetzt, und der wesentliche Unterschied zwischen dem geflüsterten vocalischen Anlaut mit dem *Spiritus asper* und jenem mit dem *Spiritus lenis* tritt ganz scharf und leicht erkennbar hervor.

Im ersten Falle hört man einfach ein anlautendes *h*, im zweiten Falle hingegen bricht das *h*, welches den Ton der Stimme ersetzt, mit dem den tonlosen Verschlusslauten analogen Geräusch der explosiven Eröffnung der Stimmritze hervor.

In diesem Vorgang liegt also auch beim lauten Sprechen das Charakteristische des *Spiritus lenis*. Wäre dem nicht so, so hätten die Griechen beim Flüstern den *Spiritus asper* vom *Spiritus lenis* gar nicht zu unterscheiden vermocht.

---

[1]) Diese Analogie haben wir schon oben *ad c* ausdrücklich hervorgehoben und als thatsächlich existirend nachgewiesen.

Was Purkyně den „leisen Hauch“ genannt und für den *Spiritus lenis* gehalten hat, hat nicht die entfernteste Beziehung zum *Spiritus lenis*, denn Purkyně's „leiser Hauch“ (s. oben I, sub 4. und II, ad *c*) ist nur gradweise, nicht aber gegensätzlich verschieden vom *Spiritus asper*.

Eben so unstatthaft ist es auch, wenn Max Müller (Second Series, p. 127) den *Spirius asper* dem *Spiritus lenis* in dem Sinne entgegensetzt, als ob ersterer mit unverengter, letzterer mit verengter Stimmritze gebildet würde, und als ob zwischen beiden wesentlich derselbe Unterschied bestände (a. a. O. p. 130), welcher bei anderen Lauten mit hart und weich, tonlos und tönend bezeichnet wird; der *Spiritus asper* den harten oder tonlosen, der *Spiritus lenis* den weichen oder tönenden Lauten entspräche. Dies ist falsch. Die laryngoskopische Untersuchung zeigte:

1. Der *Spiritus asper* wird nicht mit weitgeöffneter, sondern mit willkürlich verengter Stimmritze und bei einem zur gebildeten „Enge“ in bestimmtem Verhältniss stehenden Exspirationsdruck hervorgebracht.

2. Der *Spiritus lenis* hingegen entsteht durch explosive Eröffnung der geschlossenen Stimmritze.

Der Unterschied zwischen beiden hat also keine Analogie mit dem Unterschied, welcher zwischen *Tenues* und *Mediae*, zwischen tonlosen und tönenden Verschlusslauten existirt; am allerwenigsten ist der *Spiritus asper* mit den *Tenues* zusammen zu stellen, wie Müller thut, da die Bildungsweise jenes mit der Bildungsweise dieser auch nicht in einer einzigen Beziehung etwas Gemeinsames und Übereinstimmendes hat, während der *Spiritus lenis*, den Müller mit den *Mediae* parallelisirt (wie schon die Griechen durch das Beiwort „ψυλος“ andeuteten und ich oben direct nachgewiesen habe) gerade mit den *Tenues* physiologisch wenigstens in einer Hinsicht übereinstimmt.

Hierdurch wird aber, wie gesagt, noch nicht die entfernteste Analogie des Unterschiedes, welcher zwischen *Spiritus asper* und *lenis* besteht, mit jenem, der die Bildung der *Tenues* und *Mediae* charakterisirt, begründet.

Max Müller irrt hierin vollständig, denn die tonlosen oder harten Laute unterscheiden sich im Wesentlichen von den tönenden oder weichen bekanntlich nur dadurch, dass die ersteren mit ganz unver-

engter, die letzteren hingegen mit zur Ton- oder Geräuschbildung verengter Stimmritze gesprochen werden, d. h. jene sind stumm, diese haben den Ton der lauten oder das Reibungsgeräusch der Flüsterstimme, denn auch beim Flüstern unterscheiden wir *p* von *b*, *t* von *d*, *k* von *g* etc. Bei dieser Gelegenheit kann ich schliesslich die folgenden Bemerkungen nicht unterdrücken.

Unter jene Gegenstände der Physiologie der Sprachlaute, über welche, nachdem sie bereits durch genaue Untersuchungen hinreichend aufgeklärt worden sind, immer wieder von Zeit zu Zeit irrthümliche Meinungen und verwirrende Missverständnisse vorgebracht werden, gehört auch der Unterschied zwischen ***Tenues*** und ***Mediae***.

So hat Brücke in seinen „Grundzügen der Phys. und System. der Sprachlaute" Wien 1856, diesen, allerdings schon lange vor ihm richtig erkannten Unterschied gründlich und auf's Klarste auseinandergesetzt und erst kürzlich hat sich auch Helmholtz (a. a. O.) in gleichem Sinne hierüber ausgesprochen.

Max Müller citirt nun zwar Helmholtz's Sätze in extenso, allein eine spätere Stelle seines Buches beweist, dass er den fraglichen Unterschied nichts desto weniger unrichtig aufgefasst hat.

A. a. O. pag. 144 heisst es nämlich: „Surd and sonant are apt to mislead; for both *p* and *b* are classed as ***mutes*** it is difficult to sea how a mute letter could be sonant. Some persons have been so entirely deceived by the term sonant, that they imagined all the so-called sonant letters to be necessarily pronounced with ***tonic*** vibrations of the chordae vocales. This is physically impossible; for if we really tried to intone *p* or *b*, we should either destroy the *p* and *b*, or be suffocated in our attempt at producing voice." (!!)

„Both *p* and *b*, as far as tone is concerned, are aphonons or mute. But *b* differs from *p* in so far as, in order to pronounce it, the breath is for a moment checked by the glottis just as it was in pronouncing *v* instand of *f*."

Die directe laryngoskopische Untersuchung würde auch hier, wo es sich um Ermittelung des Verhaltens der Stimmritze handelt, das Mittel darbieten, alle Controversen in Zukunft abzuschneiden und die Zweifel ein für allemal zu erledigen.

Da aber die Articulation der Laute die Einführung des Kehlkopfspiegels und das Sehen durch den Mund unmöglich macht, so ist das gewöhnliche laryngoskopische Verfahren hier nicht anwend-

bar, und ich schlage desshalb einen anderen Weg der Untersuchung vor, welcher zum Ziele führen muss, sobald sich nur eine passende Gelegenheit finden wird, denselben zu betreten.

Bekanntlich ist es mir schon 1859 gelungen (vgl. „Der Kehlkopfspiegel und seine Verwerthung", 2. Aufl., Leipzig 1863, pag. 40) in Fällen, wo die Operation der Laryngotomie ausgeführt worden war, vermittelst eines kleinen, durch die gefensterte Athmungscanüle eingeführten Spiegelchens die Stimmritze und ihre Bewegungen von unten her genau zu beobachten.

Unter diesen Umständen kann der Patient alle Sprachlaute ungehindert articuliren, während der Beobachter die Stimmritze ununterbrochen im Auge behält. Um zu verhindern, dass die Luft durch die Athmungscanüle entweiche, und um den Patienten in Stand zu setzen die intendirten Laute auch ganz vernehmlich auszusprechen, müsste die äussere Öffnung der Athmungscanüle, nach Einbringung des Spiegelchens, vermittelst einer erwärmten, das Sehen nicht behindernden Glasplatte verschlossen werden; am einfachsten wäre es das kleine Spiegelchen unter einem Winkel von etwa 45° an das eine Ende eines Röhrchens zu befestigen, welches am anderen Ende mit einer Glasplatte verschlossen wäre und in die Athmungscanüle oder den Wundcanal eingeschoben werden könnte.

Diese Andeutungen mögen genügen. Über die Ausführbarkeit meines Planes kann kein Zweifel sein — es handelt sich nur darum, ein geeignetes Individuum zu finden, bei welchem die laryngotomische Wundöffnung noch nicht verheilt, dessen Stimmorgan aber bereits in normalem Zustande wäre.

Dann könnte man das Verhalten der Stimmritze nicht nur bei den *Tenues* und *Mediae*, sondern überhaupt bei allen Articulationsvorgängen direct feststellen.

Der Gegenstand ist für die Physiologie der Sprachlaute von solchem Interesse, dass ich keinen Anstand genommen habe, meine Ideen über denselben hier zu veröffentlichen, und ich füge die dringende Aufforderung an alle Fachgenossen hinzu, die sich etwa darbietende Gelegenheit zu den angedeuteten Beobachtungen ja nicht unbenützt vorübergehen zu lassen.

An grossen Krankenanstalten dürfte sich bald und leicht ein geeignetes Individuum finden, während mir, in meiner gegenwärtigen Stellung, nur ein kaum wahrscheinlicher Zufall ein solches zuführen könnte!

III.

Beim Flüstern wird der Ton der Stimme bekanntlich durch Reibungsgeräusche ersetzt, welche, wie ich zuerst im Jahre 1858 (diese Sitzungsber. pag. 576) nachwies, völlig identisch sind mit jenen der verschiedenen *h*-Laute und auf genau dieselbe Weise erzeugt werden [1]). Wenn daher Helmholtz sagt (a. a. O. p. 171, Anmerkung): „Es ist der hinterste Theil der Stimmritze zwischen den Giessbeckenknorpeln, welcher beim Flüstern als dreieckige Öffnung offen bleibt und die Luft passiren lässt, während die Stimmbänder an einander gelegt werden", so ist dies nicht ausschliesslich richtig und ist dahin zu berichtigen, dass sich Helmholtz's Angaben eben nur auf einen einzigen der vielen möglichen und wirklich vorkommenden Fälle beim Flüstern bezieht.

Meine Beobachtungen mit dem Kehlkopfspiegel zeigten nämlich unzweifelhaft, dass die Stimmritze beim Flüstern ausser der von Helmholtz angegebenen Form, factisch jede der früher besprochenen Formen und Durchmesser (s. oben I, Nr. 2—7) annehmen kann, welche bei entsprechender Modification des Exspirationsdruckes Veranlassung zur Entstehung der verschiedenen Reibungsgeräusche des Kehlkopfes, d. i. der *h*-Laute geben, denn auch beim Flüstern können wir leiser oder vernehmlicher sprechen.

IV.

Nachdem Brücke in dem XII. Abschnitt seiner „Grundzüge der Phys. und System. der Sprachlaute" Wien 1856, in welchem er die Grundsätze der phonetischen Transscription auseinandersetzt, die

---

[1]) Folgende interessante Erfahrung, welche ich seither gemacht habe, kann ich nicht umhin hier zu erwähnen.

Einem Franzosen, dem, wie allen seinen Landsleuten das Hervorbringen unseres *h* nicht gelingen wollte, gab ich den Rath — da er ja doch eben so gut mit Flüsterstimme sprechen könne, wie wir Anderen — beim vocalischen Anlaut, dem ein *Spiritus asper* vorhergeht, so zu beginnen, wie wenn er mit Flüsterstimme sprechen wollte, und dann erst den vollen Vocalton folgen zu lassen. Gleich beim ersten Versuch gelang ihm nun nach dieser Anleitung das Sprachkunststück vollkommen und überrascht rief er, wie Mr Jourdain im „Bourgeois gentilhomme" aus: „Voilà 40 ans, que je sais prononcer l'*h*, sans le savoir!"

Vocale und Consonanten besprochen hat, kommt er pag. 127 zu den jenigen Sprachlauten, welche er im System von beiden ausgeschlossen hat, nämlich zu den Kehlkopflauten, *gutturales verae*.

„Diesen Sprachlauten," sagt Brücke, „entsprachen Zeichen, die sich nur auf den Zustand des Kehlkopfes bezogen und nichts Bestimmtes über die Stellung der Mundtheile aussagten. Die einzige Bezeichnung dieser Art, die wir bis jetzt eingeführt haben, war ein horizontaler Strich unter der Linie, der die weit offene Stimmritze, und mithin die Stimmlosigkeit der auf der Linie stehenden Consonanten bedeutet. Die Consequenz erheischt es, dass wir auch die übrigen unter die Linie stellen. Hier bedürfen wir zunächst eines Zeichens für die *vox clandestina* . . . ."

Bezüglich des Zeichens für das gewöhnliche *h* bemerkt Brücke pag. 128: „Sein Zeichen ist schon gegeben; es ist das der weit offenen Stimmritze, also der horizontale Strich unter der Linie. Scheint es unpassend, diesen isolirt stehen zu lassen, so kann man nur darüber auf die Linie das Zeichen des unbestimmten Vocals setzen . . . Denn das Zeichen des unbestimmten Vocals bedeutet ja nichts als eine Stellung der Mundtheile, bei der der Mundcanal zwar vocalisch offen ist, aber doch so wenig charakteristisch gestaltet, dass kein bestimmt ausgeprägter Vocal entsteht."

„Wird diesem Zeichen kein Nebenzeichen unter der Linie mitgegeben, so hat es, wie dies für alle übrigen Zeichen auf der Linie gilt, selbstredend den Ton der Stimme und ist nur der unbestimmte Vocal; wird ihm der horizontale Strich, das Zeichen der erweiterten Stimmritze mitgegeben, so ist es *h* . . . u. s. w."

Nach meinen laryngoskopischen Untersuchungen kann ich nun hiermit nicht übereinstimmen.

Nicht dem *h*, bei welchem ja die Stimmritze eine „Enge" bildet, wohl aber dem einfachen Hauch, wie ich ihn oben (vgl. I, Nr. 1 und 2) charakterisirt und beschrieben habe, entspricht diese Transscription, und muss ihm, als dem einfachsten Lautelement reservirt bleiben.

Für das *h* bedarf es darum aber keines neuen Zeichens, indem Brücke bereits ein besonderes Zeichen für die Flüsterstimme angenommen hat. Dieses Zeichen kann gleichzeitig das Zeichen für *h* abgeben. Ja, bei der absoluten Identität des Geräusches der verschiedenen Abstufungen der Flüsterstimme mit den verschiedenen Gra-

den der Reibungsgeräusche des Kehlkopfes (respective der Stimmritze), welche das Wesen der *h*-Laute ausmachen, dürfen und können sie sogar keine verschiedenen Zeichen erhalten.

Dagegen erscheint es gerechtfertigt und nothwendig, dieses eine Zeichen irgendwie quantitativ abzustufen, um die leisen und sanften von den lauten und rauhen Reibungsgeräuschen zu unterscheiden.

Offenbar würden sich hierzu Hilfszeichen eignen, welche über der Linie, in einer Reihe mit jenen für die Accente uud den Hiatus stehen könnten, weil sie sich (wenn auch nicht ausschliesslich wie diese) auf den Exspirationsdruck beziehen.

Jena, den 6. Februar 1866.

XXIX. SITZUNG VOM 14. DECEMBER 1865.

Herr Regierungsrath Ritt. v. Ettingshausen im Vorsitze.

Der Secretär gibt die erfreuliche Nachricht, dass Herr Hofrath Ritt. v. Haidinger sich bereits in Reconvalescenz befinde.

Der kais. russische Geheimrath Herr Dr. K. E. v. Baer zu St. Petersburg dankt mit Schreiben $\frac{\text{vom 21. Nov.}}{\text{2. Dec.}}$ l. J. für das ihm übersendete Diplom über seine Wahl zum Ehrenmitgliede der Akademie.

Herr Max Buchner aus Graz übersendet eine Notiz „über das Fluorthallium".

Herr Dr. K. Diesing übergibt die Fortsetzung seiner „Revision der Prothelminthen, Abtheilung: Amastigen, Tribus II. Amastigen mit Peristom".

Herr Prof. Dr. E. Brücke legt eine Abhandlung des Cand. Med. Herrn Aurel Török vor, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss der ersten Anlagen der Sinnesorgane und der primären Schädelformation bei den Batrachiern" aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.

Herr Prof. Dr. R. Kner theilt die Resultate einer Untersuchung von 36 Arten aalähnlicher Fische (Muränoiden) bezüglich der Schwimmblase und der Sexualorgane mit.

Herr Bergrath Dr. Fr. Ritt. v. Hauer überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Choristoceras. Eine neue Cephalopoden-Sippe aus den Kössener Schichten".

Das c. M. Herr Dr. H. Militzer, Inspector der k. k. Staats-Telegraphen, zeigt und erläutert einen neuen, nach seiner Angabe construirten Elektromotor.

Herr Dr. G. Tschermak übergibt eine Abhandlung, betitelt: „Der Gabbro am Wolfgangsee".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Astronomische Nachrichten. Nr. 1562. Altona, 1865; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXI. Nr. 22. Paris, 1865; 4°.

Cosmos. 2e Série. XIVe Année, 2e Volume, 23e Livraison. Paris, 1865; 8°.

Generalkarte des Königreichs Böhmen, herausgegeben vom k. k. militär.-geograph. Institute im Jahre 1865. (4 Blätter in gross Folio).

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXVI. Jahrg. Nr. 50. Wien, 1865; 8°.

Karte von Bosnien, der Hercegovina und des Paschaliks von Novibazar. Entworfen und gezeichnet von Hauptmann Roškiewicz, lithogr. im k. k. militär.-geograph. Institute. 1865. (4 Blätter. Folio).

Land- und forstwirthsch. Zeitung. XV. Jahrg. Nr. 35. Wien, 1865; 4°.

Paugger, F., Einfache Lösung der Probleme der Schifffahrt im grössten Kreise etc. (Mit 2 stereographischen Erdkarten.) Triest, 1865; 4° & Folio.

Reader. Nr. 154, Vol. VI. London, 1865; Folio.

Reichenbach, K. Freiherr von, Ein anderer Versuch über Sensitivität und Od. 8°.

Reise der österr. Fregatte Novara um die Erde etc. Nautisch-physicalischer Theil, III. (letzte) Abtheilung. Mit 22 beigebundenen lithogr. Courskärtchen und einer verbesserten Auflage des Planes Nr. II. Wien, 1865; 4°.

— — Zoologischer Theil: *„Formicidae"* von Gustav L. Mayr. Wien, 1865; 4°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Année 1865. Nr. 3. Moscou; 8°.

Verein für Naturwissenschaften, siebenbürgischer, zu Hermannstadt: Verhandlungen und Mittheilungen XVI. Jahrg. Nr. 1—4. Hermannstadt, 1865; 8°.

Wiener medizin. Wochenschrift. XV. Jahrg. Nr. 98. Wien, 1865; 4°.

Wochen-Blatt der k. k. steierm. Landwirthschafts-Gesellschaft. XV. Jahrg. Nr. 3. Gratz, 1865; 4°.

Über das Fluorthallium.

Von **Max Buchner.**

Unter den Verbindungen des Thalliums, welche von Crookes, Lamy, Kuhlmann, Werther und Anderen dargestellt wurden, ist des Fluorthalliums keine Erwähnung gethan. Da ich durch die Güte des Herrn Generaldirectors Dr. Hasenclever in Aachen thalliumhaltigen Flugstaub aus der chemischen Fabrik „Rhenania“ bei Stollberg erhielt, beschäftigte ich mich mit der Darstellung von Thalliumverbindungen und habe Folgendes zu berichten. Der Flugstaub stammt aus einem Canale eines Pyritofens, in welchem belgische Schwefelkiese zur Erzeugung von Schwefelsäure verbrannt werden. Er ist von graulicher Farbe und bildet eine zusammenbackende Masse.

Diese wurde zerrieben, mit Wasser ausgelaugt und die erhaltene concentrirte Flüssigkeit filtrirt, mit Salzsäure versetzt, wobei sich bald ein weisser Niederschlag von Thalliumchlorür ausschied.

Derselbe wurde mit Wasser gewaschen, mit concentrirter Schwefelsäure in einer Platinschale bis zum Entweichen der überschüssig zugesetzten Schwefelsäure erhitzt, das zurückgebliebene Thalliumsulfat in kochendem Wasser gelöst, heiss filtrirt und erkalten gelassen. Es schied sich reines Thalliumsulfat aus. — Ein Theil desselben in heissem Wasser gelöst, wurde mit überschüssigem Barytwasser versetzt, zum Kochen erhitzt, durch Kohlensäure der gelöste Baryt ausgefällt und filtrirt.

Das Filtrat, welches kohlensaures Thalliumoxydul enthielt, wurde in einer Silberschale concentrirt, und die concentrirte Lösung in einer Platinschale mit wässriger Fluorwasserstoffsäure bis zur schwachsauren Reaction versetzt, zur Trockne gebracht.

Die weisse Verbindung in Wasser gelöst, der freiwilligen Verdunstung überlassen, lieferte zahlreiche Krystalle, die von der Mutterlauge getrennt, im Exsiccator getrocknet wurden. Nach mehrmaligem Umkrystallisiren wurden deutliche Krystalle erhalten.

Die Krystalle des Fluorthalliums sind farblos, von starkem Glasglanze, vorwaltend Oktaëder combinirt mit dem Hexaëder. Das Fluorthallium ist im Wasser leicht löslich; ein Theil desselben löst sich in 1¼ Theil Wassers von 15° Celsius, von kochendem Wasser ist viel weniger erforderlich, im Weingeist ist es dagegen nur wenig löslich. Die wässrige Lösung des Fluorthalliums reagirt alkalisch. Beim Erhitzen schmilzt es und verflüchtiget sich. Nach dem Erkalten hinterbleibt es farblos, krystallinisch. Das Fluorthallium wird durch das Sonnenlicht allmählich violett gefärbt; Papier mit Fluorthalliumlösung getränkt, dem Sonnenlichte ausgesetzt, färbt sich ebenfalls aber schwach violett. An der Luft bleibt das Fluorthallium unverändert.

Zur Fluorbestimmung wurde das Fluorthallium in wässriger Lösung mit essigsaurem Kalk gefällt; die Thalliumbestimmung in ammoniakalischer Lösung mit Jodkalium ausgeführt, und das gefällte Jodthallium mit Ammoniakflüssigkeit ausgewaschen.

Die Fluorbestimmung gab	8·56%	berechnet	8·53% Fl. 19
Die Thalliumbestimmung	91·42%	„	91·47% Fl. 204
gefunden . . .	99·98	berechnet	100·00 Fl. Fl. 223

Das Fluorthallium vereiniget sich mit dem Fluorwasserstoff. Diese Verbindung krystallisirt ebenfalls in Combinationen des Oktaëders mit dem Hexaëder. Sie ist stark glänzend, luftbeständig. Das Fluorwasserstoff-Fluorthallium löst sich im gleichen Gewichtstheil Wasser und reagirt sauer. Bei 100° Celsius ist die Verbindung unveränderlich, bei höherer Temperatur zerfällt sie in Fluorwasserstoff und in Fluorthallium.

Die Thalliumbestimmung gab 83·92% Thallium, die Rechnung verlangt . . . . . 83·95% „

Die Verbindung besteht also aus HFl. TlFl.

Beiträge zur Kenntniss der ersten Anlagen der Sinnesorgane und der primären Schädelformation bei den Batrachiern.

Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.

Von Cand. Med. **Aurel Török.**

(Mit 1 Tafel.)

Die Theorie über die embryonalen Blätter, wie sie von Remak aufgestellt und in den letzten Jahren nahezu allgemein angenommen wurde, lässt uns namentlich in Bezug auf das äussere von ihm sogenannten sensorielle Blatt in vieler Hinsicht unbefriedigt.

Remak [1]) nennt bekanntlich den centralen und verdickten Streifen des äusseren Keimblattes die Medullarplatte, während er das ganze übrige äussere Keimblatt als Hornblatt bezeichnet. Es ist mithin eine Eintheilung gegeben, welche von den früher gebräuchlichen Eintheilungsgründen abweicht, und wie ich zeigen werde, auch der Natur der Sache nicht entspricht.

Wir sind seit Pander [2]) und Baer [3]) daran gewöhnt, die embryonalen Blätter nach parallelen Lagen oder Zellenschichten zu theilen, während Remak aus einem continuirlichen Zellenstratum ein centrales Stück heraushebt, um es mit einem eigenen Namen zu belegen. Die Gründe zu einem solchen Vorgange waren für ihn scheinbar zwingend, denn er hat seine Theorie durch die Untersuchungen von Hühnerembryonen aufgebaut, und bei diesen existirt zweifellos ein äusseres Keimblatt, in dessen Mitte ein verdickter Streifen die Anlage des Centralnervensystems bildet; da aber aus dem peripheren Theile dieses Blattes auch die hornigen Gebilde hervorgehen, so blieb ihm die Wahl entweder das Centralnervensystem und die Horngebilde in derselben Anlage zu suchen, oder ein Blatt,

---

[1]) Untersuchungen über d. Entwick. etc. Berlin, 1855.

[2]) Beiträge zur Entwick. des Hühnchens. Würzb., 1817.

[3]) Über Entwick. der Thiere. Königsberg, 1837.

welches keine strenge Theilung darbietet, dennoch als theoretisch zweigetheilt aufzufassen. Remak hat es wohl selbst ausgesprochen, dass seine Auffassung auf vielerlei Schwierigkeiten stosse; dass er beispielsweise gezwungen war die Anlagen des Geruchs- und des Gehörorgans aus dem bezeichneten Hornblatte entstehen zu lassen; eine Annahme, die uns a priori sehr befremdend ist. Bekanntlich hat schon Johannes Müller die Sinnesorgane als vorgeschobene Partien des Centralnervensystems betrachtet und Remak's Theorie der embryonalen Blätter machte diese Vorstellung illusorisch. Es musste dabei ferner befremdend erscheinen, dass das Geruchs- und Gehörorgan in ihrer Uranlage auf einen ganz anderen Abschnitt der embryonalen Blätter bezogen werden müssen, als der wesentlichste Theil des Gesichtsorgans, die Retina nämlich.

Remak hat, wie gesagt, seine Theorie aus der Beobachtung von Hühnerembryonen gewonnen, und er wollte sie consequenter Weise als allgemein giltig hinstellen. Er fühlte aber selbst, dass das Hornblatt für die nackten Amphibien nicht durchführbar sei. Er wusste, dass hier das äussere Keimblatt thatsächlich aus zwei Blättern besteht, und er hat diesem Verhältnisse Zwang anthun müssen, um sie in ein Hornblatt zusammen zu fassen.

Stricker [1]) ist in seinen Untersuchungen über die ersten Anlagen im Batrachier-Ei von der Eintheilung Remak's wesentlich abgegangen; er zeigte, dass im Batrachier-Ei ursprünglich zwei Hauptschichten vorhanden sind, welche sich nach ihrer Entstehung und nach ihrem Baue wesentlich von einander unterscheiden. Die Art wie Stricker diese beiden Hauptschichten für den Aufbau der Organe verwerthen lässt, stimmt annäherungsweise mit dem überein, was wir uns von den zwei Blättern (animales und vegetatives), wie sie von Pander und Baer aufgestellt wurden, im Allgemeinen vorstellen. Nach Stricker zerfällt aber jedes dieser beiden Blätter abermals in zwei Lagen, so dass er von innen (Visceralhöhle) nach aussen gezählt vier Blätter beschreibt, deren inneres dem Remak'schen Drüsenblatte, deren zweites dem Remak'schen motorischen Blatte entspricht. Diese beiden Blätter entstehen nach Stricker aus der inneren Hauptschichte. Es ist dadurch eine vollständige Über-

[1]) Zeitschr. f. w. Zoolog. Bd. X.

einstimmung mit derjenigen Auffassung gegeben, wie sie allgemein für den Hühnerembryo hingestellt ist, im Gegensatze zu Remak, welcher für die Batrachier das motorische und das Drüsenblatt ihrer Entstehung nach als ganz differente Gebilde ansah und mithin für diese letzteren einen Entwicklungsmodus annahm, für den wir weiter bei anderen Wirbelthieren bisher kein Analogon finden. Das dritte Blatt von innen gezählt nimmt Stricker als ein selbstständiges Nervenblatt an und das vierte endlich identificirt er mit der Umhüllungshaut Reichert's oder dem Hornblatte Remak's[1]).

Stricker's neue Angaben bezogen sich damals nur auf die allererste Bildung, und es ist nun fraglich, ob sich dieselben für den weiteren Bau durchführen lassen; oder ob wir guten Grund haben das Hornblatt in dem Sinne, wie es Remak allgemein gültig hinstellte, für die Batrachier zu verwerthen.

Wenn wir von embryonalen Blättern sprechen, so können wir selbstverständlich nur eine frühe Entwicklungsperiode in's Auge fassen, denn im Verlaufe der Entwicklung verschmelzen die Blätter an verschiedenen Punkten so mannigfach, dass die ursprünglichen Verhältnisse gar nicht mehr zu erkennen sind; es wird gewiss niemand eine Blättertheorie an einer dreimonatlichen menschlichen Frucht aufstellen. Wenn also Stricker's Blatteintheilung für die erste Anlage richtig ist, dann ist sie für eben diejenigen Thiere (Batrachier) überhaupt richtig. In den Untersuchungen über die Entwicklung des Kopfes der Batrachier hat Stricker in Fig. 15[2]) ein Präparat abgebildet, welches die Theilung des Embryonalleibes in vier Blätter deutlich ersichtlich macht, und zwar auf einem Schnitte, auf welchem schon die *Chorda dorsalis* abgegrenzt erscheint. An diesem Schnitte sieht man oberhalb der Chorda zwei deutlich gesonderte Zellenschichten oder Blätter, und die Wahrheit der Zeichnung vorausgesetzt, kann es keinem Zweifel unterliegen, dass das Central-

---

[1]) Reichert's Umhüllungshaut ist nach pag. 10 „Entwickelungsg. im Wirbelth." ein einzelliges Blatt. Remak's Hornblatt hingegen ist zwei oder mehr Zellen tief. Er sagt aber nichtsdestoweniger dass er Reichert's Umhüllungshaut als Hornblatt bezeichne. Stricker's Beziehung auf die Identität dieser beiden Bezeichnungen ist also wohl in den Aussagen der Urheber derselben begründet, nichtsdestoweniger aber unrichtig.

[2]) Archiv v. Reichert und Du Bois, 1864. I. H.

nervensystem von der darüber liegenden Umhüllungsschichte deutlich getrennt ist.

Ist also zu einer früheren Zeit des Embryonallebens die Anlage für das Centralnervensystem in einer Zellenschichte zu suchen, welche von der darüber liegenden Umhüllungsschichte getrennt erscheint, so ist kein Grund vorhanden, diese beiden in eines zusammen zu fassen, wenn es auch zweifellos ist, dass sie später mit einander verschmelzen. Es verschmilzt ja stellenweise auch das motorische Blatt mit den äussern Keimblättern und mit dem Drüsenblatte, dennoch fassen wir diese gesondert auf, weil sie in einer frühen Entwicklungsperiode getrennt sind. Remak hat eben keine Durchschnitte von Batrachier-Eiern in deren nöthigen Altersstufen gesehen und hat also diese ursprüngliche Trennung auch nicht wahrgenommen.

Folgen wir nun der Entwicklung der einzelnen Sinnesorgane.

In der Nähe des vorderen Abschnittes des Centralnervensystems findet man sehr frühzeitig zu beiden Seiten desselben die Anlagen der Geruchsorgane, und zwar machen sich diese äusserlich durch die Bildung der sogenannten Geruchsgrübchen kenntlich. Die Fig. 1, 2, 3 (bei *gg*) lehren uns, dass dieses Grübchen von einer verdickten doppelten Wand umgeben ist. Es ergibt sich auf diesen Querschnitten, dass hart an der Grenze der Verdickung die beiden Blätter, in welche diese übergeht, scharf von einander gesondert sind. (Fig. 3 zeichnet ein älteres Stadium, wo die beiden Zellenschichten des Geruchorgans mit einander schon inniger verschmolzen sind.) Ja auf Querschnitten von in Chromsäure gehärteten Präparaten heben sie sich von einander ab, und es ist leicht erklärlich, wenn behauptet wird, dass man die äussere Schichte mit der Nadel ablösen kann. An der Stelle des Riechgrübchens selbst sind diese beiden Schichten an etwas älteren Thierchen förmlich an einander gewachsen, sie liegen wenigstens so dicht zusammen, dass man eben noch eine Trennungsspur wahrnimmt; es lässt sich aber deutlich und bestimmt die tiefere Lage in das isolirte zweite und die oberflächliche Lage in das isolirte erste oder äussere Blatt verfolgen. Bei einer solchen Lage der Dinge erschiene es gar nicht consequent diese beiden Schichten in ein embryonales Blatt zusammen zu fassen, desswegen, weil sie an der Stelle des Riechgrübchens fest zusammenhängen; es erschiene gar nicht consequent zu sagen, das Riechorgan entwickle sich aus demselben Blatte wie die hornigen Gebilde, wenn ich sehe, dass der tie-

fere Theil des Riechgrübchens ein Continuum eines Blattes ist, welches mit der Anlage der Horngebilde nichts mehr gemeinschaftlich hat.

Wenn ich nun zeige, dass zu beiden Seiten des Centralnervensystems diese Blätter noch in einer späteren Periode getrennt bleiben und dass sie nur in der Gegend des Riechgrübchens mit einander verschmelzen, und wenn wir das früher Erwähnte in's Auge fassen, dass nämlich auch an der sogenannten Medullarplatte Remak's nach aussen von dem motorischen Blatte zwei Zellenschichten existiren, welche ursprünglich von einander getrennt sind und erst dann verschmelzen; so haben wir genug wichtigen Grund die tiefere Zellenlage von der oberflächlichen gesondert aufzufassen und zu sagen: **am vordersten Abschnitte des Thieres entwickelt sich aus der tieferen Zellenlage im Centrum das Centralnervensystem und zu beiden Seiten das Riechorgan. An beiden aber, sowohl am Centralnervensystem, wie auch am Riechorgan verschmilzt die eigentliche Anlage dieser Gebilde mit der äusseren Zellenschicht, so dass man nachträglich die Verschmelzungsspuren kaum mehr antrifft.**

In diesem Sinne hat auch Schenk [1]) den Aufbau des Labyrinthbläschens auseinandergesetzt und gerade an diesem Gebilde sehen wir uns mehr als am Gehirn und Riechorgan zur Annahme gedrängt, dass die beiden äussern Zellenlagen als gesondert aufzufassen sind. Denn Schenk hat gezeigt, dass sich die tiefere Zellenlage von der oberflächlichen nach Art eines Säckchens abhebt, um das Labyrinthbläschen zu bilden. Hier kann also nicht einmal jener scheinbare Einwand erhoben werden, dass die zwei Blätter behufs der Bildung eines Organs verschmelzen; denn das äussere Zellenblatt bleibt an der Bildung des Gehörbläschens der Batrachier ganz unbetheiligt.

Wie sich der übrige Theil dieser zweiten Zellenschichte für den Aufbau des Embryo verwerthet, wissen wir bis jetzt nicht.

Wenn wir aber von einem embryonalen Blatte sehen, dass es das Centralnervensystem, das Riechorgan und das Hörorgan *bildet;* so können wir vorläufig dasselbe nicht anders denn als ein Blatt, für Nervenanlage bestimmt, auffassen; eben so gut wie wir auch bei andern Blättern, deren vollständige Umwandlung wir nicht kennen, aus den uns bekannten Vorgängen ihren Charakter vorläufig angeben.

---

[1]) Sitzungsberichte Bd. L.

Es erübrigt mir nun noch Einiges über das Sehorgan hinzufügen, um zu sehen wie sich das tiefere Blatt auch zu diesem Sinnesorgane verhält. Die Anlage des Centralnervensystems vertieft sich bekanntlich zur Rückenfurche zur Zeit als die äussere umhüllende Zellenschicht mit der tieferen nervenbildenden verschmilzt. Aus der Rückenfurche wird bekanntlich der Centralcanal und aus dem vorderen Abschnitte des Centralcanals stülpt sich zu beiden Seiten die sogenannte primitive Augenblase hervor. Was also die Hauptmasse der ausgestülpten Augenblasenwand bildet, ist nichts anderes als die tiefere, oder die sogenannte Nervenschicht. Bei der bekannten Verwerthung dieser Augenblase für den Aufbau des Auges haben wir also die Retina aus derselben embryonalen Schichte zu suchen wie das Centralnervensystem, wie das Riechorgan und das Hörorgan, und damit ist jene Einheit hergestellt, wie sie Johannes Müller angedeutet hat.

Die äussere Wand der primitiven Augenblase, Fig. 3, stösst aber nach unserer jetzigen Aufstellung nicht mehr an ein Blatt, welches für Horngebilde bestimmt ist, sondern an ein tieferes Blatt, welches wir als Nervenblatt auffassen; wenn nun die primäre Augenblase von aussen her eingestülpt wird und in der sofort entstandenen tellerförmigen Grube die ersten Spuren der Linse angetroffen werden, so haben wir gar keine Berechtigung die Linse als ein epidermidales Gebilde zu betrachten; denn sie liegt zwischen zwei Lagen der nervenbildenden Schichte, welche ursprünglich ein einziges continuirliches Blatt bildeten und nur durch Einstülpung oder Ausstülpung des Centralorgans zur nahen Berührung gerückt wurden. Fig. 3 zeichnet die primäre Augenblase um die Zeit, wo sie bereits von aussen her eingedrückt erscheint, wo aber noch die Communication derselben mit dem Centralcanal deutlich ersichtlich ist; nach aussen von dieser primären Augenblase sieht man einen Theil der Linsenanlage und die nach aussen gelegenen beiden Zellenschichten, welche sich nach vornehin in das Riechorgan fortsetzen.

Wenn die hier gezeichneten Verhältnisse bei Hühnern und bei Säugethieren, wie wir gestützt auf einen so ausgezeichneten Forscher wie Remak annehmen wollen, nicht so klar zu Tage liegen, wie bei den Batrachiern; so kann uns dies doch keinen Grund abgeben die einfachen und klaren Bilder aufzugeben, um dafür der Allgemeinheit zu Liebe unklare einzutauschen. Dass aber das Hornblatt Remak's

unsere Anschauung über die Entwicklung der Sinnesorgane und des Centralnervensystems nicht geklärt hat, dies gibt Remak selbst zu, indem er sagt: „Die Bildung eines so schroffen Gegensatzes zwischen Hirn und Hornsubstanz in der Keimanlage ist die räthselhafteste Erscheinung, die uns im Verlaufe der Entwicklung begegnet."

Nach dem bisher Gesagten, müssen wir also die Eintheilung Remak's für die Batrachier fallen lassen und das äussere Keimblatt nicht mehr in eine centrale Medullarplatte und in ein peripheres Hornblatt theilen; sondern nach ihren zwei parallelen Lagen in eine äussere einzellige Umhüllungsschicht oder Hornblatt, wenn man schon den Namen beibehalten will, und in eine tiefere als Anlage des Centralnervensystems und der drei Sinnesorgane, von welchen bisher die Rede war.

Die Abbildungen, welche ich dieser Schrift beilege, zeigen zwischen dem Centralnervensystem und den beiden äusseren Schichten noch eine an verschiedenen Stellen verschieden dicke Zellenschichte. (Siehe Fig. 1 und 2 *Sh*., *Sv.*)

Die Durchschnitte, welche hier abgebildet sind, wurden von vorne nach rückwärts durch den Kopf des Embryo in der Höhe der Riechorgane ausgeführt. Die Schnitte sind annäherungsweise parallel mit der Ebene der Wirbelplatten. Schnitte, welche auf die eben bezeichnete Richtung senkrecht geführt wurden, lehrten mich, dass die bezeichnete Zellenschichte mit dem ersten Schienenpaare (Stricker) oder, in sofern wir uns auf den vordersten Abschnitt beziehen, mit dem ersten Visceralbogen (Reichert) in Zusammenhang stehen. Da sich ursprünglich an der obersten Grenze des Centralnervensystems kein Boden findet, aus dem wir die Entstehung dieser Zellenschicht ableiten könnten, so bleibt uns nichts anderes übrig, als den Ausgangspunkt ihrer Entwicklung dort zu suchen, wohin uns die Continuität der Zellenlage führt. Wir müssen also sagen: **der vorderste Abschnitt des ersten Schienenpaares wächst nach aufwärts, um das Centralnervensystem von vorne abzugrenzen.** Wir

wissen aber anderseits theilweise durch die Abbildung von Ecker *(Icones physiologicae)*, theils durch die Beschreibung Stricker's; dass die seitlichen Anlagen für die nächsten Hüllen des Centralnervensystems gleichfalls von dem ersten Schienenpaare ausgehen; indem dieselben zu beiden Seiten von hinter den Augen angefangen einerseits über den Stiel *(Nervus opticus)* der primären Augenblase nach vorne, und anderseits an der Seite des Centralnervensystems nach obenhin wachsen. Stricker hat sich ferner dahin ausgesprochen, dass sich aus dem ersten Schienenpaare nicht nur die Anlage von Knorpeln und Muskeln des Gesichts, sondern auch die Anlage der gesammten Schädelbasis bis an die Hörorgane entwickelt; und es ist durch meine Abbildungen eines weiteren ersichtlich gemacht, in welcher Weise auch der vordere Abschnitt des primären Schädels aus demselben Schienenpaare hervorgeht.

Die Abbildungen in der Fig. 1 und 2 lehren ausserdem, dass sich diese Zellenmasse Fig. 1, 2, *Sv.* von vorne nach rückwärts zwischen das Riechorgan und Centralnervensystem einschiebt, und zwar sehen wir diese Zellenmasse gegen das Riechorgan mit einer dünnen Spitze auslaufen. Was uns am Durchschnitte als Spitze erscheint, kann thatsächlich nur einer Verdünnung dieser Zellenmasse entsprechen; denn sonst könnte ich nicht diese Spitze an mehreren aufeinander folgenden Schnitten treffen.

Die Zellenschicht, welche sich also von der vordersten Grenze des ersten Schienenpaares nach aufwärts zwischen dem Centralnervensystem und den beiden äusseren Embryonalblättern fortsetzt, schiebt sich nach rückwärts mit einer dünnen Platte zwischen Centralnervensystem und Riechorgan ein (siehe Fig. 1 und 2 *B.*), und mithin ist dieses letztere ausserhalb jenes Cavums gelegen, in welchem das Centralnervensystem zu liegen kommt.

Die Zellenmasse, Fig. 1, 2 *Sh.* welche auf dem Durchschnitte sich mit einer Spitze von hinten nach vorne zwischen Riechorgan und Centralnervensystem einschiebt, ist in der seitlichen Ansicht schon von Ecker, von Remak und von Stricker gesehen und abgebildet worden. Sie wird von diesen Autoren als eine Fortsetzung jener Zellenmasse betrachtet, welche von der Wurzel des ersten Schienenpaares, das ist von hinter dem Auge ausgehend über den Stiel der primären Augenblase *(Nervus opt.)* nach vorne bis zum Riechorgan sich fortsetzt. (Siehe Fig. 1, 2 *Sh.*)

Wir sehen also auf unseren Querschnitten zwei Zellenmassen sich durch solche dünne Platten begegnen, um zusammengenommen das Riechorgan vollständig vom Centralnervensystem zu scheiden.

Mithin ist also das Centralnervensystem nach innen von den beiden äusseren Blättern eingehüllt von Zellenmassen, welche einmal von der Wurzel des ersten Schienenpaares hinter dem Auge ausgehen und ein anderesmal vom vorderen Abschnitte des ersten Schienenpaares, dort wo der vorderste Abschnitt des Centralnervensystems auf ihnen aufliegt, das heisst von jenem Theile aus, welchen Reichert als ersten Visceralfortsatz beschrieben hat.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1 u. 2. *N.* centrales Nervensystem.
Sh. Zellenmasse aus dem hintern Abschnitte der Schienen.
Sv. Zellenmasse aus dem vordern Abschnitte nach oben fortgesetzt.
B. Verbindung zwischen beiden.
n. Nervenbildende Schichte.
u. Umhüllende Schichte.
gg. Geruchsgrübchen.
„ 3. *C. K.* Centralcanal.
R. Retina.
L. Linse.
n, u, gg, wie früher.
y. Labyrinthbläschen.

Fig. 1.

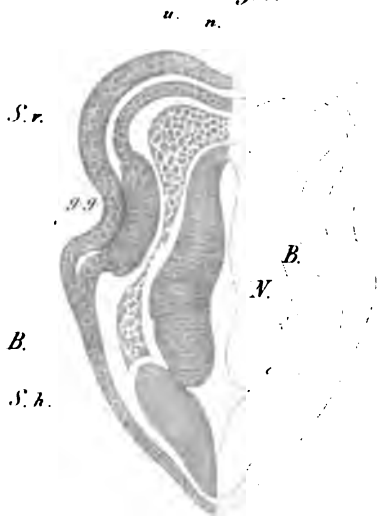


Fig. 2.

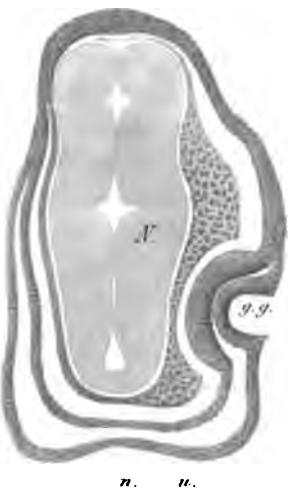
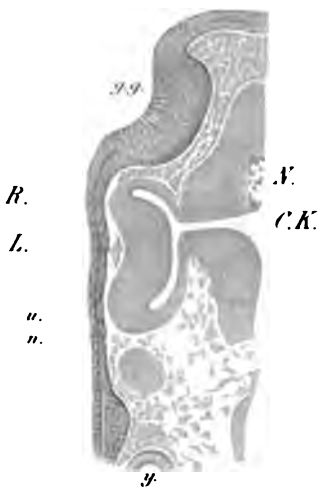


Fig. 3.



Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. LII. Bd. II. Abth. 1865.

Druck a. d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei i. Wien.

Über das Verhalten des Jodsilbers im Lichte.

Von Dr. W. Reissig.

(Vorgelegt in der Sitzung am 7. December 1865.)

Die zahlreichen Abhandlungen [1]), die wir über das Verhalten des Silberjodids für sich oder in Contact mit salpetersaurer Silberlösung bei stattfindender Belichtung besitzen, bewegen sich zumeist nicht auf streng wissenschaftlichem Gebiete, sondern enthalten vorwiegend die Resultate von Versuchen, die zur Erklärung gewisser photographischer Processe angestellt worden sind.

Es würde die mir hier gesteckten Grenzen weitaus überschreiten, wenn ich die gesammte hierauf bezügliche Literatur anführen wollte, so vieles und schätzbares Material sie auch enthält. Das Wissenswertheste daraus hat bereits Dr. Vogel in einer Abhandlung publicirt, die sich in Poggendorff's Annal. Bd. 195, S. 497 findet. Aber das wird, mit aller Achtung vor den vorhandenen Leistungen, doch gestattet sein auszusprechen, dass das vorhandene Material immer noch ungenügend, zum Theile voller Widersprüche ist und im Ganzen den Anspruch auf eine abgeschlossene und erschöpfende Behandlung des beregten Gegenstandes nicht erheben kann; dass wir zugestandenermassen von einer sicheren Kenntniss der Vorgänge noch weit entfernt sind.

Zu derselben hat es meines Erachtens zunächst die Methode der Forschung nicht gebracht, die allermeist die Gründe für eine stattfindende oder nicht stattfindende Zersetzung aus der Combination der Resultate einer vorwiegend experimentellen Forschung ableitet. Ich

---

[1]) Hunt, Researches on Light. 1844, Seite 78. — Hardwich, Manual der photogr. Chemie, Seite 16, 35 u. s. w. — Schnauss, Archiv der Pharmacie Bd. 74, 1; Nachschlagebuch, Seite 81 etc. S. 148 etc. — Moser, Pogg. Annal., Bd. 56, S. 185 etc. — Vogel, Pogg. Annal. Bd. 195, S. 502. — Barreswil & Davanne, Chim. photogr., p. 82. — Liesegang, Phot. Archiv. 1861, Seite 161; Carey Lea, American Journ. of Photogr. 1865. June, u. s. w.

will davon absehen, dass man nirgends ein besonderes Gewicht darauf gelegt findet, nur mit absolut chemisch reinen Materialien zu arbeiten. Aber auch nur in seltneren Fällen hat man genaue analytische Methoden zu Hilfe gezogen, die doch unumgänglich nothwendig sind als untrügliche Belege für die, wenn ich so sagen darf, indirecten Beweise der Experimente.

Ich kann nicht umhin, um diese meine Ansicht zu begründen als Beispiel Das anzuführen, dass noch immer mit Gründen für oder gegen die Ansichten gestritten wird: ob das Jodsilber, wenn unter AgO NO_5-Lösung belichtet, eine chemische Zersetzung erfährt oder nur eine physikalische Veränderung, die in allen Schriften als s. g. „moleculare Umänderung" bezeichnet ist. Noch Niemanden ist es eingefallen, diese „moleculare Umänderung" als eine Inductionserscheinung, die der wirklichen chemischen Zersetzung vorausgeht, zu betrachten und in diesem Sinne näher zu untersuchen. Aber wie mangelhaft sind selbst unsere Kenntnisse über die von einigen Autoren behauptete stattfindende Zersetzung. Scheidet sich (dies angenommen) wirklich Jod aus dem Silberjodide aus, so entsteht doch die Frage, ob es die vorhandene Silberlösung zersetzt und dann entweder unter Bildung von Jodsilber, Salpetersäure und Sauerstoff ($AgO, NO_5 + J = AgJ + NO_5 + O$) oder unter Bildung von JO_5 und Ausscheidung von N ($AgO, NO_5 + J = AgOJO_5 + N$) oder vielleicht noch in anderer Weise — in jedem Falle aber unter Wegnahme von Ag aus der vorhandenen Silberlösung. Aber da man bis jetzt nicht versucht hat analytische Beweise für eine Zersetzung, oder für die eine oder die andere Zersetzungsweise zu finden, so fehlt eben den aufgestellten und wenn auch durch gewisse Thatsachen unterstützten Vermuthungen eine wirklich wissenschaftliche Begründung.

Ein Gleiches gilt von einer von Dr. Vogel aufgestellten Theorie [1]), die ich der Vollständigkeit wegen noch erwähne, wonach: „Diejenigen Körper, welche freies Jod leicht absorbiren und dasselbe chemisch binden, sensibilisirend auf Jodsilber wirken, d. h. dessen Zersetzung veranlassen". Wie man sieht, ist die Fassung dieses Ausspruches höchst unklar, da zwischen Absorbiren und eine chemische Zersetzung erleiden immerhin der wesentlichste Unterschied besteht; aber auch zu allen von ihm aufgeführten Beispielen fehlen

[1]) Photogr. Mittheilungen 1865. S. 21.

die analytischen Untersuchungen und Belege, deren eben eine wissenschaftliche Theorie sich nicht entschlagen kann.

An dem vorgeführten Beispiele, dem wichtigsten für die Theorie der gesammten photographischen Verfahren, glaube ich gezeigt zu haben, wie unsere Kenntnisse nicht nur vielfach noch unvollständig sind, sondern auch auf welchem Wege man vorzugsweise hoffen darf die Lücken zu beseitigen, dessen Schwierigkeiten allerdings sehr grosse sind. Von diesen Gesichtspunkten aus bin ich denn auch bestrebt gewesen, einen Beitrag zur Lösung der so viel behandelten Frage zu erringen und wende mich nunmehr direct zu der mir gestellten Aufgabe, die ich in Folgendem präcisire:

1. Welche nachweisbare Veränderung erleidet das reine Jodsilber im Lichte;

2. Welche Veränderung das reine Jodsilber in Contact mit Lösungen von $AgONO_5$ im Lichte;

3. Welche Veränderung erleidet das reine Jodsilber in Contact mit Lösungen von Ferrocyankalium im Lichte.

I. Versuchsreihe.

Reines Jodsilber.

Die Bildung von AgJ erfolgt, wie bekannt, nach zwei verschiedenen Weisen:

1. indem man die Lösung eines Silbersalzes mit Hydrojod oder mit einem wässerigen Jodmetalle niederschlägt; oder

2. indem man beide Körper direct auf einander wirken lässt.

Beiden auf solche Weise dargestellten Präparaten werden wir unsere Aufmerksamkeit schenken.

A. Die Reindarstellung eines absolut reinen AgJ ist kaum zu erreichen, wenn man dasselbe durch Zusammenbringen von $AgONO_5$ und KJ bereitet. Fällt man die Verbindung aus überschüssiger Höllensteinlösung, so hängen derselben Spuren von $AgONO_5$ auf das Hartnäckigste an; durch Niederschlagen von AgJ aus überschüssiger KJ-Lösung lässt sich nur ein Niederschlag darstellen, der, wenn auch in höchst geringen Mengen, KJ enthält, was sich gleichfalls durch Aussüssen mit Wasser schwer entfernen lässt. Wie bekannt basiren auf diese Thatsachen das verschiedene Verhalten der auf die eine oder die andere Art dargestellten Verbindung gegen

das Licht. Es schien desshalb von besonderem Interesse ein absolut reines Jodid darzustellen. Ich will dabei noch flüchtig erwähnen, dass die Reindarstellung salpetersauren Silbers und namentlich des Jodkaliums eine höchst mühsame und schwierige ist. Das letztere enthält fast in allen Fällen Spuren von Chlorverbindungen, neben solchen von jodsaurem Kali, kohlensaurem Kali mitunter u. s. w. Die Trennung und Nachweisung sehr geringer Quantitäten von Chlor neben grossen Mengen Jods gelingt mit Sicherheit kaum nach den bekannten Methoden. So bleiben aber auch immer hinsichtlich der Reinheit der erzeugten Verbindung Zweifel, die die Resultate der ganzen Untersuchung in Frage stellen können. Es bedarf z. B. nur des Hinweises, dass AgCl bei der Belichtung freies Cl abgibt, das in AgO NO_5-Lösung eine Zersetzung hervorruft, die möglicherweise freies Jod vermuthen lässt etc.

Auf die von Field [1]) gefundenen Thatsachen gestützt, dass frisch gefälltes AgCl sowohl wie AgBr durch Digestion mit einer concentrirteren Jodkaliumlösung derart zerlegt werden, dass sich aus denselben AgJ erzeugt, während Chlor- und respective Bromkalium in Lösung gehen, bin ich zur Darstellung eines reinen AgJ in folgender Weise verfahren: Es wurde eine grössere Menge durch Zersetzung von AgO NO_5-Lösung mit KJ erhaltenen AgJ bei Lichtabschluss in überschüssigem KJ aufgelöst, das vollkommen jodsäurefrei und sonst rein war. Die Lösung wurde nach längerem Stehen filtrirt und dann tropfenweise und unter beständigem Umrühren in eine sehr grosse Menge reinsten Wassers gebracht. Das hierdurch gefällte Jodsilber wurde durch Decantiren auf das Sorgfältigste gewaschen und dann getrocknet. Alle diese Operationen wurden unter Lichtabschluss ausgeführt. Die Anwendung eines Centrifugalapparates erleichtert, beiläufig bemerkt, in hohem Grade die Operation des Auswaschens.

Wenn man so dargestelltes Jodsilber der directen Bestrahlung im Sonnenlichte aussetzt, so gewahrt man keine sichtbare Veränderung und nur die Stellen, an welchen das Licht am intensivsten wirken konnte, färben sich etwas dunkler gelb. Untersucht man die belichtete Verbindung, so findet man, dass sie sämmtlichen Lösungsmitteln und Reagentien gegenüber sich vollkommen wie nicht belichtetes

[1]) Journal f. prakt. Chemie. 73, 404.

Jodsilber verhält; eine chemische Veränderung hat also nicht stattgefunden.

Es schien mir aber nicht uninteressant das Verhalten eines reinsten AgJ im Lichte zu prüfen, wenn es demselben in sehr dünnen Schichten dargeboten wird. Zu dem Ende überzog ich eine Glasplatte mit Collodium, das mit reinstem KJ versetzt war, brachte dieselbe in eine Lösung von $AgO\,NO_5$ (unter Lichtabschluss), wusch ab und übergoss nun das auf der Platte befindliche AgJ mit einer (mit AgJ gesättigten) Lösung von KJ. Dieselbe liess ich mindestens 6 Stunden einwirken, so zwar, dass dann nur, wie oben gezeigt, reinstes AgJ auf der Platte vorhanden sein konnte. Dieses im Collodion höchst fein zertheilte AgJ zeigte, bei directem Sonnenlichte (unter einem Negative) lange Zeit und ohne Ausschluss thermischer Wirkungen belichtet, oftmals sehr deutliche Bilder, aber die chemische Untersuchung liess keine chemische Veränderung nachweisen. Wurde dagegen eine solche Platte in diffusem Lichte und im Schatten lange unter einem Negative exponirt, so erhielt ich zwar kein sichtbares Bild noch Anzeichen einer chemischen Veränderung, jedoch die Stellen der Collodion-Jodsilberplatte, die von dem Lichte stärker getroffen waren, eigneten sich vorzugsweise das metallische Ag an, welches sich ausscheidet, wenn man auf die Platte eine (Essigsäure haltende) Eisenvitriollösung mit einigen Tropfen Silberlösung versetzt bringt.

B. Jodsilber, welches man durch directes Zusammenbringen von höchst fein zertheiltem metallischen Ag und Jod darstellen kann, zeigte kein anderes Verhalten wie die nach dem beschriebenen Verfahren dargestellte Verbindung.

Dagegen ergaben sich besondere und zum Theile höchst merkwürdige Unterschiede, wenn man Jod auf eine Collodiumschichte wirken lässt, die höchst fein zertheiltes Ag enthält.

Die Darstellung solcher Platten zunächst bewerkstelligte ich folgendermassen: Ein mit reinstem KJ versetztes Collodium wurde auf eine Platte gebracht, diese nach der bekannten Weise in ein Silberbad und mit der anhängenden Lösung sodann einige Secunden dem Tageslichte ausgesetzt und dann mit einer ($\overline{A}$ haltenden) Eisenvitriollösung übergossen. Das auf der Platte befindliche unzersetzte Jodsilber löst man durch KCy auf und wäscht dieselbe höchst vorsichtig ab.

Man hat dann eine mit einem ausserordentlich fein zertheilten metallischen Ag imprägnirte Collodionplatte. Wie mich die Analyse eines so dargestellten Silbers überzeugte, ist dasselbe vollkommen rein, soferne man nicht zu wenig Essigsäure der Eisenlösung zusetzt und diese nicht zu concentrirt (2percentig) nimmt; im anderen Falle enthält das Silber Spuren von schwefelsaurem Eisenoxyd beigemengt.

Wenn man eine solche Platte mit einer geringen Menge Jodwassers oder auch — und dies ist der sicherste Weg — mit einer Jodkaliumlösung übergiesst, die durch Einleiten von Chlor freies Jod enthält, so wird das vorhandene metallische Silber nicht vollständig in AgJ verwandelt. Wäscht man sorgfältigst die Jodflüssigkeit ab, und exponirt eine solche Platte in trockenem Zustande unter einem Negative, so erscheint ohne Weiteres (oft schon in 20—30 Secunden) ein sichtbares, vortrefflich modellirtes Bild. Es gelang mir einige Male bei sehr kurzer Belichtung den dem Auge nicht wahrnehmbaren Lichteindruck dadurch sichtbar zu machen, dass ich die Platte, wie bei'm Daguerreotypprocess, Quecksilberdämpfen aussetzte.

Eine genaue Untersuchung dieser Vorgänge ist leider nicht mit Sicherheit zu verfolgen. Die mehr oder minder starke Undurchsichtigkeit der Collodium-Silberplatten (von denen gerade die am reichlichsten mit Ag bedeckten die besten Erfolge geben) gestattet nicht, die Einwirkung von Reagentien mit Sicherheit zu beobachten, wobei ausserdem noch das Vorhandensein des Silbers in metallischem Zustande in Betracht kommt. Doch ist es wahrscheinlich, dass die Entstehung dieser Bilder (s. w. u.) darnach zu erklären ist, dass AgJ mit metallischem Ag in Berührung bei der Belichtung Jod ausscheidet, das von demselben aufgenommen wird, während sich Ag_2J bildet.

Eine mit (im Collodium enthaltenen) metallischem Ag bedeckte Glasplatte, deren Silber durch eine reichlich angewendete concentrirte Lösung von Jod in Jodkalium vollständig in AgJ verwandelt ist, zeigt bei längerer Belichtung das gleiche Verhalten, wie die direct dargestellten Jodsilberplatten. — Eine Jodausscheidung fand ich merkwürdigerweise in einem Falle, als nämlich das Collodion der Platte mit Ricinusöl versetzt war.

II. Versuchsreihe.

Jodsilber und Lösungen von salpetersaurem Silberoxyd.

Über die Darstellung eines reinsten salpetersauren Silbers habe ich, da sie bekannt ist, nichts Neues hinzuzufügen. Das von mir zur Untersuchung verwendete Salz, von allen Verunreinigungen frei, wurde durch sechsmaliges Umkrystallisiren vollkommen säurefrei erhalten. Besonders wurde darauf geachtet, dass weder Lösungen noch Krystalle in irgend einer Weise mit organischen Stoffen in Berührung kamen.

Das Wasser, welches ich zur Lösung verwendete, wurde durch Destillation aus einer Glasretorte erhalten, in der vorher niemals eine Destillation vorgenommen worden war. Diese Operation wurde dreimal unter den bekannten, von Bunsen angegebenen Vorsichtsmassregeln wiederholt.

Die Auflösungen, die ich durch Zusammenbringen dieser reinsten Körper erhielt, zeigten nun bei der Bestrahlung durch Sonnenlicht durchaus keine chemische Veränderung. Weder eine Silberausscheidung, die Dr. Vogel beobachtet haben will, konnte ich bei sorgfältigster Untersuchung entdecken, noch auch eine sonstige Veränderung; die Flüssigkeit blieb wasserklar und neutral.

Da Lösungen von $AgO\,NO_5$ mit Collodiumwolle in Berührung sich möglicherweise anders verhalten konnten, so löste ich, unter Lichtabschluss, das vollkommen reine Präparat in absolutem Alkohol bis zur vollständigsten Sättigung, versetzte diesen mit der Hälfte reinsten Äthers und, nach dem sorgfältigsten Abgiessen von dem hierdurch theilweise ausgefällten $AgO\,NO_5$ brachte ich eine genügende Menge Collodiumwolle in das Gemisch, die vollkommen Cl frei war.

Mit diesem Collodion wurden Glasplatten überzogen, und diese in eine Auflösung des reinsten $AgO\,NO_5$ gebracht. Die herausgenommenen Platten exponirte ich stundenlang bis mehrere Tage dem Lichte, indem ich das Verdampfen der Flüssigkeit dadurch beseitigte, dass ich die Platte in einem mit Wasserdampf vollständig gesättigten Glaskasten hielt. Ich konnte aber darnach durchaus keine Abscheidung von Ag, noch sonst eine chemische Veränderung wahrnehmen.

Auch auf Platten, die in ähnlicher Weise feucht erhalten und mit Hülfe eines Objectivs lange Zeit belichtet wurden, liess sich kein Bild zum Vorschein bringen, wenn über dieselbe eine mit Essigsäure versetzte Eisenvitriollösung gegossen wurde.

Es folgt aus diesen Versuchen, dass salpetersaure Silberlösungen bei der Belichtung durchaus keine Zersetzung erleiden. Eine solche lässt sich nur dann beobachten, wenn das $AgONO_5$ Silberoxyd gelöst enthält oder nicht in absolut reinem Wasser aufgelöst war.

Wenn man chemisch reines AgJ mit einer Schichte reinster $AgONO_5$-Lösung bedeckt, den directen Sonnenstrahlen oder längere Zeit diffusem Lichte aussetzt, so gewahrt man (wie dies schon vielfach beobachtet wurde), dass sich die hellgelbe Farbe des Jodids nach und nach in eine dunkelbräunliche umwandelt, die durch das darunter liegende AgJ einen Stich in's Grünliche erhält.

Unternimmt man diesen Versuch mit grösseren Mengen Jodsilbers, die, der besseren Lichteinwirkung wegen, in dünnen Schichten ausgebreitet und öfter vertheilt werden, und verwendet man dabei grosse Mengen von $AgONO_5$-Lösung, so sieht man, dass sich aus der Masse des Jodids bei der durch die Sonne stattfindenden Erwärmung kleine Gasbläschen entbinden. Die Flüssigkeit, vorher vollkommen neutral, nimmt nunmehr nach und nach eine saure Reaction an.

Obwohl ich sehr grosse Quantitäten von AgJ zu diesen Versuchen angewendet habe und dasselbe mit einer (vorher erwärmten) Silberlösung, auf's Sorgfältigste vor Staub geschützt, wochenlang dem Tageslichte aussetzte, gelangte ich doch nicht dazu eine so grosse Menge des Gases zu erhalten, um dasselbe durch gasometrische Analyse quantitativ untersuchen zu können. Ich musste mich desshalb darauf beschränken qualitativ den Nachweis zu führen, dass dieses Gas in der That Sauerstoff ist. Die in einer kleinen Glasröhre aufgesammelte Gasmenge wurde mit dieser in erwärmtes reines Wasser gebracht, in welchem sich die schwerere Silberlösung aus dem Röhrchen zu Boden senkte und, nach mehrmaliger Wiederholung dieser Opperation und vollständiger Entfernung des Silbers, in das Röhrchen Pyrogallussäure und Kali eingebracht. Die tief dunkelbraune Färbung und die fast ganz vollständige Absorption des Gases beweisen, dass dasselbe fast vollkommen reiner Sauerstoff war.

Die Silberlösung, die zu diesen Versuchen gedient hatte, reagirte, wie erwähnt, entschieden sauer. — Durch synthetische Versuche,

die ich eigens zu diesem Zwecke anstellte, habe ich mich vergewissert, dass man mit Hülfe des Lackmuspapieres noch in einer (10 Perc. enthaltenden) Silberlösung freie Salpetersäure erkennen kann, wenn auf 8—10.000 Theile Flüssigkeit 1 Theil wasserfreier NO_5 zugegen ist. — Die Gegenwart freier Säure in der Silberlösung gestattet aber nur den Schluss, dass dieses Salpetersäure ist. Würde bei der Belichtung Jodsäure d. h. jodsaures Silber gebildet ($_2AgJ + AgO\,NO_5 = Ag_2J + Ag\,O,\,JO_5 + N$), so würde sich keine saure Reaction beobachten lassen. Ich unterliess demungeachtet und da möglicherweise die beiden Processe neben einander verlaufen, eine Prüfung auf JO_5 nicht. Eine grössere Quantität des bestrahlten Jodsilbers mit der Silberlösung wurde in eine genügende Menge Wassers gegeben und bei vollkommenem Lichtabschluss mit NaCl unter Vermeidung eines grösseren Überschusses gefällt, die Flüssigkeit verdünnt, abfiltrirt, zur Trockne gebracht und mit Kohle und kohlensaurem Natron geglüht. Die bekannte Jodreaction mit NO_5 gab in der Masse die vollständigste Abwesenheit von Jod zu erkennen. — Auch das Erwärmen einer kleinen Menge des Rückstandes, der nicht mit C und $NaO\,CO_2$ behandelt war, mit concentrirter reiner Salzsäure und Einleiten der Dämpfe in Jodkaliumlösung gab ein vollkommen negatives Resultat. Jodsäure ist also nicht vorhanden.

Es erübrigt nun noch die Analyse des belichteten Jodsilbers. Digerirt man die von der Silberlösung befreite Verbindung zur Entfernung des unzersetzten Jodids mit concentrirterer $NaOS_2O_2$-Lösung, so bleibt in höchst geringen Mengen ein bräunlichschwarzer Körper zurück. Behandelt man denselben mit $NaO\,CO_2 + KO\,CO_2$ auf C vor dem Löthrohre und zerreibt die Masse in einem Mörserchen, so sieht man deutliche Flitterchen von Ag und die Jodreaction ergibt in der Lösung der geglühten Masse das Vorhandensein von Jod, obwohl es mir auch einige Male nicht gelungen ist, dieselbe nachzuweisen. Doch ergibt sich hieraus, dass das vom Lichte längere Zeit getroffene Jodsilber in eine niedere Verbindungsstufe in Silberjodür, Ag_2J, wahrscheinlich umgewandelt wird. — Freies metallisches Silber konnte ich bei diesem Vorgange nicht entdecken.

Auch stimmt der enthaltene Körper in seinen Eigenschaften mit der Verbindung überein, die man nach Dr. Vogel's Vorgang erhält, wenn man auf Silberchlorür Jodkalium einwirken lässt. Es löst sich wie es scheint schwierig in Jodkaliumlösung; wird durch NH_4O nicht

verändert oder gelöst, während er einer Behandlung mit concentrirter Salpetersäure nicht wiedersteht. Ob der fragliche Körper auch noch Sauerstoff enthält, ist nicht mit Sicherheit zu ermitteln. —

Die Veränderung, welche das in einer Collodionplatte unter $AgO\,NO_5$-Lösung befindliche AgJ erfährt, manifestirt sich, wenn die Platte genügend lange feucht erhalten wird, durch ein ohne Weiteres hervortretendes negatives Bild. Es ist dies in soferne bemerkenswerth, als solche Bilder bis jetzt noch nicht beobachtet wurden. Erwähnen will ich dabei noch, dass die Silberlösung auf einer solchen Platte ebenfalls saure Reaction zeigt, die sich über die dem bestrahlten Theile der Platte zunächstliegenden Partien sogar verbreitet.

Von grösster Wichtigkeit für die theoretische Photographie ist die Veränderung, die das Jodsilber auf eine Collodionplatte bei sehr kurzer Belichtung unter nicht zu concentrirten oder verdünnten Silberlösungen erfährt. Mikroskopische Besichtigung und chemische Reactionen lassen keine physikalische noch chemische Veränderung der Schichte erkennen, die erst dann hervortritt, wenn eine mit Ä versetzte Eisenvitriollösung darüber gegossen wird. In diesem Falle schlägt sich an den belichteten Theilen metallisches Silber nieder, ein Vorgang, den ich zunächst hier weiter nicht verfolgen kann.

Wenn nun eine bemerkbare Jodausscheidung bei kurzer Belichtung stattgefunden hätte, so müsste ohne Zweifel der Ag-Gehalt der Lösung verringert worden sein, die mit dem Ag J in Berührung war.

Die Analysen, deren Detail ich hier füglich übergehen kann, ergaben:

A. Silberlösung (mit Jodsilber gesättigt) ohne Belichtung	*B.* Silberlösung (mit Jodsilber gesättigt) nach 15″ Belichtung
9·47 Proc. Ag.	9·41 Proc. Ag.
9·53 „ „	9·44 „ „
Mittel = 9·50 „ „	Mittel = 9·45 „ „

Differenzen, die innerhalb der Fehlergrenze der Analyse bleiben.

Dass aber trotzdem eine chemische Zersetzung des Ag J stattgefunden hat, ergibt sich aus Folgendem:

Wenn man eine dem Lichte dargebotene Platte vorsichtig abwäscht und im Dunkeln feucht aufbewahrt, so lässt sich nach tagelangem Liegen dieser Platten ein Bild mit Eisenlösung hervorrufen.

Übergiesst man eine Platte, die exponirt war, mit unterschwefligsaurem Natron, um das unveränderte Jodsilber aufzulösen, so gibt diese ein Bild mit Eisenvitriollösung und Silber [1]).

Wie ich aber beobachtet habe, erscheint unter diesen Umständen kein Bild, wenn man diese fixirten Platten mit Jodwasser übergiesst. Dies deutet mit Gewissheit darauf hin, dass sich das Jodsilber durch die Belichtung in eine niedere Verbindungsstufe des Jods mit dem Silber verwandelt hat, die sich durch Jodaufnahme wieder in gewöhnliches Jodid verwandelt.

Ein besonderes Interesse nimmt noch das Verhalten des AgJ in Anspruch, das in Contact mit ganz gesättigter Höllensteinlösung dem Lichte dargeboten wird. Übergiesst man chemisch reines Ag J mit einer solchen concentrirten Lösung oder bringt man auf, unter verdünnten Lösungen von $AgO\,NO_5$ befindlichem, Ag J ein Stück krystallisirten oder geschmolzenen Silbersalpeters, so scheidet die Verbindung im diffusen Tageslichte in kurzer Zeit einen röthlichen, dem Jode höchst ähnlichen Körper aus, welcher dieselbe in dünner Schichte überzieht.

Stellt man diesen Versuch derart an, dass das unter der concentrirten Silberlösung befindliche Ag J direct von den Sonnenstrahlen getroffen wird, so verwandelt sich, aber nur da, wo das Licht direct einwirkt, der röthliche Körper in gelbes Ag J, indem dann auch die Flüssigkeit sauer reagirt und freie Salpetersäure enthält. Die Silberlösung wird also durch das Licht, wie wir dies bei verdünnteren Lösungen bemerkten, durch Jodeinwirkung in Ag J, NO_5 und Sauerstoff zerlegt.

Eine gleiche Veränderung tritt ein, wenn man dem roth gefärbten Jodide (sammt $AgO\,NO_5$) reines Wasser oder irgend eine wässerige Salzlösung zufügt. Wenn man durch vorsichtiges Verdampfen an der Luftwärme und bei vollständigstem Abschlusse von Staub u. s. w. die Masse zum Trocknen bringt und mit Chloroform oder Schwefelkohlenstoff übergiesst, so verändert sich deren röthliche Farbe nicht im mindesten, und die genannten Körper entziehen derselben auch nicht eine Spur Jods. Erhitzt man die Masse vorsichtig bis auf über 100° C., so sublimirt ebenfalls kein Jod; ja man kann dieselbe bis

[1]) Schrauss, Nachschlagebuch Seite 148.

zum Schmelzen des beigemengten $AgONO_5$ erhitzen, ohne dass die röthliche Farbe verschwindet.

Es gestatten denn auch diese Versuche keine andere Deutung, als dass der aus dem Ag J unter concentrirter Silberlösung ausgeschiedene Körper kein Jod, sondern ein Superjodid des Silbers sei, obwohl man diese Annahme für den ersten Blick unwahrscheinlich finden mag.

III. Versuchsreihe.

Jodsilber und Ferrocyankaliumlösungen.

Wir verdanken den ausgezeichneten Untersuchungen Hunt's die Entdeckung der Thatsache, dass Jodsilber bei der Belichtung unter Lösungen von Ferrocyankalium eine fast momentane Veränderung erfährt, indem sich die genannte Verbindung schwärzt. — Es schien mir von Interesse diesen merkwürdigen Vorgang einer abermaligen Untersuchung zu unterziehen und die chemische Veränderung zu studiren, welche Hunt nicht näher erörtert hat.

Zu dem Ende brachte ich reinstes AgJ mit einer wässerigen concentrirten Lösung von Ferrocyankalium bedeckt in das Tageslicht. Das Verhalten des Jodides gegen Silberlösung liess erwarten, dass eine Jodausscheidung erfolgen würde und diese eine Bildung von Ferridcyankalium und Jodkalium hervorrufe.

Zunächst habe ich mich bemüht das Ferridcyankalium neben Ferrocyankalium nach der von Lenssen angegebenen und von Mohr verbesserten Methode nachzuweisen und quantitativ zu bestimmen. Es gelang mir dies aber nicht und war ich desshalb genöthigt, einen anderen Weg einzuschlagen. Da Ferro- und Ferridcyankalium nicht in absolutem Alkohol löslich sind, während Jodkalium sich darin löst, so gründete ich hierauf den qualitativen Nachweis.

Nachdem ich das AgJ mit CfyK bedeckt der lange dauernden Bestrahlung dargeboten hatte, übergoss ich die veränderte schwärzliche Masse mit absolutem Alkohol, den ich nach und nach in kleinen Quantitäten zufügte. Derselbe wurde nach genügend lange dauernder Digestion, während welcher sich alles Unlösliche abgeschieden hatte, abfiltrirt, vorsichtig zur Trockne verdampft. Der Rückstand, Spuren von AgJ enthaltend, wurde mit vielem Wasser aufgenommen, abermals

filtrirt und eingedampft. In dieser Flüssigkeit konnte ich nunmehr das Vorhandensein von KJ mittelst der bekannten Reactionen nachweisen.

Das veränderte, durch sorgfältigstes Auswaschen von Ferrocyankali befreite AgJ hinterliess bei der Behandlung mit KJ einen Körper, der in seinen Eigenschaften der als Silberjodür bezeichneten Verbindung gleich ist. Es folgt desshalb aus diesen Untersuchungen, dass AgJ unter Ferrocyankalium lange belichtet Jod ausscheidet, indem sich einentheils Silberjodür, anderntheils Ferridcyankalium und Jodkalium bilden.

Obwohl von mehr photographischem als wissenschaftlichem Interesse, will ich doch die Thatsache nicht unberührt lassen, dass man auf einer collodionirten Jodsilberplatte sowohl wie auf einer Collodium-Brom- und Jodsilberplatte, die mit concentrirteren Lösungen von CfyK bedeckt sind, in sehr kurzer Zeit bei einer Belichtung directe negative Bilder erhält. Die bis zu dem Erscheinen des Bildes nothwendige Zeit ist von den zur Bestrahlung dienenden Lichthelle abhängig, wenn der Versuch unter gleichen Umständen angestellt worden. Beobachtet man daher die Zeit der Erscheinung eines Bildes bei gegebenen Umständen und weiss man, wie viel mal länger diese dauert, ehe unter diesen Umständen ein Bild sich nach einem gewöhnlichen Verfahren (mit Höllensteinlösung) erzeugen lässt, so kann man daraus ein vergleichsweises Mass der Lichthelle für praktische Zwecke der Photographie ableiten.

Eben so lassen sich, nach einer sehr kurz andauernden Belichtung einer Platte von Jodsilber und Ferrocyankalium, Negative herstellen, wenn man das Ferrocyankalium von der Platte entfernt und diese mit einer mit Silber versetzten Pyrogallussäurelösung oder einer mit Silber versetzten Eisenvitriollösung übergiesst.

Die jedem Fachmanne bekannten, bei der raschen Entwickelung der Wissenschaft von Jahr zu Jahr sich steigernden Unzukömmlichkeiten, welche mit der cumulativen Herausgabe von Abhandlungen verbunden sind, die sich auf sämmtliche naturwissenschaftliche Fächer beziehen, haben die mathematisch-naturwissenschaftliche Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften bestimmt, ihre Sitzungsberichte in zwei gesonderten Abtheilungen erscheinen zu lassen.

Die **erste Abtheilung** enthält die Abhandlungen aus der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie, Geologie und Paläontologie; die **zweite Abtheilung** die aus der Mathematik, Physik, Chemie, Physiologie, Meteorologie, physischen Geographie und Astronomie.

Von jeder dieser Abtheilungen erscheint jeden Monat mit Ausnahme von August und September ein Heft, welches drei Sitzungen umfasst. Der Jahrgang enthält somit zehn Hefte.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine vollständige Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen voran, selbst wenn diese nicht zur Aufnahme in die Schriften der Akademie bestimmt werden.

Der Preis des Jahrganges beträgt für eine Abtheilung 12 Gulden ö. W.

Von allen grösseren Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und sind durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn zu beziehen.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

JAN 13 '60 H

WIDENER
BOOK DUE
JAN 2 1988
2502859

JAN [illegible] '60 H

WIDENER
BOOK DUE
AUG 13 1987
2388608

FEB 24 '60 H

WIDENER
BOOK DUE
CANCELLED
AUG 13 1987
2388609

3 2044 091 156 554